DM 02 – Automates cellulaires

Consignes :
Travail individuel.
Toutes vos réponses doivent être justifiées.
À rendre le vendredi 5 avril 2024.

On considère les automates cellulaires élémentaires (ECA) en dimension $d = 1$ à états binaires $Q = \{0, 1\}$, voisins $N = (-1, 0, 1)$, règle locale $f : Q^3 \to Q$ et règle globale $F : Q^{\mathbb{Z}} \to Q^{\mathbb{Z}}$.

Exercice 1. *Densité invariante*

Une configuration $x \in Q^{\mathbb{Z}}$ est *(spatialement) périodique* lorsqu'il existe $w \in Q^*$ tel que $x = (w_1 w_2 \dots w_n)^\omega$. La période de x est $|w| = n$.

1. Montrer que si x a période n, alors $F(x)$ a également période n.

On note $F(w)$ le mot $w'_1 w'_2 \dots w'_n$ tel que $F(x) = (w'_1 w'_2 \dots w'_n)^\omega$. Étant donné un mot $w \in Q^*$, on note $|w|_\ell$ le nombre d'occurrences de l'état $\ell \in Q$ dans w. Un AC est *Q-invariant* lorsque pour toute configuration spatialement périodique $x \in Q^{\mathbb{Z}}$, on a $\forall \ell \in Q : |w|_\ell = |F(w)|_\ell$.

2. Montrer que la règle 90 est $\{0, 1\}$-invariante.
3. Donner une autre règle locale d'ECA qui est $\{0, 1\}$-invariante et différente de l'identité.

Exercice 2. *Chaos déterministe*

Un AC en dimension $d = 1$ est *permutatif-gauche* lorsque pour toutes configurations $x, y \in Q^{\mathbb{Z}}$ égales sauf $x(i) \neq y(i)$ en position $i \in \mathbb{Z}$, on a $F(x)(i+1) \neq F(y)(i+1)$.

1. Montrer que la règle 30 est permutative-gauche.
2. Pour une configuration $x \in Q^{\mathbb{Z}}$, montrer que s'il existe une position $i \in \mathbb{Z}$ avec $\forall j \geq i : x(j) = 0$, alors x possède un antécédent (une préimage) pour la règle 30.

La *distance* entre deux configurations $x, y \in Q^{\mathbb{Z}}$ est $d(x, y) = 2^{-\min\{\, |i| \mid i \in \mathbb{Z} \text{ et } x(i) \neq y(i)\}}$.
Un AC est *sensible aux conditions initiales* (effet papillon) lorsqu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\forall x \in Q^{\mathbb{Z}} : \forall \epsilon > 0 : \exists y \in Q^{\mathbb{Z}} : \exists t \in \mathbb{N} : \quad d(x, y) < \epsilon \text{ et } d(F^t(x), F^t(y)) > \delta$.

3. Montrer que la règle 30 est sensible aux conditions initiales (par exemple avec $\delta = \frac{1}{2}$).