
Complexité

M1 Informatique Luminy 2026-27

CM-TD-TP	<u>Kévin Perrot</u>	<kevin.perrot@univ-amu.fr>
TD-TP	Antonio E. Porreca	<antonio.porreca@univ-amu.fr>
TD-TP	Ravi Kunjwal	<ravi.kunjwal@univ-amu.fr>
TP	Rocco Ascone	<rocco.ascone@lis-lab.fr>

9hCM 9hTD 9hTP

$$NF = \text{MAX}(ET ; 0.3 * CC + 0.7 * ET)$$

Résolution algorithmique de problèmes

« *An algorithm is a finite answer
to an infinite number of questions* »

Stephen Kleene



photo Paul Halmos

Recherche d'un mot dans un texte

Entrée : deux chaînes de caractères m et t .

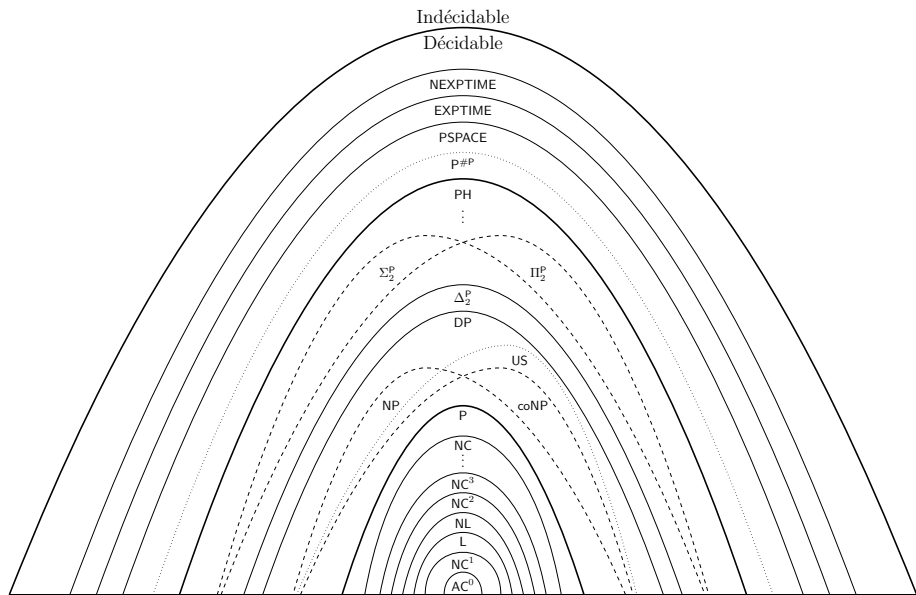
Question : est-ce que m a au moins une occurrence dans t ?

Test de primalité

Entrée : un entier n .

Question : est-ce que n est un nombre premier ?

Calculabilité et complexité des problèmes



Complexité algorithmique

La complexité algorithmique mesure la quantité de ressources (temps, mémoire) utilisées pour la résolution d'un problème par un programme.

- **Fonction** de la taille de l'entrée.
- Dans le **pire cas** (offre une garantie)
ou en moyenne (attention, l'analyse est plus difficile).

Recherche d'un mot dans un texte

Entrée : deux chaînes de caractères m et t .

Question : est-ce que m a au moins une occurrence dans t ?

? Temps linéaire : $\mathcal{O}(|m| + |t|)$ Knuth–Morris–Pratt (1970)

Test de primalité

Entrée : un entier n .

Question : est-ce que n est un nombre premier ?

? Temps polynomial : $\tilde{\mathcal{O}}(\log(n)^6)$ Agrawal–Kayal–Saxena (2002)

Rappels : taille de l'entrée

Type de donnée

un entier naturel $n \in \mathbb{N}$

un entier relatif $n \in \mathbb{Z}$

un réel $r \in \mathbb{R}$

un tableau de n entiers

une chaîne de caractères s

un graphe avec

n sommets et m arêtes

Taille en bits (environ)

$\log_2(n)$ $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$

$\log_2(n)$ $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 2$

constante (1, 8, 23 ou 1, 11, 52)

$c \cdot n$ pour des entiers de 0 à $2^c - 1$

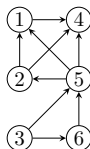
$c \cdot |s|$ pour un alphabet de $\leq 2^c$ lettres

n^2 par matrice d'adjacence

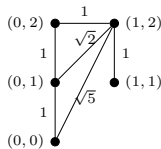
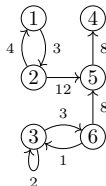
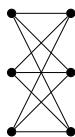
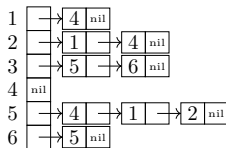
$n + m$ par listes d'adjacence

