Faculté des Sciences Aix-Marseille Université

Année universitaire 2022/2023

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : M2 Nom du diplôme : Master IMD
Code du module : SMACUA4 Libellé du module : Modèles de calcul et systèmes dynamiques
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. On attend des réponses justifiées et aussi formelles que possible.

Définition. On dit qu'un système dynamique F sur un espace X est *nilpotent* s'il existe un temps $t \in \mathbb{N}$ tel que F^t est une fonction constante.

Exercice 1. (Réseaux d'automates et systèmes dynamiques finis)

1. Décrivez en une ou deux phrases à quoi ressemble le graphe de transition d'un système dynamique déterministe nilpotent.
2. Soit $f = \{f_0, f_1, f_2\}$ le réseau d'automates booléens de taille 3 tel que $f_0(x) = x_0 \vee \neg(x_1 \oplus x_2)$, $f_1(x) = \neg x_0 \wedge (x_1 \vee x_2)$ et $f_2(x) = (x_0 \oplus x_1) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2)$, où x est une configuration de $\{0,1\}^3$ et $\oplus$ est l'opérateur booléen du ≪ ou exclusif ≫ tel que $a \oplus b = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$. Soit $\pi = (\{0,1,2\})$ le mode de mise à jour parallèle. Montrez que le système dynamique (f, π) est nilpotent.
3. Montrez que si un réseau d'automate $f : X^n \to X^n$ a un graphe d'interaction G_f acyclique, alors tout système dynamique fondé sur lui et un mode de mise à jour ≪ *raisonnable* ≫ (exécutant la mise à jour de chaque automate un nombre infini de fois) est nilpotent.
4. La question précédente induit que la présence d'un cycle dans le graphe d'interaction d'un réseau d'automates est nécessaire pour que son système dynamique soit non-nilpotent lorsque le réseau est soumis à un mode de mise à jour ≪ raisonnable ≫. Considérons ici les réseaux d'automates booléens évoluant selon le mode de mise à jour parallèle. On distingue classiquement dans ces réseaux les cycles positifs (nombre pair d'arcs négatifs) et les cycles négatifs (nombre impair d'arcs négatifs). Montrez que la présence d'un cycle positif (resp. d'un cycle négatif) n'est pas suffisante pour la non-nilpotence.

Considérons à présent le réseau d'automates booléens f défini par :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_0(x) & = & x_1 \\ f_1(x) & = & x_0 \\ f_2(x) & = & x_0 \vee \neg x_3 \\ f_3(x) & = & \neg x_1 \wedge x_2 \end{pmatrix}$$

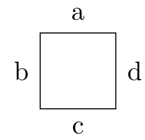
5. Dessinez le graphe d'interaction signé de f.
6. Soit $\pi = (\{0,1,2,3\})$ le mode de mise à jour parallèle associé à f. Dessinez le graphe de transition de (f, π). Le système dynamique (f, π) est-il nilpotent ?
7. Soit $\mu = (\{2,3\}, \{0,1\})$ une partition ordonnée définissant un mode de mise à jour bloc-séquentiel de f. Sans calculer (f, μ), montrez que $(f, \mu) = (f, \pi)$.
8. À quelle classe de complexité algorithmique appartient le problème suivant : étant donnés deux réseaux d'automates booléens f et g de taille n, existe-t-il un mode de mise à jour bloc-séquentiel μ tel que $(f, \mu) = (g, \pi)$? avec $\pi = (\{0, 1, \dots, n-1\})$ le mode de mise à jour parallèle de taille n.

Exercice 2. (Automates cellulaires et nilpotence)

On considère ici la définition de nilpotence donnée au début du sujet, plus faible que celle donnée en cours.

1. Montrer que si F est un automate cellulaire nilpotent d'indice t sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, alors $F^t(x)$ est une configuration constante pour tout $x \in A$. C'est à dire qu'il existe $a \in A$ et $t \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, F^t(x) = a^{\mathbb{Z}}$.
2. On note σ la translation par une lettre vers la gauche. Décrire une configuration $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ qui soit σ-transitive, c'est à dire telle que $\overline{\{\sigma^i(x) | \, i \in \mathbb{Z}\}} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.
3. En déduire que si F est un automate cellulaire tel que $\exists a \in A, \forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \exists t \in \mathbb{N}, F^t(x) = a^{\mathbb{Z}}$, alors F est nilpotent.

