

DES AC ∞ AUX AC FINIS

A.C. : $F : A^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow A^{\mathbb{Z}^d}$

M.T. : $M : \Gamma^{\mathbb{Z}} \times Q \times \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma^{\mathbb{Z}} \times Q \times \mathbb{Z}$ (ARRÊT = POINT FIXE)

DEF. ON DIT QUE B ^{$x_B \rightarrow x_B$} SIMULE A, ^{$x_A \rightarrow x_A$} NOTÉ $A \leq B$,

LORSQU'IL EXISTE UNE FONCTION INJECTIVE $\phi : X_A \rightarrow X_B$ TELLE QUE $\phi \circ A = B \circ \phi$

THM [SMITH 1971]: POUR TOUTE M.T. $M = (Q, \Gamma, \delta)$ AVEC $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ \leftarrow, \rightarrow \}$ PARTIELLE IL EXISTE UN A.C. F TEL QUE $M \leq F$, PAR EXEMPLE AVEC $d=1$ ET $V = \{-1, 0, 1\}$.

COROLLAIRE : IL EXISTE DES A.C. TURING-UNIVERSELS. PAR EXEMPLE :

• GOL [CONWAY ET AL. 1982, REWDEL 2000, LOIZEAU 2016]

(ITU DANS GOLLY) (8-BIT COMPUTER : P60 GUN, 90° REFLECTOR, GUNNER DUPLICATOR, GUNNER EATER)

• ECA 110 [COOK 2004]

110 = $\begin{matrix} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

• ECA 54 ?

54 = $\begin{matrix} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

INTUITIVEMENT, PAR LE THÉORÈME DE RICE CELA IMPLIQUE QUE DE NOMBREUX PROBLÈMES CONCERNANT LA DYNAMIQUE DES AUTOMATES CELLULAIRES SONT INDÉCIDABLES, MAIS ATTENTION LA TRADUCTION N'EST PAS TRÈS SATISFAISANTE ...

↳ EXEMPLE : ATTEIGNABILITÉ (REACHABILITY)

THÉORÈME DE RICE POUR LES ENSEMBLES LIMITES D'AUTOMATES CELLULAIRES

DEF. L'ENSEMBLE LIMITE D'UN A.C. F EST $\Omega_F = \bigcap_{t=0}^{\infty} F^t(A^{\mathbb{Z}^d})$, C'EST-À-DIRE

L'ENSEMBLE DES CONFIG. APPARAISSANT APRÈS UN NOMBRE ARBITRAIREMENT GRAND D'ÉTAPES.

$\Omega_F \neq \emptyset$ CAR IL CONTIENT AU MOINS UNE CONFIG. HOMOGÈNE.

POUR UN $d \geq 1$ FIXÉ, UNE PROPRIÉTÉ DES ENSEMBLES LIMITES EST UNE FAMILLE

P D'ENSEMBLES LIMITES. ELLE EST NON-TRIVIALE LORSQUE $\exists F_1, F_2$ TELS QUE $\Omega_{F_1} \in P$ ET $\Omega_{F_2} \notin P$.

EXEMPLES : NILPOTENCE, UN ÉTAT a APPARAÎT DANS UNE CONFIG. DE L'ENSEMBLE LIMITE,

L'ENSEMBLE LIMITE EST INFINI DÉNOMBRABLE ...

(ATTENTION LA SURJECTIVITÉ N'EST PAS UNE PROPRIÉTÉ DES ENSEMBLES LIMITES)

THM [KARI 1994]: POUR TOUT $d \geq 1$ ET TOUTE PROPRIÉTÉ NON-TRIVIALE DES ENSEMBLES LIMITES P , LE PROBLÈME DE SAVOIR SI UN A.C. DONNÉ A UN ENSEMBLE LIMITE QUI VÉRIFIE P EST INDÉCIDABLE.

