# INTRODUCTION.

MODÈLES TRÈS SIMPLES POUR CAPTURER DES PHÉNOMÈNES FONDAMENTAUX DE LA NATURE.

RÉSULTATS TRÈS ÉLÉGANTS MAIS DE NOMBREUX ÉLÉMENTS SONT ENCORE INCOMPRIS.

CONSÉQUENCE : MOTIVATIONS PHYSIQUES SÉRIEUSES ET INTERPRÉTATIONS DOUTEUSES.

SÉRIEUX
- ▷ TREMBLEMENTS DE TERRE
- ▷ KRACHS BOURSIER
- ▷ "THE AGE OF THE UNTHINKABLE".
- ▷ TROUBLES CIVILS

DOUTEUX

MOT CLÉ : SELF-ORGANIZED CRITICALITY ($\emptyset$ DEFINITION).

PROBLÈME : ON GARDE LES IDÉES POUR EXPLIQUER N'IMPORTE QUOI.

DONC NOUS EN RESTERONS AUX MATHS.

L'IDÉE DU COURS : SIMULATEUR (COMPORTEMENT) + FORMALISME (OUTILS POUR EXPLIQUER LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DISCRETS)

# LE MODÈLE BTW2D

BAK, TANG ET WIESENFELD (1987). (PHYSICIENS).

SIMULATEUR

DAVID PERKINSON
- GRILLE 200 x 200
- CODE COULEUR + RÈGLE (PARALLÈLE) + BORDS.

**DEFINITION BTW 2D :** SUPPORT : $S = [\![ 0 ; l-1 ]\!]^2$

CONFIGURATION : $c : S \to \mathbb{N}$ (ON PEUT ÉTENDRE À $\mathbb{Z}$ QUAND ÇA NOUS ARRANGE)

ENSEMBLE DES CONFIGURATIONS : $\mathcal{C} = \mathbb{N}^S = \mathbb{N}^{[\![ 0 ; l-1 ]\!]^2}$

UNE RÈGLE LOCALE (APPLIQUÉE EN PARALLÈLE) : SI $c(i,j) \geq 4$ ALORS $c \to c'$ AVEC

DÉTERMINISTE

$(i,j)$ ÉBOULÉ, TIRÉ.

- ▷ $c'(i,j) = c(i,j) - 4$
- ▷ $c'(i,j+1) = c(i,j+1) + 1$ (NORD)
- ▷ $c'(i+1,j) = c(i+1,j) + 1$ (EST)
- ▷ $c'(i,j-1) = c(i,j-1) + 1$ (SUD)
- ▷ $c'(i-1,j) = c(i-1,j) + 1$ (OUEST)

SYSTÈME DYNAMIQUE DISCRET : $(\mathcal{C}, \to)$.

**REMARQUE :** INCOHÉRENCE PHYSIQUE : LA QUANTITÉ $c(i,j)$ EST UN MÉLANGE DE :
- ▷ HAUTEUR (NOMBRE DE GRAINS) QUAND ON DONNE À SES VOISINS
- ▷ PENTE (DIFF. DE NBRE DE GRAINS) QUAND ON TEST SI UN SITE S'ÉBOULE.

(LES GRAINS PEUVENT "SAUTER")

MAIS ON EST PAS LÀ POUR FAIRE DE LA MAÇONNERIE.

**REMARQUE :** C'EST UN "GENRE" D'AC :
- ▷ PROBLÈME SUPPORT FINI ⟶ ÉTAT ABSORBANT SUR LE CONTOUR.
- ▷ NBRE D'ÉTATS ∞ ⟶ ON PEUT SE RAMENER À UN NOMBRE FINI D'ÉTATS EN AJOUTANT LES GRAINS UN À UN.

ON A LE PLUS IMPORTANT : UNE RÈGLE LOCALE : SUIVANT MON ÉTAT ET CELUI DE MES VOISINS, JE SAIS DE FAÇON DÉTERMINISTE DANS QUEL ÉTAT JE SERAIS.

---

SIMULATEUR

- 50 000 GRAINS AU CENTRE : À QUOI VA RESSEMBLER LA CONFIGURATION STABLE ? EST-CE QUE LA DYNAMIQUE VA ÊTRE "COMPLIQUÉE" ?
- RALENTIR ET +10 000 GRAINS AU CENTRE.
- 4 PARTOUT ? 5 PARTOUT ?

