
Théorèmes d'incomplétude de Gödel

1. Système formel et théorèmes de Gödel
2. Preuve **faible** avec l'énoncé de Gödel
3. Preuve **faible** avec l'arrêt
4. Preuve **faible** avec la complexité de Kolmogorov
5. Preuve avec l'énoncé de Rosser

Système formel

Question : qu'est-ce qu'un théorème ?

Réponse :

Système formel

Question : qu'est-ce qu'un théorème ?

Réponse : un énoncé qui admet une démonstration.

Système formel

Question : qu'est-ce qu'un théorème ?

Réponse : un énoncé qui admet une démonstration.

Question : qu'est-ce qu'une démonstration ?

Réponse :

Système formel

Question : qu'est-ce qu'un théorème ?

Réponse : un énoncé qui admet une démonstration.

Question : qu'est-ce qu'une démonstration ?

Réponse : un *raisonnement logique* dans un système formel.

Système formel

Question : qu'est-ce qu'un théorème ?

Réponse : un énoncé qui admet une démonstration.

Question : qu'est-ce qu'une démonstration ?

Réponse : un *raisonnement logique* dans un système formel.

Système formel = formules + axiomes + règles de déduction.

Système formel

Question : qu'est-ce qu'un théorème ?

Réponse : un énoncé qui admet une démonstration.

Question : qu'est-ce qu'une démonstration ?

Réponse : un *raisonnement logique* dans un système formel.

Système formel = formules + axiomes + règles de déduction.

Exemples : Calcul des séquents. [lien](#)
Arithmétique de Presburger. [lien](#)
Arithmétique de Peano. [lien](#)

Système formel

Question : qu'est-ce qu'un théorème ?

Réponse : un énoncé qui admet une démonstration.

Question : qu'est-ce qu'une démonstration ?

Réponse : un *raisonnement logique* dans un système formel.

Système formel = formules + axiomes + règles de déduction.

Exemples : Calcul des séquents. [lien](#)

Arithmétique de Presburger. [lien](#)

Arithmétique de Peano. [lien](#)

- **Démonstration** = arbre/séquence de formules.
- **Démonstration vérifiable algorithmiquement.**
- **Ensemble des preuves/théorèmes récursivement énumérable.**

Système formel

Question : qu'est-ce qu'un théorème ?

Réponse : un énoncé qui admet une démonstration.

Question : qu'est-ce qu'une démonstration ?

Réponse : un *raisonnement logique* dans un système formel.

Système formel = formules + axiomes + règles de déduction.

Exemples : Calcul des séquents. [lien](#)

Arithmétique de Presburger. [lien](#)

Arithmétique de Peano. [lien](#)

- **Démonstration** = arbre/séquence de formules.
- **Démonstration vérifiable algorithmiquement.**
- **Ensemble des preuves/théorèmes récursivement énumérable.**

Le système formel qui correspond à « **toutes les mathématiques** » est la **théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZF)**. [lien](#)
...et l'**axiome du choix (ZFC)** ?



* « Nous ne saurons pas », en latin.

Vrai $\stackrel{?}{=}$ Prouvable
Procédure mécanique ?
Entscheidungsproblem

Théorèmes d'incomplétude de Gödel

Définitions. Soit F un système formel.

F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.

F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.

F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent.

 démontrer un énoncé faux $\not\Rightarrow$ incohérent.

Théorèmes d'incomplétude de Gödel

Définitions. Soit F un système formel.

F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.

F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.

F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent.

 démontrer un énoncé faux $\not\Rightarrow$ incohérent.

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **cohérent et complet**.

Théorèmes d'incomplétude de Gödel

Définitions. Soit F un système formel.

F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.

F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.

F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent.

 démontrer un énoncé faux \nRightarrow incohérent.

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **cohérent et complet**.

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) faible.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Théorèmes d'incomplétude de Gödel

Définitions. Soit F un système formel.

F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.

F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.

F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent.

 démontrer un énoncé faux \nRightarrow incohérent.

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **cohérent et complet**.

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) faible.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Théorème d'incomplétude de Gödel (2nd).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas démontrer sa propre cohérence** (sauf s'il est incohérent).

Théorèmes d'incomplétude de Gödel

Définitions. Soit F un système formel.

F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.

F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.

F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent.

⚠️ démontrer un énoncé faux $\not\Rightarrow$ incohérent.

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **cohérent et complet**.

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) faible.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Théorème d'incomplétude de Gödel (2nd).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas démontrer sa propre cohérence** (sauf s'il est incohérent).