AUTOMATES CELLULAIRES FINIS PÉRIODIQUES $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$ DEF: UNE CONFIG. EST PÉRIODIQUE DE TAILE l LORSQUE $\forall z \in \mathbb{Z}^d$ ON A $c(z) = c(z + (l, \dots, l))$.ON PARLE D'AUTOMATE CELLULAIRES FINIS PÉRIODIQUES QUAND ON SE RESTREINT AUX CONFIGURATIONS PÉRIODIQUES (POUR TOUTE TAILE l , QUI SERA DONNÉE EN ENTRÉE DES PS DE RÉCURRENCE).

ATTEIGNABILITÉ DES AC FINIS PÉRIODIQUES (AT-PER)

ENTRÉE: UNE RÈGLE LOCALE $f: A^V \rightarrow A$ POUR UN VOISINAGE FINI $V \subseteq \mathbb{Z}^d$,
UNE TAILE l ET DEUX CONFIG. PÉRIODIQUES $x, y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ DE TAILE l .

QUESTION: EST-CE QUE y EST DANS L'ORBITE DE x ? C'EST-À-DIRE $\exists t \in \mathbb{N}: F^t(x) = y$?

THM: EN TOUTE DIMENSION $d \geq 1$, AT-PER EST PSPACE-COMPLET.

PREUVE: $\in$ PSPACE: CALCULER LES ITÉRATIONS DE F À PARTIR DE x POUR AU PLUS $|A|^{l^d}$ ÉTAPES.

PSPACE-DIFFICULTÉ: AVEC LA SIMULATION DE P.T. PRÉCÉDENTE, SUR DES CONFIG. PÉRIODIQUES ON PEUT SIMULER DES P.T. À ESPACE BORNÉ. $\square$

EXISTENCE D'UN PRÉDÉCESSEUR DES AC FINIS PÉRIODIQUES (PREP-PER)

ENTRÉE: UNE RÈGLE LOCALE $f: A^V \rightarrow A$ POUR UN VOISINAGE FINI $V \subseteq \mathbb{Z}^d$,
UNE TAILE l ET UNE CONFIG. PÉRIODIQUE $y \in A^{\mathbb{Z}^d}$ DE TAILE l .

QUESTION: EST-CE QUE y A UN PRÉDÉCESSEUR? C'EST-À-DIRE, $\exists x \in A^{\mathbb{Z}^d}: F(x) = y$?

(PÉRIODIQUE DE TAILE l) (PÉRIODIQUE DE TAILE l)

THM [SUTNER 1995]: POUR TOUT $d \geq 2$, AT-PER EST NP-COMPLET.

POUR $d = 1$, AT-PER EST NLOGSPACE-COMPLET.

LA BORNE SUPÉRIEURE NP EST ASSEZ ÉVIDENTE: DEVINER x ET CALCULER $F(x)$.

RÉSEAUX D'AUTOMATES

MODÈLES D'ENTITÉS EN INTERACTION

Q: COMMENT GÉNÉRER / ASSOURIR LES AC ? • HOMOGENÉITÉ SPATIALE • PNTJ ...

DEF: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ AUTOMATES

$n \in \mathbb{N}_+$ TAILLE

$X = \prod_{i \in [n]} A_i$ AVEC $A_i \in \{0, \dots, q_i - 1\}$ CONFIGURATIONS (ALPHABETS FINIS)

$(f_i: X \rightarrow A_i)_{i \in [n]}$ FONCTIONS LOCALES

$f: X \rightarrow X$ AVEC $\forall x \in X: f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ FONCTION GLOBALE / "DYNAMIQUE".

$\hookrightarrow$ R.A. DÉTERMINISTE AVEC MODE DE MISE À JOUR PARALLÈLE / SYNCHRONES.