TOUT ÇA EST INCOMPRIS : ON NE SAIT PAS EXPLIQUER LA FORME FINALE À PARTIR DE LA RÈGLE LOCALE.

---

**PARADIGME :** RÈGLE LOCALE "SIMPLE" ⟶ COMPORTEMENT GLOBAL "COMPLEXE"

**DÉFINITION :** $c$ EST UNE CONFIGURATION STABLE SSI $\forall i,j : c(i,j) < 4$.

$\xrightarrow{*}$ EST LA CLÔTURE RÉFLEXO-TRANSITIVE DE $\rightarrow$ :

$$c \xrightarrow{*} c' \text{ ssi } c = c' \text{ ou } \exists c_0, \dots, c_k : c \rightarrow c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_k \rightarrow c'.$$

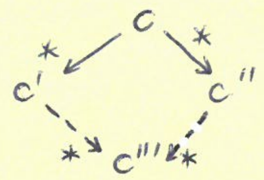
$\equiv$ EST LA CLÔTURE SYMÉTRIQUE DE $\xrightarrow{*}$ :

$$c \equiv c' \text{ ssi } c = c' \text{ ou } \exists c_0, \dots, c_k : \quad c \rightarrow c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_k \rightarrow c'$$
$$\text{ou } c' \rightarrow c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_k \rightarrow c.$$

$\equiv$ EST UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE (RÉFLEXIVE, SYMÉTRIQUE, TRANSITIVE). DEUX CONFIGURATIONS SONT DANS LA MÊME CLASSE SSI ON PEUT PASSER DE L'UNE À L'AUTRE PAR UNE SUITE D'ÉBOULEMENTS / D'ANTI-ÉBOULEMENTS.

$c^{\circ}$ EST LA CONFIGURATION STABLE OBTENUE À PARTIR DE $c$ (STABILISATION).

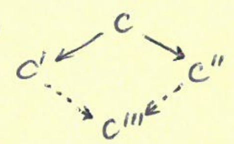
**PROPRIÉTÉ :** Dans le mode séquentiel (au plus un éboulement par transition), BTW2D est convergent : si $c \xrightarrow{*} c'$ et $c \xrightarrow{*} c''$ alors $\exists c'''$ : $c' \xrightarrow{*} c'''$ et $c'' \xrightarrow{*} c'''$.



**COROLLAIRE :** Quel que soit le mode de mise à jour (raisonnable : toutes ~~tirées~~ appliquées ∞ souvent), on arrive à la même configuration stable $c^\circ$.

**PREUVE :** ① Terminaison : ∄ chaîne infinie $c_0 \to c_1 \to c_2 \to \dots$

② Propriété du diamant : si $c \to c'$ et $c \to c''$ avec $c' \neq c''$ alors $\exists c'''$ : $c' \to c'''$ et $c'' \to c'''$



(Attention : diamant $\not\Rightarrow$ convergence : $\longleftarrow \circlearrowright \longrightarrow$).

③ Terminaison et propriété du diamant $\Rightarrow$ convergence.

⚠ : → séquentiel !

① Par l'absurde : supposons qu'$\exists c$ telle que ça ne termine pas.
- nombre fini de cellules $\Rightarrow$ une cellule est tirée ∞ souvent.
- nombre fini de grains $\Rightarrow$ ce n'est pas une cellule voisine du bord (car perte d'au moins un grain à chaque éboulement).

$\Rightarrow$ ce n'est pas une cellule à distance 2 du bord (sinon sa voisine du bord est tirée ∞ souvent).

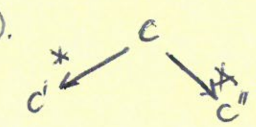
$\Rightarrow$ etc (par induction sur la distance au centre), aucune cellule ne peut être tirée ∞ souvent.

Donc $\nexists c$ telle que ça ne termine pas.

② Si deux cellules peuvent être tirées, alors l'éboulement de l'une n'empêchera jamais l'éboulement de l'autre :

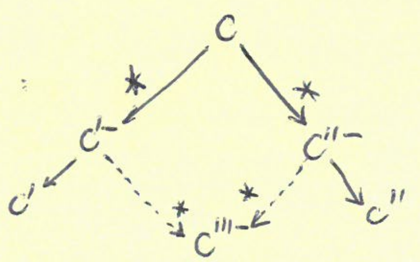
si $c \xrightarrow{(i,j)} c'$ et $c \xrightarrow{(i',j')} c''$ $(c' \neq c'' \Rightarrow (i,j) \neq (i',j'))$

alors $\exists c'''$ : $c' \xrightarrow{(i',j')} c'''$ et $c'' \xrightarrow{(i,j)} c'''$

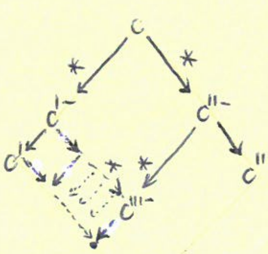
③. 