- Impossible à patcher... **ZFC est incomplet** 🙌🙌🙌. [lien](#)

Preuve faible avec l'énoncé de Gödel

F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.

F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.

F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve 1.

Preuve faible avec l'énoncé de Gödel

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve 1. Arithmétisation des métamathématiques $g : \text{formules} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$g(\langle\langle (\exists x)(x = sy) \rangle\rangle) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9$$

Preuve faible avec l'énoncé de Gödel

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve 1. Arithmétisation des métamathématiques $g : \text{formules} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$g(\langle\langle (\exists x)(x = sy) \rangle\rangle) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9$$

$\langle\langle (\forall x)(\neg \text{demo}(x, z)) \rangle\rangle \equiv$ il n'existe pas de démonstration de $g^{-1}(z)$.

$\langle\langle \text{sub}(y, 13, y) \rangle\rangle \equiv g$ de $g^{-1}(y)$ où $\langle\langle y \rangle\rangle$ est remplacé par $g^{-1}(y)$.

Preuve faible avec l'énoncé de Gödel

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve 1. Arithmétisation des métamathématiques $g : \text{formules} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$g(\langle\langle \exists x \rangle\rangle(x = sy)) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9$$

$\langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, z)) \equiv$ il n'existe pas de démonstration de $g^{-1}(z)$.

$\langle\langle \text{sub}(y, 13, y) \rangle\rangle \equiv g$ de $g^{-1}(y)$ où $\langle\langle y \rangle\rangle$ est remplacé par $g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}g(\langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, \text{sub}(y, 13, y)))) &= n \\G = \langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, \text{sub}(n, 13, n))) & \\g(G) &= \text{sub}(n, 13, n)\end{aligned}$$

Preuve faible avec l'énoncé de Gödel

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve 1. Arithmétisation des métamathématiques $g : \text{formules} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$g(\langle\langle \exists x \rangle\rangle(x = sy)) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9$$

$\langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, z)) \equiv$ il n'existe pas de démonstration de $g^{-1}(z)$.

$\langle\langle \text{sub}(y, 13, y) \rangle\rangle \equiv g$ de $g^{-1}(y)$ où $\langle\langle y \rangle\rangle$ est remplacé par $g^{-1}(y)$.

$$g(\langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, \text{sub}(y, 13, y)))) = n$$

$$G = \langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, \text{sub}(n, 13, n)))$$

$$g(G) = \text{sub}(n, 13, n)$$

$G \equiv$ il n'existe pas de démonstration de G .

Preuve faible avec l'énoncé de Gödel

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve 1. Arithmétisation des métamathématiques $g : \text{formules} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$g(\langle\langle \exists x \rangle\rangle(x = sy)) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9$$

$\langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, z)) \equiv$ il n'existe pas de démonstration de $g^{-1}(z)$.

$\langle\langle \text{sub}(y, 13, y) \rangle\rangle \equiv g$ de $g^{-1}(y)$ où $\langle\langle y \rangle\rangle$ est remplacé par $g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}g(\langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, \text{sub}(y, 13, y)))) &= n \\G = \langle\langle \forall x \rangle\rangle(\neg \text{demo}(x, \text{sub}(n, 13, n))) & \\g(G) &= \text{sub}(n, 13, n)\end{aligned}$$

$G \equiv$ il n'existe pas de démonstration de G .

Si F **complet** alors...
prouve $G \Rightarrow$ prouve $\neg G \Rightarrow$ **incohérent** \Rightarrow **incorrect**.
prouve $\neg G \Rightarrow$ prouve G ? oui \Rightarrow **incohérent**,
non \Rightarrow **incorrect**.

Preuve faible avec l'arrêt

F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.

F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.

F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve 2.

Preuve faible avec l'arrêt

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve 2. **Correct et complet** \Rightarrow problème de l'**arrêt décidable** \nexists . \square

Preuve faible avec la complexité de Kolmogorov

F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.

F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.

F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Preuve faible avec la complexité de Kolmogorov

- F cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) faible.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut pas être à la fois **correct et complet**.

Définition. La complexité de Kolmogorov-Chaitin de $x \in \{0,1\}^*$ est la **taille du plus court programme** \downarrow donnant x en sortie, **notée $K(x)$** .

Gödel's Theorem and Information, Gregory J. Chaitin.

International Journal of Theoretical Physics 21(12), 1982. [doi-link](#)

Preuve 3.