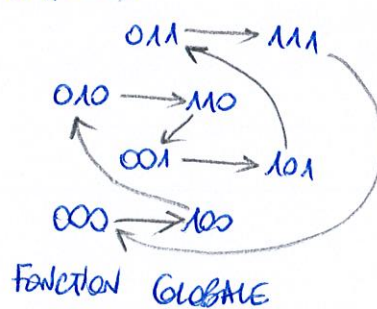
EXEMPLE: $n=3$, BOOLÉEN ($q_i=2$)

$$f_1(x) = \neg x_1$$

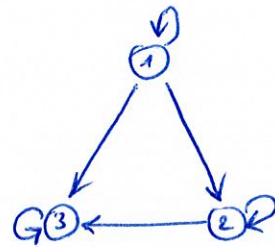
$$f_2(x) = x_1 \oplus x_2$$

$$f_3(x) = x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2)$$

FONCTIONS LOCALES



FONCTION GLOBALE



GRAPHES D'INTERACTION

$\Delta \subseteq$ GRAPHES DE COMMUNICATION

DEF: LE GRAPHES DE COMMUNICATION $G_f^c = (V^c, A^c)$ D'UN R.A. f AVEC:

$V^c = [n]$ ET $(i, j) \in A^c \Leftrightarrow i$ APPARAÎT DANS LA DÉFINITION DE f_j .

LE GRAPHES D'INTERACTION EST $G_f = (V, A)$ AVEC:

$V = [n]$ ET $(i, j) \in A \Leftrightarrow i$ INFLUENCE EFFECTIVEMENT j

$\Leftrightarrow \exists x \in X: f_j(x) \neq f_j(x + e_i)$ OÙ e_i EST LE i ÈME VECTEUR DE BASE ET $+$ MODULO q_i .

(RELATION STRUCTURELLE ENTRE G_f ET f)

THÉORÈME [ROBERT 1976]: SOIT f UN R.A. DE TAILLE n (PNTJ. PARALLÈLE)...

G_f ACYCLIQUE $\Rightarrow f^n$ CONSTANTE (UNIQUE ATTRACTEUR POINT FIXE).

PREUVE: TRI TOPOLOGIQUE DE G_f .

PAR INDUCTION SUR t DE 1 À n :

APRÈS t ITÉRATIONS LES AUTOMATES

À DISTANCE $t-1$ DES SOURCES

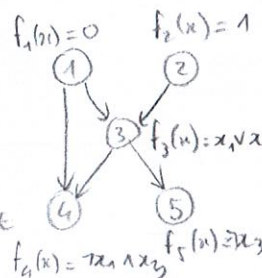
SONT CONSTANTS. $\square$

EXEMPLE:

$n=5$

BOOLÉEN

PNTJ. PARALLÈLE



$$f_1(x) = 0$$

$$f_2(x) = 1$$

$$f_3(x) = x_1 \wedge x_2$$

$$f_4(x) = \neg x_1 \wedge x_2$$

$$f_5(x) = x_3$$

$\forall x$	1	2	3	4	5
$f^1(x)$	0	1	?	?	?
$f^2(x)$	0	1	1	?	?
$f^3(x)$	0	1	1	1	0

DONC LES CYCLES SONT LES MOTEURS DE LA COMPLEXITÉ COMPORTEMENTALE.

MODÈS DE MISE À JOUR

UN VASTE PAYSAGE, DONT LES ÉLÉMENTS IMPORTANTS SONT :

NOTATION : Pour $f: X \rightarrow X$ ET $B \subseteq [n]$ UN BLOC ON NOTE $f_B: X \rightarrow X$ TELLE QUE $\forall i \in [n]: f_B(u)_i = \begin{cases} f_i(u) & \text{si } i \in B \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}$

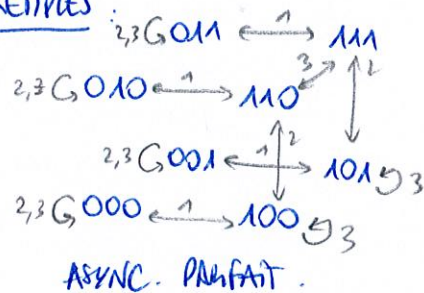
ET POUR $\mu = (b_1, \dots, b_p)$ UNE SÉQUENCE DE BLOCS $B_i \subseteq [n]$ ON NOTE $f_\mu = f_{b_p} \circ \dots \circ f_{b_1}: X \rightarrow X$.