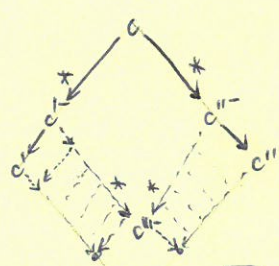
induction sur la longueur de la plus longue évolution.
- si 0, ok (on reste sur la même config)
- induction :

Hypothèse d'induction :



Par induction sur $c'^- \overset{*}{\dashrightarrow} c'''^-$, en utilisant la propriété du diamant :





+ 1 diamant. □

# STRUCTURE ALGÉBRIQUE

SIMULATEUR

- AJOUTS DE 10.000 GRAINS À DES POSITIONS ALÉATOIRES (PAREIL QUE +1,+1,+1,...)
ON VA DE CONFIG STABLE EN CONFIG STABLE

**DÉFINITION :** ENSEMBLE DES CONFIGURATIONS STABLES $\mathcal{C}_{STAB}$.

OPÉRATION $\oplus$ : $c \oplus c' = (c+c')^\circ$ AVEC $c+c'=c''$ où $\forall i,j : c''(i,j)=c(i,j)+c'(i,j)$.

**THÉORÈME :** $(\mathcal{C}_{STAB}, \oplus)$ EST UN MONOÏDE COMMUTATIF.

**DÉFINITIONS**

GROUPE [ MONOÏDE [ SEMIGROUPE [ CLÔTURE, ASSOCIATIVITÉ ] IDENTITÉ ] INVERSE ]
+ COMMUTATIVITÉ.

**PREUVE :**
- CLÔTURE : ÉVIDENT
- ASSOCIATIVITÉ : $c \oplus (c' \oplus c'') = (c \oplus c') \oplus c''$ (CAR $= (c \oplus c' \oplus c'')^\circ$ : $(c+(c'+c'')^\circ)^\circ$ ET $((c+c')^\circ + c'')^\circ$ MÊME GENRE DE PREUVE QUE CONVERGENCE)
- ÉLÉMENT IDENTITÉ : $\forall c \in \mathcal{C}_{STAB} : c \oplus ALL\emptyset = c$.
- COMMUTATIVITÉ : PAR LA COMMUTATIVITÉ DE L'ADDITION +.

SIMULATEUR

- ON CONTINUE À AJOUTER ...
ON A 1. DES CONFIGURATIONS QU'ON NE VA PLUS VOIR
2. DES CONFIGURATIONS QU'ON VA VOIR $\infty$ SOUVENT AVEC PROBA $> \emptyset$.

**DÉFINITION :** $\underbrace{\mathcal{C}_{REC}}_{\text{ENSEMBLE DES CONFIGS RÉCURRENTES}} = \{ c \in \mathcal{C}_{STAB} \mid \underbrace{\forall c' \in \mathcal{C}}_{\text{DEPUIS N'IMPORTE QUELLE CONFIG}} : \underbrace{\exists c'' \in \mathcal{C} : c' \oplus c'' = c}_{\text{ON PEUT RETOMBER DESSUS EN AJOUTANT DES GRAINS ET EN STABILISANT}} \}$

(TOUS EN MÊME TEMPS OU UN PAR UN : REVIENT AU M)

- UNE CONFIG NON RÉCURRENTE ? ALL∅
- UNE CONFIG RÉCURRENTE ? ALL3.
- UNE CONFIG RÉCURRENTE TYPIQUE ? AJOUT DE GRAINS ALÉATOIREMENT ET STABILISER.
- EST-CE QUE $(ALL4)^\circ$ EST RÉCURRENTE ?

