Année universitaire 2025/2026

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☒ Session 2 Durée de l'épreuve : 1h
Examen de : M2 Nom du diplôme : Master IMD
Code du module : SMACK2A Libellé du module : Modèles de calcul et systèmes dynamiques (oral de substitution)
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Choisissez un exercice sur les deux.
— 30 minutes de préparation, puis
— 30 minutes de présentation et échange au tableau.
Nous attendons des réponses justifiées et aussi formelles que possible.
Vous pouvez faire appel à des théorèmes vus en cours sans les démontrer (attention à ne pas vous tromper).

Exercice 1. (Réseaux booléens) Un réseau d'automates booléen (RAB) de taille n est une fonction $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, décomposée en fonctions locales $(f_i : \{0,1\}^n \to \{0,1\})_{i \in \{1,\ldots,n\}}$.

1. Définir le graphe d'intéraction G_f d'un RAB f de taille n.
2. Donner le graphe d'intéraction G_g du RAB suivant de taille $n = 3$:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \\ g_2(x) &= x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\ g_3(x) &= 0 \end{aligned}$$

3. Donner tous les points fixes de g.
4. Pour être donné en entrée à un problème de décision, un RAB est encodé par un circuit (ou une collection de n circuits). Donner un circuit (ou une collection de 3 circuits) qui encode le RAB g de la question 2.

Point-fixe	Constant
Entrée : un RAB f de taille n.	**Entrée :** un RAB f de taille n.
Sortie : est-ce qu'il existe $x \in \{0,1\}^n$ telle que $f(x) = x$?	**Sortie :** est-ce qu'il existe $c \in \{0,1\}^n$ telle que pour toute $x \in \{0,1\}^n$ on a $f(x) = c$?

5. Pour $\mathcal{C} = \mathsf{NP}$ ou bien pour $\mathcal{C} = \mathsf{coNP}$, démontrer que Point-fixe est $\mathcal{C}$-complet.
6. Pour $\mathcal{C} = \mathsf{NP}$ ou bien pour $\mathcal{C} = \mathsf{coNP}$, démontrer que Constant est $\mathcal{C}$-complet.
7. Donner la dynamique asynchrone (parfaite) de g.

Exercice 2. (Automates cellulaires) Dans cet exercice, on se place en dimension 1 et on fixe un alphabet $A = \{0,\ldots,k\}$. Pour $c \in A^{\mathbb{Z}}$ et $F : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire, on dit que l'orbite de c est *convergente* sous l'action de F si la suite de configurations $\big(F^t(c)\big)_{t\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $A^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie de Cantor. Quand cette suite est convergente, on note $F^\infty(c)$ sa limite.

1. On choisit dans cette question F égal au shift (*i.e.* $F(c)_z = c_{z+1}$). Trouver une configuration dont l'orbite est convergente et une configuration dont l'orbite n'est pas convergente.
2. Montrer que si c est convergente sous l'action de F alors $F^\infty(c)$ est un point fixe de F (*i.e.* $F\big(F^\infty(c)\big) = F^\infty(c)$).
3. Montrer que l'orbite de c sous l'action de F est convergente si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, la suite d'éléments de A définie par $\big(F^t(c)_z\big)_{t\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.
4. On suppose que F vérifie la propriété $F(c)_z \leq c_z$ pour tout z et toute configuration c. Montrer que l'orbite de n'importe quelle configuration est convergente sous l'action de F.