Examen – Calculabilité (SIN6U05L)

Durée : 2 heures *(Barème indicatif)*
Documents : non autorisés

Exercice 1. *Définitions (5 points)*

1. Donner l'automate d'une machine de Turing avec alphabet d'entrée $\Sigma = \{a, b\}$, qui s'arrête uniquement sur l'entrée aba (et sur aucune autre entrée).
2. À quelle condition un langage $A \subseteq \Sigma^*$ est-il dit **sémi-décidable** ?
3. À quelle condition un langage $A \subseteq \Sigma^*$ est-il dit **décidable** ?
4. Qu'est-ce qu'une **réduction** de $A \subseteq \Sigma^*$ vers $B \subseteq \Sigma^*$?
5. Donner un exemple de **propriété non triviale**, en justifiant. Compléter la phrase suivante sur ce que l'on peut alors conclure en appliquant le théorème de Rice :
« *Il n'existe pas de machine de Turing prenant en entrée .... et décidant si ....* »

Exercice 2. *Machine de Turing (7 points)*
Soit le langage $L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ contenant les mots non-vides de longueur multiple de quatre et dont les deux premières lettres sont différentes de l'avant dernière lettre :
$L_2 = \{w_1 w_2 \dots w_n \in \{a, b\}^* \mid (n \geq 1) \text{ et } (n \equiv 0 \mod 4) \text{ et } (w_1 \neq w_{n-1}) \text{ et } (w_2 \neq w_{n-1})\}$.

1. Donner deux mots de $\{a, b\}^*$ appartenant à L_2.
2. Donner deux mots de $\{a, b\}^*$ n'appartenant pas à L_2.
3. Donner l'automate d'une machine de Turing qui **décide** le langage L_2.
4. Donner l'exécution de votre machine sur l'entrée $abab$ (donc en partant de $q_0 abab \vdash \dots$).

Exercice 3. *Réduction sans justification (2 points)*
Rappel : $L_{\bar{u}} = \{(\langle M \rangle, w) \mid w \notin L(M)\}$ contient les couples (code de M, mot w) tels que la machine M n'accepte pas le mot w. Soit $L_3 = \{\langle M \rangle \mid abab \notin L(M)\}$.

1. Proposer une fonction calculable pour montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_3$.
(Dans cette question, on vous demande de définir proprement votre transformation, sans justifier l'équivalence de la réduction.)

Exercice 4. *Réduction (6 points)*
Rappel : $L_{halte} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon)\downarrow\}$ contient les codes des machines de Turing dont l'exécution, partant du mot vide (avec 0 lettre), s'arrête. Soit $L_4 = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$.

1. Montrer que $L_{halte\epsilon} \leq_m^T L_4$. Justifier.
2. Le langage $L_{halte\epsilon}$ est-il décidable ? semi-décidable ?
3. Que peut-on déduire sur L_4 à partir des réponses précédentes ?

Exercice 5. *Bonus (2 points)*

✎ Le langage L_4 de l'exercice précédent est-il semi-décidable ? Justifier.