
Examen – Calculabilité avancée (SINB40A)

Durée : 2 heures*(Barème indicatif)***Documents :** non autorisés**Exercice 1.***Réductions (10 points)*Soient Σ un alphabet fini, $A \subseteq \Sigma^*$ et $B \subseteq \Sigma^*$.

1. Donner la définition d'une réduction many-one $A \leq_m B$.

Soit $X = \{\langle M \rangle \mid \exists w : M(w) \downarrow\}$ l'ensemble des codes de machines de Turing qui s'arrêtent sur au moins une entrée.

2. Expliquer pourquoi X est semi-décidable.

On rappelle que $L_{aab} = \{\langle M \rangle \mid M(aab) \downarrow\}$ n'est pas décidable.

3. Utiliser ce rappel pour démontrer à l'aide d'une réduction que X n'est pas décidable.
4. En déduire que le complémentaire de X n'est pas semi-décidable, en justifiant vos affirmations (sans utiliser de résultat vu en cours, ou bien en le démontrant).

Soit $Y = \{\langle M \rangle \mid \exists w, v : M(w) \downarrow \text{ et } M(v) \uparrow\}$ l'ensemble des codes de machines de Turing qui s'arrêtent sur au moins une entrée et ne s'arrêtent pas sur au moins une entrée.

5. Est-ce que Y est décidable? Justifier.

Exercice 2. *λ -calcul (3 points)*Rappel : un λ -terme $t = (\lambda x.t')$ se β -réduit en $t'[x := t'']$, et peut être α -converti en $t[x := y]$.

$$n = \lambda f.\lambda x.(f \dots (f x) \dots)$$

$$* = \lambda m.\lambda n.\lambda f.(m (n f))$$

1. β -réduire le λ -terme suivant : $* \ 0 \ 4$.
2. Proposer un λ -terme dont la β -réduction ne termine pas.

Exercice 3.*Complexité de Kolmogorov (3 points)*

1. Donner une définition de la complexité de Kolmogorov, notée $K : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{N}$ il existe $x \in \{0, 1\}^*$ tel que $K(x) > c$.

Suite au verso \odot

Exercice 4.*Automate cellulaire élémentaire (4 points)*

On s'intéresse dans cet exercice aux automates cellulaires en dimension $d = 1$, avec deux états $Q = \{0, 1\}$ et voisinage $(-1, 0, 1)$ (la cellule elle-même et ses deux plus proches voisines), et plus particulièrement à la règle numéro 30.

1. Donner la règle locale de l'automate cellulaire élémentaire 30.
2. Donner les 6 premières étapes de l'exécution de la règle 30 à partir de la configuration initiale c qui contient une unique cellule dans l'état 1 et toutes les autres dans l'état 0 :

$$\cdots \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \cdots$$

Formellement, $c \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ est définie par $c(0) = 1$ et $c(i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

On s'intéresse maintenant à la suite des états de la cellule en position 0 au cours de l'évolution à partir de c . Formellement, soit $(s_t)_{t \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $s_t = (F_{30}^t(c))(0)$ où $F_{30} : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ est la fonction globale associée à la règle 30. La *fondation Wolfram* propose des prix pour les démonstrations des réponses aux questions suivantes :

- Question 1 (\$10 000) : est-ce que la suite $(s_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est ultimement périodique ? C'est-à-dire, est-ce qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $t \geq d$ on a $s_t = s_{t+p}$?
- Question 2 (\$10 000) : est-ce que les états 0 et 1 apparaissent en moyenne aussi souvent

l'un et l'autre dans $(s_t)_{t \in \mathbb{N}}$? C'est-à-dire, est-ce que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=0}^{n-1} s_t}{n} = \frac{1}{2}$?

3. Expliquer pourquoi, si l'on parvient à démontrer que la réponse à la première question est « oui », alors on pourra également répondre à la seconde question et gagner \$20 000.