

## Examen – Théorie de la complexité (SINB33C)

**Durée :** 2 heures.

(Barème indicatif)

**Documents :** non autorisés.

**Important :** on vous demande de présenter proprement et clairement vos réponses.

### Exercice 1.

Définitions (5 points)

Vos réponses doivent être précises. Vous pouvez parler de problèmes de décision, ou de langages.

1. Donner les deux définitions de la classe NP.
2. Donner la définition d'une réduction many-one polynomiale, notée  $\leq_m^P$ .
3. Donner la définition d'un problème NP-difficile, et celle d'un problème NP-complet.
4. Démontrer que si  $A$  est NP-difficile et  $A \leq_m^P B$  alors  $B$  est NP-difficile.

### Exercice 2.

Clique et stable (5 points)

Pour simplifier, dans cet exercice on pourra supposer que  $n$  est multiple de 4.

#### 1/4-Clique

*Entrée :* Un graphe non orienté  $G = (V, E)$  à  $n$  sommets.

*Question :*  $G$  possède-t-il une clique de taille supérieure ou égale à  $\frac{n}{4}$  ?

Une *clique* est un sous-ensemble de sommets qui sont tous reliés deux à deux.

#### 1/2-Stable

*Entrée :* Un graphe non orienté  $G = (V, E)$  à  $n$  sommets.

*Question :*  $G$  possède-t-il un stable de taille supérieure ou égale à  $\frac{n}{2}$  ?

Un *stable* (*ensemble-indépendant*) est un sous-ensemble de sommets avec aucune arête entre eux.

1. Démontrer que **1/2-Stable**  $\leq_m^P$  **1/4-Clique**.

Indication : vous pouvez passer par **1/2-Clique**, et composer deux réductions.

Nous allons réduire **1/4-Clique** à **SAT** (modélisation pour utiliser un solveur-SAT).

Étant donnée une instance  $G = (V, E)$  du problème **1/4-Clique**, on définit une variable  $x_v^i$  pour chaque  $v \in V$  et chaque  $i \in \{1, \dots, \frac{n}{4}\}$ .

2. Avec  $n = |V|$  et  $m = |E|$ , donner une expression arithmétique comptant le nombre de variables.

L'interprétation de nos variables est la suivante : le sommet  $v \in V$  est sélectionné dans la clique si et seulement si la disjonction  $X_v = \bigvee_{i=1}^{\frac{n}{4}} x_v^i$  est vraie.

3. Donner une formule  $\varphi_G$  sur ces variables, qui est satisfaisable si et seulement si  $G$  possède une clique de taille supérieure ou égale à  $\frac{n}{4}$ .

Indication : on ne vous demande pas d'argumenter que cette équivalence est bien vérifiée.

Suite au verso ○

**Exercice 3.**

Partition en cliques (10 points)

On définit deux familles de problèmes où  $k$  ne fait pas partie de l'entrée. **$k$ -Colorabilité**Entrée : Un graphe non orienté  $G = (V, E)$  à  $n$  sommets.Question :  $G$  possède-t-il une coloration valide avec  $k$  couleurs ?Une coloration attribuée à chaque sommet une couleur, elle est *valide* si les deux extrémités de chaque arête n'ont pas la même couleur. **$k$ -Partition en cliques**Entrée : Un graphe non orienté  $G = (V, E)$  à  $n$  sommets.Question :  $V$  peut-il être  $k$ -partitionné de façon à ce que le sous-graphe induit par chaque sous-ensemble est une clique dans  $G$  ?

Une *clique* est un sous-ensemble de sommets qui sont tous reliés deux à deux. Une  *$k$ -partition* de  $V$  est une collection de  $k$  sous-ensembles  $V_1, \dots, V_k$  tels que  $\bigcup_{i=1}^k V_i = V$  et pour tous  $i \neq j$  on a  $V_i \cap V_j = \emptyset$ . Le sous-graphe  $G_i = (V_i, E_i)$  induit par un sous-ensemble  $V_i$  a pour sommets  $V_i$  et contient toutes les arêtes qui étaient présentes dans  $G$  entre les sommets de  $V_i$ , et aucune autre, c'est-à-dire  $E_i = \{uv \in E \mid u \in V_i \text{ et } v \in V_i\}$ . Exemple du sous-graphe induit par les quatre sommets entourés :



1. Donner un exemple d'instance positive du problème **2-Partition en cliques** ( $k = 2$ ) avec 6 sommets et 7 arêtes.
2. Donner un exemple d'instance négative du problème **2-Partition en cliques** ( $k = 2$ ) avec 6 sommets et 7 arêtes.
3. Démontrer que le problème **3-Partition en cliques** appartient à la classe NP.
4. Sachant que **3-Colorabilité** est NP-complet, démontrer que **3-Partition en cliques** est NP-complet. Indications : Dans une coloration valide, chaque couleur correspond à un ensemble indépendant de sommets (un stable). Décrire clairement votre utilisation des questions **1.4** et **3.3**.
5. Donner une transformation qui permet de réduire  **$k$ -Partition en cliques** à  **$(k + 1)$ -Partition en cliques**, pour tout  $k \geq 1$ , sans la justifier.
6. Montrer que **2-Partition en cliques** est dans P.