Examen – Théorie de la complexité (SINB33C)

Durée : 2 heures. *(Barème indicatif)*
Documents : non autorisés.
Important : on vous demande de présenter <u>proprement</u> et <u>clairement</u> vos réponses.
Indications : les questions qui demandent plus de temps à être traitées sont marquées d'un symbole ⋆.

Exercice 1. *Définitions (5 points)*

Vos réponses doivent être <u>précises</u>. Vous pouvez parler de problèmes de décision, ou de langages.

1. Donner les deux définitions de la classe NP.
2. Donner la définition d'une réduction many-one polynomiale, notée $\leq_m^P$.
3. Donner la définition d'un problème NP-difficile, et celle d'un problème NP-complet.
4. Démontrer que si A est NP-difficile et $A \leq_m^P B$ alors B est NP-difficile.

Exercice 2. *Classe* NP *(7 points)*

Hamiltonien
Entrée : Un graphe non orienté $G = (V, E)$ à n sommets.
Question : G possède-t-il un cycle hamiltonien ?

Un *cycle hamiltonien* est un cycle de longueur n parcourant une et une seule fois chaque sommet de G.

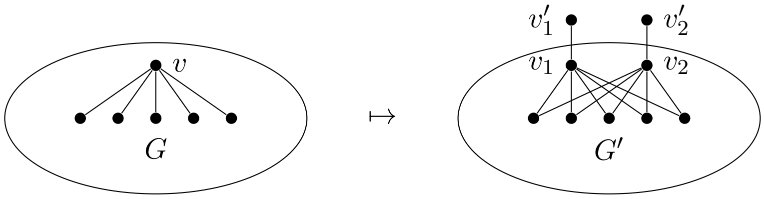
Complétion-Hamiltonienne
Entrée : Un graphe non orienté $G = (V, E)$ à n sommets, et un entier k.
Question : Est-il possible d'ajouter au plus k arêtes à G pour qu'il possède un cycle hamiltonien ?

1. Démontrer que le problème **Complétion-Hamiltonienne** appartient à la classe NP.
2. Sachant que **Hamiltonien** est NP-difficile, démontrer que **Complétion-Hamiltonienne** est NP-difficile. Indication : utiliser la question 4 de l'exercice 1.

Maintenant, on fixe la valeur de k dans l'énoncé du problème (k n'est plus donné en entrée). Pour chaque entier naturel $k \in \mathbb{N}$, on définit ci-dessous un problème de décision.

Complétion-par-k-Hamiltonienne
Entrée : Un graphe non orienté $G = (V, E)$ à n sommets.
Question : Est-il possible d'ajouter au plus k arêtes à G pour qu'il possède un cycle hamiltonien ?

3. ⋆ Démontrer que **Complétion-par-1-Hamiltonienne** est NP-difficile, <u>en présentant proprement</u> une réduction many-one polynomiale depuis **Hamiltonien**. Ne pas oublier de conclure.
Indication : on peut dupliquer un sommet v et ajouter un petit truc à chaque copie, par exemple :



Exercice 3. *Réductions (8 points)*

Ensemble dominant
Entrée : Un graphe non orienté $G = (V, E)$ à n sommets, et un entier k.
Question : G possède-t-il un ensemble dominant de taille au plus k ?

Un *ensemble dominant* est un sous-ensemble de sommets $V' \subseteq V$ tel que tout sommet est soit dans V', soit adjacent à un sommet de V'.

Ensemble dominant d'arêtes
Entrée : Un graphe non orienté $G = (V, E)$ à n sommets, et un entier k.
Question : G possède-t-il un ensemble dominant d'arêtes de taille au plus k ?

Un *ensemble dominant d'arêtes* est un sous-ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ tel que toute arête est soit dans E', soit partage l'une de ses extrémités (ou les deux) avec une arête de E'.

1. $\star$ Démontrer que **Ensemble dominant d'arêtes** $\leq_m^P$ **Ensemble dominant**.
   Indication : les arêtes doivent devenir les sommets.

Nous allons réduire **ensemble dominant d'arêtes** à **SAT** (modélisation pour utiliser un solveur-**SAT**). Étant donnée une instance $G = (V, E)$ et k du problème **ensemble dominant d'arêtes**, on définit une variable x_e^i pour chaque $e \in E$ et chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$.

2. Avec $n = |V|$ et $m = |E|$, donner une expression arithmétique comptant le nombre de variables.

L'interprétation de nos variables est la suivante : l'arête $e \in E$ est sélectionnée dans l'ensemble dominant d'arêtes si et seulement si la disjonction $X_e = \bigvee_{i=1}^{k} x_e^i$ est vraie.

3. Donner des clauses dont la satisfaction impose que pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$, il y a au plus une arête $e \in E$ telle que la variable x_e^i est vraie.
4. Donner le nombre de clauses de votre réponse à la question 3.
5. Donner une formule (pas nécessairement en FNC) dont la satisfaction impose qu'avec notre interprétation des variables, les arêtes sélectionnées forment un ensemble dominant d'arêtes de G.
   Indication : vous pouvez utiliser X_e défini plus haut.
6. Argumenter que la conjonction de vos réponses aux questions 3 et 5 donne une formule $\varphi_{G,k}$ qui est satisfaisable si et seulement si G possède un ensemble dominant d'arêtes de taille au plus k.