
DM 01 – Un langage ni semi-décidable ni co-semi-décidable

Consignes :Travail individuel.

Toutes vos réponses doivent être justifiées.

À rendre le mercredi 25 mars 2026.

Exercice 1.Rappels : le langage $L_H = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \downarrow\}$ n'est pas décidable. $M(w) \uparrow$ signifie que la machine M ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée w , $M(w) \downarrow$ signifie que la machine M s'arrête quand on la lance sur l'entrée w , ϵ désigne le mot vide.

Soient les langages :

$$L'_H = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \uparrow\},$$

$$L_\infty = \{\langle M \rangle \mid \exists w : M(w) \uparrow\},$$

$$L'_\infty = \{\langle M \rangle \mid \forall w : M(w) \downarrow\}.$$

Le théorème de Rice est habituellement formulé sur les ensembles de mots acceptés par les machines (leur langage) et pas sur les ensembles de mots sur lesquels elles s'arrêtent (comme L_∞), mais il peut immédiatement être généralisé à toute propriété sémantique (arrêt ou acceptation) non-triviale. On note $H(M) = \{w \mid M(w) \downarrow\}$.

Théorème de Rice version arrêt : pour toute propriété P non-triviale pour l'arrêt, le langage $L_P = \{\langle M \rangle \mid H(M) \in P\}$ est indécidable.

1. Utiliser le théorème de Rice version arrêt pour montrer que L_∞ n'est pas décidable.
2. Utiliser le rappel sur L_H pour montrer que L'_H n'est pas semi-décidable.
3. Utiliser la question 2 pour montrer que L_∞ n'est pas semi-décidable (avec une réduction).
4. Utiliser la question 2 pour montrer que L'_∞ n'est pas semi-décidable (avec une réduction).