Preuve faible avec la complexité de Kolmogorov

- F cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) faible.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut pas être à la fois **correct et complet**.

Définition. La complexité de Kolmogorov-Chaitin de $x \in \{0,1\}^*$ est la **taille du plus court programme** \downarrow donnant x en sortie, **notée** $K(x)$.

Gödel's Theorem and Information, Gregory J. Chaitin.

International Journal of Theoretical Physics 21(12), 1982. [doi-link](#)

Preuve 3.

Paradoxe de Berry. « Le plus petit entier positif qui n'est pas définissable en moins de seize mots ».

Preuve faible avec la complexité de Kolmogorov

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Définition. La complexité de Kolmogorov-Chaitin de $x \in \{0,1\}^*$ est la **taille du plus court programme** \downarrow donnant x en sortie, **notée** $K(x)$.

Gödel's Theorem and Information, Gregory J. Chaitin.

International Journal of Theoretical Physics 21(12), 1982. [doi-link](#)

Preuve 3.

Paradoxe de Berry. « Le plus petit entier positif qui n'est pas définissable en moins de seize mots ».

Lemme. Si F est cohérent alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in \{0,1\}^*$, l'énoncé « $K(x) > \alpha$ » **n'est pas démontrable**.

Preuve faible avec la complexité de Kolmogorov

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Définition. La complexité de Kolmogorov-Chaitin de $x \in \{0,1\}^*$ est la **taille du plus court programme** \downarrow donnant x en sortie, **notée** $K(x)$.

Gödel's Theorem and Information, Gregory J. Chaitin.

International Journal of Theoretical Physics 21(12), 1982. [doi-link](#)

Preuve 3.

Paradoxe de Berry. « Le plus petit entier positif qui n'est pas définissable en moins de seize mots ».

Lemme. Si F est cohérent alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in \{0,1\}^*$, l'énoncé « $K(x) > \alpha$ » **n'est pas démontrable**.

Fin. Pourtant il est parfois **vrai**.

Preuve faible avec la complexité de Kolmogorov

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}) **faible**.

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **correct et complet**.

Définition. La complexité de Kolmogorov-Chaitin de $x \in \{0,1\}^*$ est la **taille du plus court programme** \downarrow donnant x en sortie, **notée $K(x)$** .

Gödel's Theorem and Information, Gregory J. Chaitin.

International Journal of Theoretical Physics 21(12), 1982. [doi-link](#)

Preuve 3.

Paradoxe de Berry. « Le plus petit entier positif qui n'est pas définissable en moins de seize mots ».

Lemme. Si F est cohérent alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in \{0,1\}^*$, l'énoncé « $K(x) > \alpha$ » **n'est pas démontrable**.

Fin. Pourtant il est parfois **vrai**. Si F complet alors **incorrect**. \square

Le lemme de Chaitin

Lemme. Si F est cohérent alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in \{0,1\}^*$, l'énoncé « $K(x) > \alpha$ » n'est pas démontrable.

Le lemme de Chaitin

Lemme. Si F est cohérent alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in \{0,1\}^*$, l'énoncé « $K(x) > \alpha$ » n'est pas démontrable.

Fixons α arbitrairement, et supposons qu'il existe une preuve de « $K(x) > \alpha$ ». Soit w la plus courte de ces preuves, pour $z \in \{0,1\}^*$.

Le lemme de Chaitin

Lemme. Si F est cohérent alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in \{0,1\}^*$, l'énoncé « $K(x) > \alpha$ » n'est pas démontrable.

Fixons α arbitrairement, et supposons qu'il existe une preuve de « $K(x) > \alpha$ ». Soit w la plus courte de ces preuves, pour $z \in \{0,1\}^*$.

Alors l'algorithme suivant donne z en sortie: énumérer toutes les preuves de F jusqu'à rencontrer une preuve de « $K(x) > \alpha$ », et donner ce x en sortie.

Le lemme de Chaitin

Lemme. Si F est cohérent alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in \{0,1\}^*$, l'énoncé « $K(x) > \alpha$ » n'est pas démontrable.

Fixons α arbitrairement, et supposons qu'il existe une preuve de « $K(x) > \alpha$ ». Soit w la plus courte de ces preuves, pour $z \in \{0,1\}^*$.

Alors l'algorithme suivant donne z en sortie: énumérer toutes les preuves de F jusqu'à rencontrer une preuve de « $K(x) > \alpha$ », et donner ce x en sortie.

La longueur de ce programme est $c + \log \alpha$, donc on a :

1. « $K(z) > \alpha$ » est démontrable.
2. « $K(z) \leq c + \log \alpha$ » est vrai... ⚠ et démontrable.