**THÉORÈME :** (DHAR, 1990) $(\mathcal{C}_{REC}, \oplus)$ EST UN GROUPE ABÉLIEN (COMMUTATIF).

**PREUVE :**
- ASSOCIATIVITÉ : IDEM
- COMMUTATIVITÉ : IDEM
- CLÔTURE : À PARTIR D'UNE CONFIG DE $\mathcal{C}_{REC}$, ON NE PEUT ATTEINDRE QUE DES CONFIGS DE $\mathcal{C}_{REC}$ EN AJOUTANT DES GRAINS.

SOIT $c \in \mathcal{C}_{REC}$. $\forall \dot{c} \in \mathcal{C}$ : $c \oplus \dot{c} = \ddot{c}$ AVEC $\ddot{c}$ RÉCURRENTE ?

"REC" POUR COLLER À L'ÉNONCÉ DE CLÔTURE

oui. $\forall c' \in \mathcal{C} : \exists c'' \in \mathcal{C} : c' \oplus c'' = c$.

pour $c$

$$\Rightarrow (c' \oplus c'') \oplus \dot{c} = c \oplus \dot{c}$$

$\downarrow$ assoc. $\quad\downarrow$ def

$$\Rightarrow c' \oplus \underbrace{(c'' \oplus \dot{c})}_{\in \mathcal{C}} = \ddot{c}$$

donc $\ddot{c} \in \mathcal{C}_{rec}$.

(on voit que dans la def de $\mathcal{C}_{rec}$, on peut se restreindre à $\mathcal{C}_{stab}$)

il nous reste à voir :

- identité : $e$ tel que $\forall c \in \mathcal{C}_{rec} : c \oplus e = c$.
- inverse. $\forall c \in \mathcal{C}_{rec} : \exists c^{-1} \in \mathcal{C}_{rec} : c \oplus c^{-1} = e$

**IDENTITÉ ? MAIS ALLO $\notin \mathcal{C}_{rec}$ !**

---

SIMULATEUR

- $e$ pour $200 \times 200$ (pas bien compris $\Rightarrow$ long à calculer).
- test de $e$ : 1. on prend une $\mathcal{C}_{rec}$ (comment ? ALL3 + quelques grains)
  2. on ajoute $e$ (pause)
  3. on stabilise
- $e$ pour différentes tailles :

---

- carré 2 au centre ?
- formes fractales ?
- forme limite quand $l \to \infty$ ?
  (stabilité des frontières entre motifs, et résolution $\nearrow$).

Prouvé :

- grille rectangulaire : $e = \boxed{\quad | \ 2 \ | \quad}$ . (Labri Bordeaux + LIX école Polytech) Yvan Le Borgne Dominique Rossin.
- 2011 Levine : $\boxed{N}^{\circ}$ a une forme limite (technique EDP) $\rightarrow$ article à lire ?

Preuve identité et inverse :

**Lemme 1** : si $M$ est un semigroupe commutatif, alors $J = \bigcap_{\substack{I \subset M \\ I \text{ idéal}}} I$ est un groupe abélien.

**Lemme 2** : $\mathcal{C}_{rec} = \bigcap_{\substack{I \subset \mathcal{C}_{stab} \\ I \text{ idéal}}} I$ .

**Définition** : idéal = idéal gauche et droit. $I$ idéal droit de $S$

$\Leftrightarrow IS \subseteq I$ avec $IS = \{is \mid i \in I \text{ et } s \in S\}$.

idéal minimal : pour l'inclusion.

## PREUVE DU LEMME 1 :

① J EST UN IDÉAL : $J \oplus M = \left(\bigcap_{\substack{I \subset M \\ I \text{ idéal}}} I\right) \oplus M \overset{I \text{ idéal}}{\subseteq} \left(\bigcap_{\substack{I \subset M \\ I \text{ idéal}}} I\right) = J$.

ET IL EST MINIMAL PAR DEF.

② SOIT $x \in J$, ALORS $x \oplus J = J$, CÀD $\boxed{\Pi_x : \begin{array}{l} J \to J \\ y \mapsto x \oplus y \end{array} \text{ EST UNE PERMUTATION}}$

$\subseteq$ : J EST UN IDÉAL ET $x \in J$ DONC $x \oplus J \subseteq J$

$\supseteq$ : $x \oplus J$ EST UN IDÉAL : $(x \oplus J) \oplus M = x \oplus (J \oplus M) \underset{J \text{ idéal}}{\subseteq} x \oplus J$

ET COMME J EST L'IDÉAL MINIMAL, ON A $J \subseteq x \oplus J$.

