Année universitaire 2025/2026

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : M2 Nom du diplôme : Master IMD
Code du module : SMACK2A Libellé du module : Modèles de calcul et systèmes dynamiques
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.
Nous attendons des réponses justifiées et aussi formelles que possible.
Vous pouvez faire appel à des théorèmes vus en cours sans les démontrer (attention à ne pas vous tromper).

Exercice 1. (Sous-shifts) Dans tout cet exercice, on se place en dimension 1. On rappelle qu'un sous-shift $X \subseteq B^{\mathbb{Z}}$ est appelé *sofique* s'il est de la forme $X = \overline{\pi}(Y)$ où $Y \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est un sous-shift de type fini, π une fonction de A dans B, et où $\overline{\pi} : A^{\mathbb{Z}} \to B^{\mathbb{Z}}$ désigne la fonction définie par $\overline{\pi}(c)_z = \pi(c_z)$. Pour chaque ensemble de configurations ci-dessous, déterminer si c'est un sous-shift, un sous-shift de type fini, un sous-shift sofique :

1. l'ensemble des $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles qu'il existe au moins un $z \in \mathbb{Z}$ avec $c(z) = 1$;
2. l'ensemble des $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles qu'il existe au plus un $z \in \mathbb{Z}$ avec $c(z) = 1$;
3. l'ensemble des $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, si $c(z) = 1$ alors $c(z-1) = 1$ ou $c(z+1) = 1$;
4. l'ensemble des $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $c(z) = c(z+5)$.

Exercice 2. (Automate cellulaire mystère) Soit $F : A^{\mathbb{Z}^d} \to A^{\mathbb{Z}^d}$ un automate cellulaire de dimension d défini par une fonction locale $f : A^V \to A$. On vous donne la liste des valeurs $f(u)$ lorsque u parcourt A^V : $0,0,0,1,1,0,1,0$. Vous ne connaissez ni A, ni d, ni V, ni l'ordre dans lequel sont listées les valeurs $f(u)$.

1. Est-ce que F peut être surjectif ?
2. Est-ce que F peut être injectif ?

Exercice 3. (Décidabilité) On considère les problèmes de décision suivants pour les automates cellulaires de dimension d :

Point-fixe	Point-périodique
Entrée : une règle locale $f : A^V \to A$	**Entrée :** une règle locale $f : A^V \to A$
Sortie : est-ce qu'il existe $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$ telle que $F(c) = c$?	**Sortie :** est-ce qu'il existe $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$ et $t > 0$ tels que $F^t(c) = c$?

1. Est-ce que ce problème Point-fixe est décidable pour $d = 1$?
2. Est-ce que ce problème Point-fixe est décidable pour $d = 2$?
3. Montrer que le problème Point-périodique est décidable pour tout d.

Exercice 4. (Réseaux booléens XOR) Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$, on définit le réseau booléen $F_G : \{0,1\}^V \to \{0,1\}^V$ par

$$F_G(c)_v = \left(\sum_{v' \in N(v)} c_{v'} \right) \bmod 2$$

où $v \in V$ et $N(v) = \{v' : (v', v) \in E\}$ est le voisinage entrant de v.

1. Soit G le graphe orienté complet sans boucle à 5 sommets (et 20 arcs), calculer $F_G(11000)$ et $F_G(11100)$.
2. Montrer que pour tout graphe orienté G, le graphe d'interaction de F_G est G.
3. Soit $G = (V, E)$ un cycle avec boucle en chaque sommet, *i.e.* $V = \{0, \ldots, n-1\}$ et $E = \{(v,v) : v \in V\} \cup \{(v, v+1 \bmod n) : v \in V\}$. Montrer que F_G n'est pas une bijection.
4. Soit $G = (V, E)$ un chemin avec boucle en chaque sommet, *i.e.* $V = \{0, \ldots, n-1\}$ et $E = \{(v,v) : v \in V\} \cup \{(v, v+1) : 0 \le v \le n-2\}$. Montrer que F_G est une bijection. Quel est le graphe d'interaction de F_G^{-1} ?