DÉTERMINISTES $X \rightarrow X$:

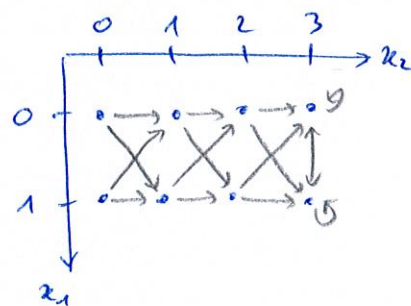
- PARALLÈLE : $([n])$
- SÉQUENTIELS : $(\{\pi(i)\})_{i \in [n]}$ AVEC $\pi: [n] \rightarrow [n]$ UNE PERMUTATION
- BLOC-SÉQUENTIELS : $(B_1, \dots, B_p)$ UNE PARTITION ORDONNÉE ($\forall i \neq j: B_i \cap B_j = \emptyset$ ET $\bigcup_{i \in [p]} B_i = [n]$).
- PÉRIODIQUES : μ UNE SÉQUENCE DE BLOCS QUELCONQUE.

NON-DÉTERMINISTES $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$:

- ASYNCHRONES (PARFAIT) $_\alpha$: $f_\alpha(u) = \{f_{\{i\}}(u) \mid i \in [n]\}$
- ASYNCHRONES GÉNÉRAL α : $f_\alpha(u) = \{f_B(u) \mid B \subseteq [n]\}$
- NON-DÉTERMINISTE AVEC RELATIONS LOCALES $(\pi_i: X \rightarrow \mathcal{P}(A_i))_{i \in [n]}$ ou $(\pi_i \subseteq X \times A_i)_{i \in [n]}$ ET RELATION GLOBALE $\pi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ AVEC $y \in \pi(x) \Leftrightarrow \forall i \in [n]: y_i \in \pi_i(x)$.

EXEMPLES

$n=2$
 $A_1 = \{0, 1\}$
 $A_2 = \{0, 1, 2, 3\}$
 $\pi_1(u) = \{0, 1\}$
 $\pi_2(u) = \begin{cases} \{3\} & \text{si } x_2 = 3 \\ \{x_2 + 1\} & \text{sinon} \end{cases}$
 NON-BET

DEF : BET : POINT FIXE $x \in X$ TEL QUE $f(u) = x$.CYCLE LIMITE $(x^0, \dots, x^{l-1})$ TEL QUE $f(x^i) = x^{i+1 \bmod l}$ ET $\forall i \neq j: x^i \neq x^j$.
 l EST LA PÉRIODE.NON-BET : POINT FIXE $x \in X$ TEL QUE $x \in f(u)$ POINT FIXE FORT $x \in X$ TEL QUE $f(u) = \{x\}$.ATTRACTEUR : COMPOSANTE FORTEMENT CONVERGE TERMINALE (BASIN $\neq \emptyset$).

PROPOSITION : Tout graphe orienté est la dynamique d'un R.A.

PREUVE : DÉTERMINISTE OU NON-DÉTERMINISTE : SUR 1 AUTOMATE (PAI DE PB DE $|X| = \prod_{i \in [n]} |A_i|$)

NI DE NON-DÉT GLOBAL PRODUIT DES CHOIX LOCAUX.

ÉTANT DONNÉ $G = (V, A)$ ON DÉFINIT f DE TAILLE $n=1$ ET D'ALPHABET

$q_1 = |V|$ PAM (EN CONSIDÉRANT $V = \{0, \dots, |V|-1\} = A_1 = X$) $\forall x, y \in A_1 : y \in f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in A$. $\square$

REMARQUE : DÉTERMINISTE = GRAPHE DE DEGRÉ SORTANT 1.

= CHAQUE COMPOSANTE CONNEXE EST UN CYCLE + DES ARBRES.

THÉORÈME [BRIDoux ET AL 2024] : $\forall f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n : \exists g: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$ ET $w \in [n]^*$ TEL QUE $f = g_w$ (SÉQUENTIALISATION). FAUX POUR ALPHABETS DE TAILLE $\neq 3$.

