

Examen de substitution – Complexité (SINA09B)

Examen oral, sujet B.

Durée : 30 minutes de préparation, puis 30 minutes de présentation.

(Barème indicatif)

Documents : non autorisés.

Rappel :

Master théorème. Soit $a \geq 1, b > 1, c = \log_b a, T(n) = aT(n/b) + f(n)$.

1. Si $f(n) \in \mathcal{O}(n^{c-\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors $T(n) \in \Theta(n^c)$.
2. Si $f(n) \in \Theta(n^c)$, alors $T(n) \in \Theta(n^c \log_b n)$.
3. Si $f(n) \in \Omega(n^{c+\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$, et si $a f(n/b) \leq d f(n)$ pour $d < 1$ et n suffisamment grand, alors $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Exercice 1.

Complexité des algorithmes (6 points)

Soit l'algorithme suivant, où T est un tableau indicé de 1 à n :maximum(T) : retourner maximum4($T, 1, n$)maximum4(T, i, j) :

```

    si  $i == j$  alors retourner  $i$ 
    si  $i+1 == j$  alors retourner  $T[i] > T[j] ? i : j$ 
     $m1 = \text{maximum4}(T, i, i+(j-i)/4)$ 
     $m2 = \text{maximum4}(T, i+(j-i)/4+1, i+2*(j-i)/4)$ 
     $m3 = \text{maximum4}(T, i+2*(j-i)/4+1, i+3*(j-i)/4)$ 
     $m4 = \text{maximum4}(T, i+3*(j-i)/4+1, j)$ 
    si  $T[m1] \geq T[m2]$  et  $T[m1] \geq T[m3]$  et  $T[m1] \geq T[m4]$  alors retourner  $m1$ 
    si  $T[m2] \geq T[m1]$  et  $T[m2] \geq T[m3]$  et  $T[m2] \geq T[m4]$  alors retourner  $m2$ 
    si  $T[m3] \geq T[m1]$  et  $T[m3] \geq T[m2]$  et  $T[m3] \geq T[m4]$  alors retourner  $m3$ 
    si  $T[m4] \geq T[m1]$  et  $T[m4] \geq T[m2]$  et  $T[m4] \geq T[m3]$  alors retourner  $m4$ 

```

1. Quelle est la complexité de l'algorithme maximum? Justifier.
2. Cette complexité est-elle optimale? Justifier.

Exercice 2.

Clique et SAT (14 points)

Soit les deux problèmes de décision suivants.

SATEntrée : une formule propositionnelle φ en forme normale conjonctive.Question : est-ce que φ est satisfaisable?**Clique**Entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.Question : G contient-il une clique (sous-ensemble de sommets tous reliés) de taille k ?

1. Donner un exemple d'instance positive de **Clique** avec 8 sommets et $k = 5$.
2. L'instance de **SAT** suivante est-elle satisfaisable?

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

Nous allons réduire **Clique** à **SAT** (modélisation pour utiliser un solveur-SAT). Étant donnée une instance du problème **Clique**, on définit une variable x_v^i pour chaque $v \in V$ et chaque $i \in \{1, \dots, k\}$.

3. Avec $n = |V|$ et $m = |E|$, donner une expression arithmétique comptant le nombre de variables.

L'interprétation de nos variables est la suivante : le sommet $v \in V$ est sélectionné dans la clique si et seulement si la disjonction $X_v = \bigvee_{i=1}^k x_v^i$ est vraie.

4. Donner une formule $\varphi_{G,k}$ sur ces variables, et argumenter qu'il s'agit bien d'une réduction.