Quand $\alpha \geq c + \log \alpha$, on conclut que F est incohérent. □

Le lemme de Chaitin

Lemme. Si F est cohérent alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in \{0,1\}^*$, l'énoncé « $K(x) > \alpha$ » n'est pas démontrable.

Fixons α arbitrairement, et supposons qu'il existe une preuve de « $K(x) > \alpha$ ». Soit w la plus courte de ces preuves, pour $z \in \{0,1\}^*$.

Alors l'algorithme suivant donne z en sortie: énumérer toutes les preuves de F jusqu'à rencontrer une preuve de « $K(x) > \alpha$ », et donner ce x en sortie.

La longueur de ce programme est $c + \log \alpha$, donc on a :

1. « $K(z) > \alpha$ » est démontrable.
2. « $K(z) \leq c + \log \alpha$ » est vrai... ⚠ et démontrable.

Quand $\alpha \geq c + \log \alpha$, on conclut que F est incohérent. □

Chaitin: «If a theorem contains more information than a given set of axioms, then it is impossible for the theorem to be derived from the axioms.»

Preuve avec l'énoncé de Rosser

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **cohérent et complet**.

Preuve 4. *Rosser's Theorem via Turing machines*, Scott Aaronson. [Blog](#), 2011.

Preuve avec l'énoncé de Rosser

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **cohérent et complet**.

Preuve 4. *Rosser's Theorem via Turing machines*, Scott Aaronson. [Blog](#), 2011.

$$g(\langle\langle(\forall x)[\text{demo}(x, \text{sub}(y, 13, y)) \Rightarrow (\exists z < x)(\text{demo}(z, \neg\text{sub}(y, 13, y)))]\rangle\rangle) = n$$

$$R = \langle\langle(\forall x)[\text{demo}(x, \text{sub}(n, 13, n)) \Rightarrow (\exists z < x)(\text{demo}(z, \neg\text{sub}(n, 13, n)))]\rangle\rangle$$

$$g(R) = \text{sub}(n, 13, n)$$

$R \equiv$ pour toute démonstration de R , il existe une réfutation plus courte.

Preuve avec l'énoncé de Rosser

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **cohérent et complet**.

Preuve 4. *Rosser's Theorem via Turing machines*, Scott Aaronson. [Blog](#), 2011.

$$g(\langle\langle(\forall x)[\text{demo}(x, \text{sub}(y, 13, y)) \Rightarrow (\exists z < x)(\text{demo}(z, \neg\text{sub}(y, 13, y)))]\rangle\rangle) = n$$
$$R = \langle\langle(\forall x)[\text{demo}(x, \text{sub}(n, 13, n)) \Rightarrow (\exists z < x)(\text{demo}(z, \neg\text{sub}(n, 13, n)))]\rangle\rangle$$
$$g(R) = \text{sub}(n, 13, n)$$

$R \equiv$ pour toute démonstration de R , il existe une réfutation plus courte.

Si F **complet** alors... prouve R ? prouve $\neg R$? dans les deux cas on cherche parmi les preuves plus courtes...

Preuve avec l'énoncé de Rosser

- F **cohérent** = on ne peut jamais démontrer φ et $\neg\varphi$.
- F **complet** = pour toute φ on peut démontrer φ ou $\neg\varphi$.
- F **correct** = φ démontrable implique φ vraie. \Rightarrow cohérent

Théorème d'incomplétude de Gödel (1^{er}).

Tout système formel contenant l'arithmétique de Peano ne peut **pas** être à la fois **cohérent et complet**.

Preuve 4. *Rosser's Theorem via Turing machines*, Scott Aaronson. [Blog](#), 2011.

$$g(\langle\langle(\forall x)[\text{demo}(x, \text{sub}(y, 13, y)) \Rightarrow (\exists z < x)(\text{demo}(z, \neg\text{sub}(y, 13, y)))]\rangle\rangle) = n$$

$$R = \langle\langle(\forall x)[\text{demo}(x, \text{sub}(n, 13, n)) \Rightarrow (\exists z < x)(\text{demo}(z, \neg\text{sub}(n, 13, n)))]\rangle\rangle$$

$$g(R) = \text{sub}(n, 13, n)$$

$R \equiv$ pour toute démonstration de R , il existe une réfutation plus courte.

Si F **complet** alors... prouve R ? prouve $\neg R$? dans les deux cas on cherche parmi les preuves plus courtes...

incohérent. 🤪