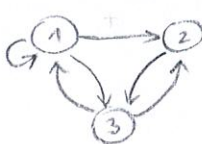
EXEMPLE : $n=2$ $f_1(x) = x_2$ $f_2(x) = x_1$ (SWAP) 01 11 0

DEVIENT $g_1(x) = g_2(x) = x_1 \oplus x_2$ AVEC $w = (1, 2, 1)$

CAR $(x_1, x_2) \xrightarrow{1} (x_1 \oplus x_2, x_2) \xrightarrow{2} (x_1 \oplus x_2, x_1) \xrightarrow{1} (x_2, x_1)$.

INFLUENCE DES NOEUDS DE MISE À JOUR

EXEMPLE :

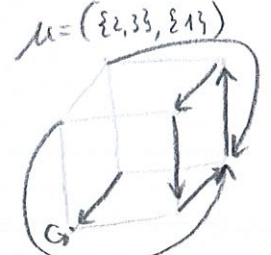
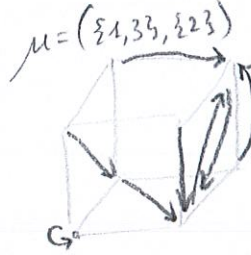
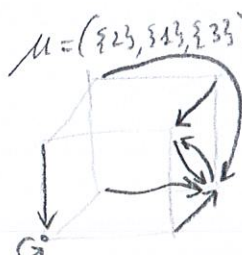


$$f_1(x) = x_1 \vee x_3$$

$$f_2(x) = x_1 \wedge x_3$$

$$f_3(x) = x_1 \oplus x_2$$

BLOC-SÉQUENTIELS :



THÉORÈME [ROBERT 1986] : Soit f un R.A.. Pour tout μ BLOC-SÉQUENTIEL :

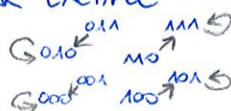
$f_\mu(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$ c'est-à-dire f_μ aura toujours le même ensemble de points fixes. (QUE LE PARALLÈLE)

PREUVE : si $f(x) = x$ alors $\forall i \in [n] : f_i(x) = x_i$ DONC PAR INDUCTION SUR LES SOUS-ÉTAPE DE μ ON AURA $f_\mu(x) = x$.

si $f_\mu(x) = x$ alors, puisque chaque automate est mis à jour EXACTEMENT UNE FOIS, PAR INDUCTION SUR LES SOUS-ÉTAPE DE μ ON AURA $\forall i \in [n] : f_i(x) = x_i$ DONC $f(x) = x$. $\square$

FAUX AU DELÀ DE BLOC SÉQUENTIEL, PAR EXEMPLE UN CYCLE (POSITIF) DE TAILLE 3

AVEC $\mu = (\{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\})$ DONNE

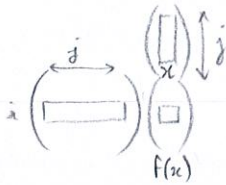


HISTOIRE ET APPLICATIONS

• RÉSEAU DE NEURONES : McCulloch et Pitts 1943

↳ UN RÉSEAU DE NEURONES FINI PEUT CALCULER N'IMPORTE QUELLE FONCTION LOGIQUE
+ THÈSE DE CHURCH-TURING ...

FONCTION BOOLEENNE À SEUIL : $\forall i \in [n] : f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j \in [n]} w_{ij} \cdot x_j > \theta_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$



AVEC $w_{ij} \in \mathbb{R}$ (MATRICE $n \times n$) ET $\theta_i \in \mathbb{R}$ (VECTEUR n)

• APPLICATION À LA RÉGULATION GÉNÉTIQUE : KAUFFMAN 1969 (SYNC.), THOMAS 1973 (ASYNC.), 1981 (± FEEDBACK CYCLES).

ACTIVATE → GÈNE

0 → INEXPRIMÉ

1 → EXPRIMÉ (PRODUCTION DE PROTÉINES OU ARN)

POINT FIXE → TYPE CELLULAIRE (PHENOTYPE)

EXEMPLE FAMOUS : ARABIDOPSIS THALIANA, MEIOSIS, ALVAREZ-BUYLA 1998.

RELATIONS STRUCTURELLES ENTRE G_f ET f_μ (BOOLEEN).