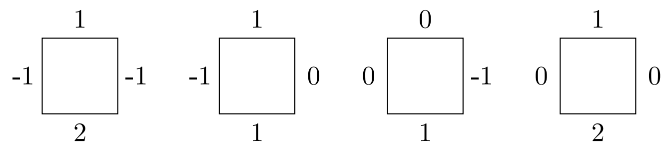
Exercice 3. (Un pavage apériodique) Soit $q \in Q$, on dit qu'un jeu de tuile *multiplie par* q si pour toute tuile étiquetée comme suit,



l'équation suivante est vérifiée

$$aq + b = c + d.$$

Intuitivement, elle dit le nombre du bas est le nombre du haut multiplié par q, avec des retenues sur les côtés.
Soit T_2 le jeu de tuiles suivant :

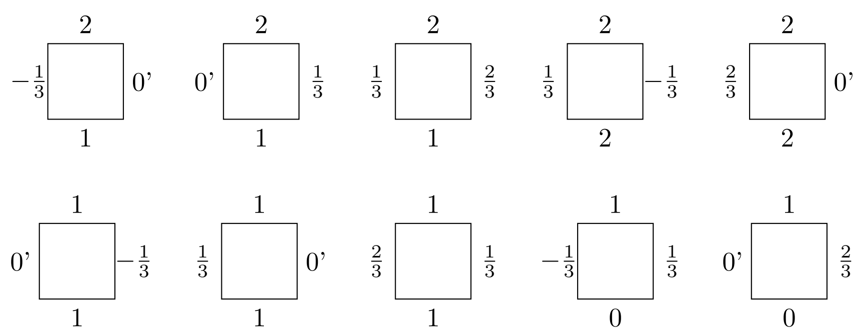


1. Montrer que T_2 multiplie par 2.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle *représentation équilbrée de* α la suite $B(\alpha)$ définie par $B(\alpha)_i = \lfloor \alpha i \rfloor - \lfloor \alpha(i-1) \rfloor$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $k \leq \alpha \leq k+1$. Quelles valeurs peut prendre $B(\alpha)_i$?
3. Montrer que si T_2 pave une ligne infinie de hauteur 1 dont les couleurs du haut sont exactement la suite $B(\alpha)$ avec $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, alors la suite de couleurs du bas est la suite $B(2\alpha)$.

Soit $T_{2/3}$ le jeu de tuiles suivant :



On admettra les résultats suivants :
— $T_{2/3}$ multiplie par $\frac{2}{3}$
— si $T_{2/3}$ pave une ligne infinie de hauteur 1 dont les couleurs du haut est $B(\alpha)$ avec $\alpha \in [1, 2]$, alors la suite de couleurs du bas est $B(\frac{2}{3}\alpha)$.

On pose $T = T_2 \cup T_{2/3}$, jeu de tuile introduit par Jarkko Kari en 1996. On rappelle qu'un pavage $c \in T^{\mathbb{Z}^2}$ est *faiblement périodique* de vecteur $\vec{u} \in \mathbb{Z}^2$ si $\forall \vec{v} \in \mathbb{Z}^2$, $c_{\vec{v}-\vec{u}} = c_{\vec{v}}$. Un pavage c est *fortement périodique* s'il possède deux vecteurs de périodicité décrivant un carré : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \vec{v} \in \mathbb{Z}^2$, $c_{\vec{v}-(n,0)} = c_{\vec{v}-(0,n)} = c_{\vec{v}}$. On admet le lemme suivant :

Lemme. *Si le jeu de tuile τ pave le plan de manière faiblement périodique, alors τ pave le plan de manière fortement périodique.*

4. Montrer qu'aucun pavage par T n'est faiblement périodique.

Soit la fonction $f : (\frac{2}{3}, 2] \to (\frac{2}{3}, 2]$ définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

5. Montrer que f est surjective.
6. En déduire qu'il existe un pavage du plan valide par T.