▷ EXISTENCE IDENTITÉ :

$\Pi_x$ EST UNE PERMUTATION DONC $\exists n \geq 1$ TEL QUE $\forall y \in J : \Pi_x^n(y) = y$.

UNE PERMUTATION EST UN ENSEMBLE DE CYCLES → PPCM.

DONC $nx \oplus y = y$ POUR TOUT $y \in J$ CÀD $e = nx$ EST UN ÉLÉMENT IDENTITÉ.

(ET $nx \in J$ CAR J EST UN IDÉAL).

▷ UNICITÉ IDENTITÉ :

SI $e'$ EST AUSSI IDENTITÉ ALORS $e = e \oplus e' = e'$.

▷ EXISTENCE INVERSE :

$x^{-1} = (n-1)x$ CAR $x \oplus x^{-1} = nx = e$.

▷ UNICITÉ INVERSE :

SI $x^{-1\prime}$ AUSSI INVERSE DE $x$ ALORS $x \oplus x^{-1} = e = x \oplus x^{-1\prime}$

$$\Rightarrow \boxed{x^{-1} \oplus} (x \oplus x^{-1}) = \boxed{x^{-1} \oplus} (x \oplus x^{-1\prime})$$
$$\Rightarrow (x^{-1} \oplus x) \oplus x^{-1} = (x^{-1} \oplus x) \oplus x^{-1\prime}$$
$$\Rightarrow e \oplus x^{-1} = e \oplus x^{-1\prime}$$
$$\Rightarrow x^{-1} = x^{-1\prime}$$

## PREUVE LEMME 2 :

COMME ON PEUT AJOUTER PLUSIEURS FOIS, ÇA NE CHANGE RIEN DE PRENDRE $\mathcal{C}_{STAB}$.

$$\mathcal{C}_{REC} = \{ c \in \mathcal{C}_{STAB} \mid \forall c' \in \mathcal{C}_{STAB} : \exists c'' \in \mathcal{C}_{STAB} : c' \oplus c'' = c \}$$

$\mathcal{C}_{REC}$ EST UN IDÉAL DE $\mathcal{C}_{STAB}$ : $c' \in \mathcal{C}_{REC}$ ET $c'' \in \mathcal{C}_{STAB}$.

$\mathcal{C}_{REC}$ EST L'IDÉAL MINIMAL ? PAR DEFINITION OUI (CAR SINON ON POURRAIT EN SORTIR SI ON PARTAIT D'UN $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}_{REC}$).

ET L'IDÉAL POUR L'INCLUSION EST UNIQUE (ON A UN TREILLIS). □

THÉORÈME GROUPE ABÉLIEN.

## CONFIGURATIONS RÉCURRENTES :

OUVERT : (ÉTANT DONNÉE UNE CONFIG, EST-ELLE RÉC ?) EST NC OU P-COMPLET ?

NC ↑ CALCULABLE EFFICACEMENT EN PARALLÈLE.
(GENRE DE P / NP-COMPLET).

### - MOTIFS INTERDITS :

$\begin{array}{|c|c|}\hline \emptyset & \emptyset \\ \hline\end{array}$ (LEQUEL A ÉTÉ TIRÉ LE DERNIER ?)

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \emptyset & 1 & \emptyset \\ \hline\end{array}$ (TIRAGE D'UNE EXTRÉMITÉ ET PAS AU MILIEU → A $\boxed{\emptyset\emptyset}$ DANS ~~POUR~~ ANTÉCÉDENT)

$\begin{array}{cc} \emptyset & 1 \\ & \emptyset \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} & \emptyset & \\ \emptyset & 3 & \emptyset \\ & \emptyset & \end{array}$ (...)

### - BURNING TEST :

~~SOIT~~ POUR $c \in \mathcal{C}_{STAB}$, SOIT $a_{(i,j)}c$ LA CONFIGURATION STABLE OBTENUE À PARTIR DE C EN AJOUTANT UN GRAIN À L'INDICE $(i,j)$.