SIGNES DES ARCS ET CYCLES DU GRAPHES D'INTERACTION (BOOLEEN)

DEF: (i, j) POSITIVE si $\exists x \in \{0, 1\}^n : x_i = 0 \text{ et } f_j(x) = 0 < 1 = f_j(x + e_i)$.

(i, j) NÉGATIF si $\exists x \in \{0, 1\}^n : x_i = 1 \text{ et } f_j(x) = 0 < 1 = f_j(x - e_i)$.

UN CYCLE DE G_f EST POSITIF (RES. NÉGATIF) S'IL CONTIENT UN NOMBRE PAIR (RES. IMPAIR) D'ARCS NÉGATIFS.

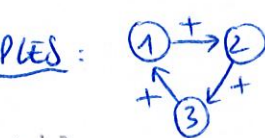
⚠ LES SIGNES SONT NON-EXCLUSIFS -

SIGNES SIMPLES : FONCTIONS LOCALES MONOTONES, R.A. (LOCALEMENT) MONOTONE.

⚠ $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ MONOTONE POUR L'ORDRE PARTIEL $\leq$ EST BEAUCOUP PLUS FORT

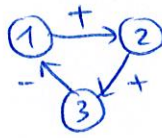
$(\forall x, y : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$: THM DE KNASTER-TARSKI : L'ENSEMBLE DES POINTS FIXES EST UN SEMI-LATIS COMPLET.

EXEMPLES :



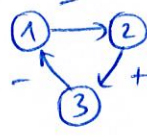
000	000
100	010
010	001
110	011
001	100
101	110
011	101
111	111

2 PF
2 CL PÉRIODE 3



100	
110	
101	
111	
000	
010	
001	
011	

1 CL PÉRIODE 6
1 CL PÉRIODE 2



110	
100	
111	
101	
010	
000	
001	
011	
001	

2 PF
2 CL PÉRIODE 3

INTUITION :

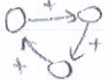
POSITIF (PAIR)
= BON POUR LES
POINTS - FIXES

THÉORÈME [THOMAS 1981, RICHARDSON 2007, MORAL SEVE 2012]
CONJECTURE ASYNC. TOUT ANT.

Si f_μ ADMET AU MOINS DEUX POINTS FIXES (MULTI-STATIONNARITÉ)
 ALORS G_f CONTIENT UN CYCLE POSITIF.

THÉORÈME [THOMAS 1981, RICHARDSON 2010]. ($\alpha = \text{ASYNC.}$)
CONJECTURE ASYNC.

Si f_α ADMET UNE CYCLE-LIMITE DE PÉRIODE AU MOINS 2 (OSCILLATION STABLE)
 ALORS G_f CONTIENT UN CYCLE NÉGATIF.

FAUX EN PARALLÈLE : ON A VU QUE  A 2 PF ET 2 CL DE PÉRIODE 3.

PREUVE POUR LE CAS PARALLÈLE : SOIT $x \neq y$ TELS QUE $f(x)=x$ ET $f(y)=y$.

POUR TOUT $i \in [n]$, ON NOTE $\mathcal{N}^+(i)$ L'ENSEMBLE DES VOISINS ENTRAANTS DE i DANS G_f .

SI POUR TOUT $j \in \mathcal{N}^+(i)$ ON A $x_j = y_j$ ALORS $f_i(x) = f_i(y)$.

DONC SI $x_i \neq y_i$ ALORS $f_i(x) \neq f_i(y)$ ET IL EXISTE $j \in \mathcal{N}^+(i)$ TEL QUE $x_j \neq y_j$.
(CONTINUÉ)

4 CAS POSSIBLES :

$$\begin{cases} \hat{x}_j < \hat{y}_i \text{ ET } \hat{x}_j < \hat{y}_j \Rightarrow (j, i) \text{ EST POSITIF} \\ \hat{x}_i < \hat{y}_i \text{ ET } \hat{x}_j > \hat{y}_j \Rightarrow (j, i) \text{ EST NÉGATIF (FLIP)} \\ \hat{x}_i > \hat{y}_i \text{ ET } \hat{x}_j < \hat{y}_j \Rightarrow (j, i) \text{ EST NÉGATIF (FLIP)} \\ \hat{x}_i > \hat{y}_i \text{ ET } \hat{x}_j > \hat{y}_j \Rightarrow (j, i) \text{ EST POSITIF.} \end{cases}$$

(ON EST FORCÉ D'AVOIR AU MOINS UN TEL j (OU APPROCHANT x DE y)).