Parfums de graphes

- Orienté ou non
- Pondéré ou non
- Simple ou multiple
- Acyclique ou non
- Biparti ou non
- Planaire ou non
- Connexe ou non
- Topologique ou plongé
- Creux ou dense



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

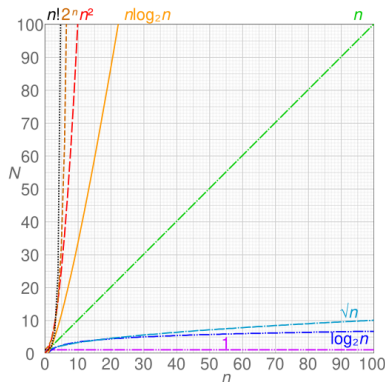


Rappels : notations de Landau

Bornes asymptotiques à un facteur multiplicatif près :

- On note $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ lorsque $\exists c > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c g(n)$.
- On note $f(n) \in \Omega(g(n))$ lorsque $\exists c > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \geq c g(n)$.
- On note $f(n) \in \Theta(g(n))$ lorsque $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ et $f(n) \in \Omega(g(n))$.
- On note $f(n) \in o(g(n))$ lorsque $\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq \epsilon g(n)$.

$\mathcal{O}(1)$	constant
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmique
$\mathcal{O}(n)$	linéaire
$\mathcal{O}(n \log n)$	quasi-linéaire
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratique
$\mathcal{O}(n^3)$	cubique
$\mathcal{O}(n^k)$ avec k fixé	polynomial
$\mathcal{O}(k^n)$ avec $k > 1$ fixé	exponentiel
$\mathcal{O}(n!)$	factoriel



Rappels : ordres de grandeur en temps

1 million d'instructions élémentaires par seconde :

	n	$n \log n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	0	0	0	0	0	0	4 sec
$n = 20$	0	0	0	0	0	1 sec	77000 ans
$n = 50$	0	0	0	0	11 min	36 ans	∞
$n = 100$	0	0	0	1 sec	12891 ans	10^{17} ans	∞
$n = 1000$	0	0	1 sec	17 min	∞	∞	∞
$n = 10^4$	0	0	2 min	12 jours	∞	∞	∞
$n = 10^5$	0	2 sec	3 heures	32 ans	∞	∞	∞
$n = 10^6$	1 sec	20 sec	12 jours	32000 ans	∞	∞	∞

0 = moins de 1 seconde

∞ = plus de 10^{20} ans

Rappels : ordres de grandeur en temps

1 milliard d'instructions élémentaires par seconde :

	n	$n \log n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	0	0	0	0	0	0	0
$n = 20$	0	0	0	0	0	0	77 ans
$n = 50$	0	0	0	0	1 sec	13 jours	∞
$n = 100$	0	0	0	0	13 ans	10^{14} ans	∞
$n = 1000$	0	0	0	1 sec	∞	∞	∞
$n = 10^4$	0	0	0	17 min	∞	∞	∞
$n = 10^5$	0	0	10 sec	12 jours	∞	∞	∞
$n = 10^6$	0	0	16 min	32 ans	∞	∞	∞

0 = moins de 1 seconde

∞ = plus de 10^{20} ans

Complexité algorithmique : définitions

Le **temps de calcul** d'un algorithme A sur une entrée $w \in \Sigma^*$ est le nombre d' instructions élémentaires exécutées, noté $t_A(w)$.

Définition ? Modèle de calcul ! MT, RAM, RASP, ...

Ce nombre donne le temps de calcul **en secondes** à un facteur multiplicatif près correspondant à la vitesse du processeur.

2 GHz = facteur $\frac{1}{2 \cdot 10^9}$.

La **complexité (en temps) dans le pire cas** d'un algorithme A est une fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la taille de l'entrée :

$$T_A(n) = \max_{w \in \Sigma^n} t_A(w)$$

La **complexité (en temps) dans le pire cas** d'un problème P est la complexité du **meilleur algorithme** qui résout ce problème :

$$T_P(n) = \inf_{\substack{\text{algo } A \\ \text{qui résout } P}} T_A(n)$$

Divulgâcheur : rares sont les problèmes dont la complexité est connue (démontrée sup-inf), mais depuis les années 1970 on a une belle théorie de la complexité : NP-complétude...

Bibliographie

Diapos des CM, pas de correction des TD et TP.
Vous devez venir en cours.

- [Cormen](#) : *Introduction to Algorithms* (1990)
- [Perifel](#) : *Complexité Algorithmique* (2014)
- [Papadimitriou](#) : *Computational Complexity* (1994)
- [Arora-Barak](#) : *Computational Complexity* (2009)
- [Garey-Johnson](#) : *Computers and Intractability* (1979)

Quiz