

---

**TD 06 – Révisions**


---

**Durée :** 2 heures.

**Documents :** non-autorisés.

**Exercice 1.***Définitions*

- Rappeler les sept éléments qui constituent une machine de Turing.
- Pour une machine de Turing  $M$ , que signifie  $L(M)$ ?
- Pour une machine de Turing  $M$  et un mot  $w$ , que signifie  $M(w) \uparrow$ ?
- Qu'est-ce qu'un langage non décidable?
- Qu'est-ce qu'un langage non semi-décidable?
- Donner la définition de  $L_1 \leq_m^T L_2$  avec  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  et  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ .
- Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux, en justifiant.
  - La famille des langages décidables est close par complémentation.
  - La famille des langages semi-décidables est close par complémentation.
- Au théorème de Rice, qu'est-ce qu'une propriété? Donner un exemple de propriété triviale.

**Exercice 2.***Machines de Turing*

Donner l'automate d'une machine de Turing qui décide chacun des langages suivants.

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \exists w' \in \{b\}^* : w = aaw'cc \text{ et } |w'| \equiv 1 \pmod{2}\}$
- $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w_1w_2 \dots w_k \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k-2 : w_iw_{i+1}w_{i+2} \neq aab\}$

**Exercice 3.***Réductions*

Rappels :

- $L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid w \in L(M)\}$  et  $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid w \notin L(M)\}$
- $L_{\text{halt}\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \downarrow\}$  et  $L_{\overline{\text{halt}\epsilon}} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \uparrow\}$ , avec  $\epsilon$  le mot vide

- Pour chacun de ces quatre langages, indiquer s'il est :  
 décidable     non décidable     semi-décidable     non semi-décidable
- Soit  $L_1 = \{\langle M \rangle \mid M(aab) \uparrow\}$ , démontrer que  $L_{\overline{\text{halt}\epsilon}} \leq_m^T L_1$ . Que peut-on en déduire?
- Soit  $L_2 = \{\langle M \rangle \# w \mid ww \in L(M)\}$ , démontrer que  $L_u \leq_m^T L_2$ . Que peut-on en déduire?
- Soit  $L'_2 = \{\langle M \rangle \# ww \mid w \in L(M)\}$ , démontrer que  $L_u \leq_m^T L'_2$ . Que peut-on en déduire?
- Soit  $L_3 = \{\langle M \rangle \# w \mid aw \in L(M) \text{ et } bw \notin L(M)\}$ . Conjecturez-vous que le langage  $L_3$  est décidable ou non? semi-décidable ou non? Proposer une réduction pour le démontrer.

**Exercice 4.***Réductions?*

Rappel : le langage  $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid w \notin L(M)\}$  n'est pas semi-décidable.

- Est-ce que  $L_{\bar{u}} \leq_m^T L^- = \{\langle M \rangle \mid aaa \notin L(M) \text{ et } aab \notin L(M)\}$ ?  
Si oui, proposer une telle réduction. Justifier.
- Est-ce que  $L_{\bar{u}} \leq_m^T L^+ = \{\langle M \rangle \mid bab \in L(M) \text{ et } bba \in L(M)\}$ ?  
Si oui, proposer une telle réduction. Justifier.