PUISQUE G_f EST FINI, EN REMONTANT AINSI ON DOIT OBTENIR UN CYCLE

$(x_{i_1}, x_{i_2})(x_{i_2}, x_{i_3}) \dots (x_{i_k}, x_{i_1})$ QUI DOIT TRAVERSER UN NOMBRE PAIR DE FLIPS (DERNIER $x_{i_k} = \text{PREMIER } x_{i_1}$)
(PARALLÈLE)

DONC UN CYCLE POSITIF. $\square$

THÉORÈME [AMACOMA 2008] SOIT $\text{MAXPF}(G)$ LE NOMBRE MAXIMUM DE POINTS FIXES DE f TEL QUE $G_f = G$.
 $\text{MAXPF}(G) \leq 2^{\zeta^+(G)}$ AVEC $\zeta^+(G)$ LE POSITIVE TRANSVERSAL NUMBER (MINIMUM FVS POUR LES CYCLES POSITIFS).

PREUVE : PAR LA PREUVE PRÉCÉDENTE ON A QUE x ET y DIFFÈRENT TOUT LE LONG DU CYCLE POSITIF.

SOIT $V \subseteq [n]$ UN FVS+ ET $g : \{x \mid f(x)=x\} \rightarrow \{0, 1\}^V$.
 $x \mapsto x_V$

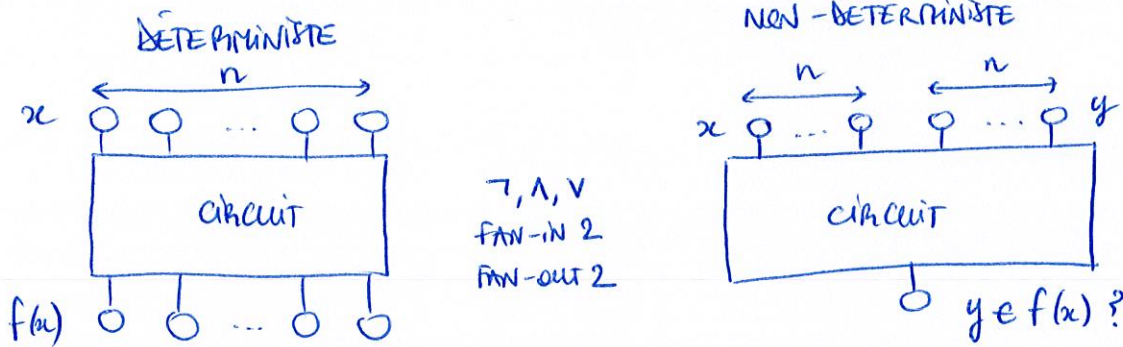
ALORS g EST INJECTIVE CAR $x \neq y \Rightarrow x_V \neq y_V$,

DONC $|\{x \mid f(x)=x\}| \leq |\{0, 1\}^V|$

ET ON OBTIENT LE THM POUR f QUI A $\text{MAXPF}(G)$ POINTS FIXES ET V DE TAILLE $\zeta^+(G)$. $\square$

COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE (BOOLEEN PARALLÈLE)

ENCODER LES FONCTIONS LOCALES AVEC DES CIRCUITS BOOLEENS.