ON A $a^4_{(i,j)} = a_{(i,j+1)}\, a_{(i+1,j)}\, a_{(i,j-1)}\, a_{(i-1,j)}$ (C'EST DIFFÉRENT SUR LES BORDS)

D'OÙ
$$\prod_{(i,j)\in S} a^4_{(i,j)} = \prod_{(i,j)\in S} a^{n(i,j)}_{(i,j)}$$
AVEC $n(i,j) = \#\{\text{VOISINS DE } (i,j)\}$.

$$\Rightarrow \prod_{(i,j)\in S} a^{4-n(i,j)}_{(i,j)}$$
EST UN OPÉRATEUR IDENTITÉ (TIRER PARTOUT 1 FOIS) :

$$\beta = \prod_{(i,j)\in S} a^{4-n(i,j)}_{(i,j)}\, ALL\emptyset \equiv ALL\emptyset \equiv e$$
"BURNING CONFIGURATION."
(BORD = 1 ; COIN = 2).

**TEST :** $c \in \mathcal{C}_{REC}$ SSI $c \oplus \beta = c$.

(CHAQUE CELLULE DOIT ÊTRE TIRÉE EXACTEMENT UNE FOIS, DONC ON PEUT LE PROGRAMMER RELATIVEMENT EFFICACEMENT, MAIS NC OU P-COMPLET ?)

---

SIMULATEUR

- BURNING CONFIG POUR TESTER LA RÉCURRENCE.

---

# CALCULER $e$ :

①. POUR TOUTES LES CONFIGS DE $\mathcal{C}_{REC}$, TESTER.

②. POUR TOUTE $c \in \mathcal{C}_{REC}$, $\exists n : (nc)^\circ = e$. (CF PREUVE EXISTENCE $e$).

③. $(2\,\mathrm{ALL}3 - (2\,\mathrm{ALL}3)^\circ)^\circ = e$

(i) $2\,\mathrm{ALL}3$ ET $(2\,\mathrm{ALL}3)^\circ$ SONT DANS LA $\hat{=}$ CLASSE D'ÉQ $\Rightarrow$ DIFFÉRENCE DANS LA CLASSE DE $e$.
(ii) $2\,\mathrm{ALL}3 = \mathrm{ALL}6$ ET $(2\,\mathrm{ALL}3)^\circ$ : $\leqslant 3$ PARTOUT $\Rightarrow$ $2\,\mathrm{ALL}3 - (2\,\mathrm{ALL}3)^\circ$ : $\geqslant 3$ PARTOUT
$\Rightarrow$ CE TRUC EST REC.
(i) ET (ii) $\Rightarrow$ CE TRUC EST $e$.

④. BURNING ALGORITHM :

$\beta \equiv \mathrm{ALL}0 \equiv e$ DONC $e \equiv 2\beta \equiv 3\beta \equiv \dots$.

ON CONSTRUIT UNE SUITE DE CONFIGURATIONS : $c_0 = \mathrm{ALL}0$
$c_{i+1} = (c_i + \beta)^\circ$.

QUAND $c_{i+1} = c_i$, C'EST QUE $c_i = e$.

# EXTENSION À TOUT GRAPHE (OU PRESQUE)

GRAPHE À N SOMMETS : MATRICE "LAPLACIENNE" ~~D'ADJACENCE~~ (DE TAILLE N×N) $\Delta$.
AVEC $\Delta_{ij} = -$ NBRE D'ARCS DE $i$ À $j$.
$\Delta_{ii}$ = SEUIL CRITIQUE, SI $c(i) > \Delta_{ii}$
ALORS $c(j) \to c(j) - \Delta_{ij}$
POUR TOUT $j$.
(PAR DÉFAUT : $d^\circ_{OUT}(i) - 1$).
(ET LAPLACIENNE SI $d^\circ_{OUT}(i)$)

EXEMPLE DE GRAPHE (AVEC PUITS) 5 SOMMETS. 

LA MATRICE DOIT VÉRIFIER :

1. $\forall i : \Delta_{ii} > 0$ (SINON ÇA NE TERMINE PAS)
2. $\forall i \neq j : \Delta_{ij} \leqslant 0$ (NÉCESSAIRE À LA COMMUTATIVITÉ).
3. $\forall i : \sum_j \Delta_{ij} \geqslant 0$ (PAS DE CRÉATION DE GRAINS).
4. $\exists i : \sum_j \Delta_{ij} > 0$ (SOMMET DISSIPATIF)
5. DANS LE GRAPHE, POUR TOUT SOMMET IL EXISTE UN CHEMIN DIRIGÉ VERS UN SOMMET DISSIPATIF (NÉCESSAIRE À LA TERMINAISON).

SIMULATEUR

- $e$ SUR GRILLE HEXA (HONEYCOMB.)

# 1D : UNE DIMENSION $\longrightarrow$ SLIDES.