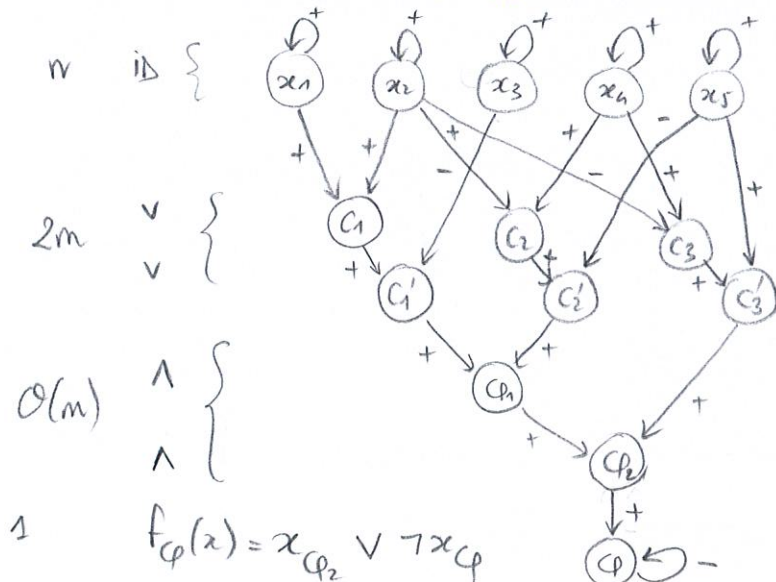
sur $n = \lceil \log_2 |X| \rceil$ BITS (n BITS POUR UN R.A. BOOLEEN DE TAILLE n)

"Succinct Graph Representation"

THÉORÈME [ALON 1985]: ÉTANT UN R.A. BOOLEEN f DE TAILLE n ,
 DÉCIDER SI $\exists x : f(x) = x$ EST NP-COMPLÈT.
 (PIÈCE AVEC LA PROPOSITION $\Delta(G_f) \leq 2$).

PREUVE: SOIT ϕ UNE FORMULE ^{PROPOSITIONNELLE EN 3-CNF (INSTANCE DE 3-SAT)} AVEC LES CLAUSES $C_1, \dots, C_m$ SUR LES VARIABLES $x_1, \dots, x_n$.

ON CONSTRUIT UN R.A.B. AVEC $n + 2m + k + 1$ AUTOMATES.
 AVEC $k \in O(m)$



$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_4 \vee x_5)$$

POUR TOUT x ,
 LES AUTOMATES $x_1, \dots, x_n$
 ENCODENT UNE VALEUR v FIXE,
 PUIS LE R.A.B. CALCULE $\phi(v)$
 SUR L'AUTOMATE ϕ_k ET CEA

DONNE UN POINT FIXE SI $v = \phi$
 (AUCUN CAS $f_\phi(\tilde{x}) = 1$, ET SINON $f_\phi(\tilde{x}) = \neg \tilde{x}_{q_1}$).

COROLLAIRE: COMPTER LES POINTS FIXES EST #P-COMPLÈT,
 CAR LA RÉDUCTION EST PARCOURABLE.

□

EXERCICE : MONTRER QUE L'EXISTENCE D'UNE PRÉIMAGE (ENTRÉE : f, x) EST NP-COMPLÈTE.

$f_i(x) = c_p(x)$ POUR TOUT $i \in [n]$, ALORS $f^{-1}(1^n)$ EST L'ENSEMBLE DES NOUVEAUX DE c_p . $\square$

THÉORÈME : DÉCIDER SI f EST L'IDENTITÉ EST CONP-COMPLÈTE.

_____ CONSTATE _____

_____ BIJECTIVE _____

PROUVE : DEPUIS UNSAT :

IDENTITÉ : $f_i(x) = x_i \oplus c_p(x)$

CONSTATE : $f_i(x) = c_p(x)$

BIJECTIVITÉ : AVEC $c_p'(x) = c_p(x) \wedge x_{n+1}$ QUI VÉRIFIE $c_p'(0^{n+1}) = 1$

ON FAIT COMME L'IDENTITÉ.

$\square$

THÉORÈME : L'ATTEIGNABILITÉ (ENTRÉE : f, x, y) EST PSPACE-COMPLÈTE.

LA NILPOTENCE ($|\Omega_f| = 1$?) _____

PROUVE : PRÉDUCTION DEPUIS LES AC FINIS PÉRIODIQUES - $\square$

(QUI SONT DES CAS PARTICULIERS DE R.A.)

- PRICE ALSO BOUNDED CHANGEMENT ...

- ENTRÉE G_f ...

- CALCULER G_f ...