TD 03 – Propriétés de clôture des langages (semi-)décidables

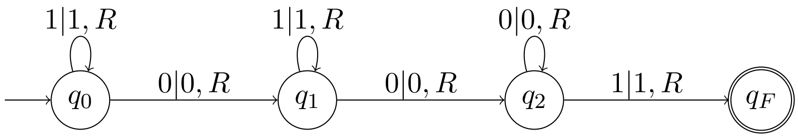
Exercice 1. *(Exercice 5 du TD 02) MT : conventions*

Objectif : voir que l'on peut utiliser d'autres conventions.

1. Peut-on décider exactement les mêmes langages si la tête de lecture est initialement placée sur la case la plus à droite du mot d'entrée ? (Justifier)
2. Peut-on décider exactement les mêmes langages si l'on autorise des transitions pour lesquelles la tête de lecture/écriture ne bouge pas (ni L ni R) ? (Justifier)
3. Peut-on décider exactement les mêmes langages si l'on ajoute la restriction $\Sigma = \{0, 1\}$? Et si en plus $\Gamma = \{0, 1, B\}$? (Justifier)

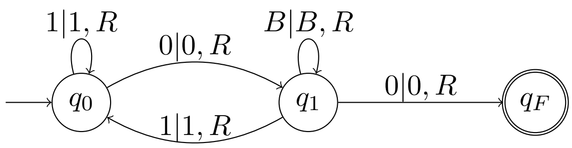
Exercice 2. *Complémentaire*

Soit la machine de Turing M_1 suivante sur l'alphabet d'entrée $\Sigma = \{0, 1\}$.



1. Cette machine de Turing s'arrête-elle sur toute entrée ?
2. Construire une machine de Turing M_1' telles que $L(M_1') = \Sigma^* \setminus L(M_1)$.

Soit la machine de Turing M_2 suivante sur l'alphabet d'entrée $\Sigma = \{0, 1\}$.



3. Construire une machine de Turing M_2' telles que $L(M_2') = \Sigma^* \setminus L(M_2)$.
4. Plus généralement, que penser d'une procédure pour effectuer cette transformation ? (de M à M' telle que $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$)

Exercice 3. *Simulation séquentielle : M_3 simule M_1 puis M_2*

Soit L_1 l'ensemble des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$ (mots qui se lisent identiquement de gauche à droite, et de droite à gauche ; par exemple $abba$ et $abaabbabaabbbaababbaaba$).

Soit $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 2 \mod 5\}$.

1. Donner une machine de Turing M_1 avec alphabet d'entrée Σ, telle que $L(M_1) = L_1$.
2. Donner une machine de Turing M_2 avec alphabet d'entrée Σ, telle que $L(M_2) = L_2$.
3. Construire une machine de Turing M_3 avec alphabet d'entrée Σ qui, pour toute entrée $w \in \Sigma^*$, simule M_1 sur l'entrée w, puis simule M_2 sur l'entrée w, et accepte si et seulement si les deux calculs simulés acceptent, c'est-à-dire si et seulement si $w \in L(M_1) \cap L(M_2)$.

Exercice 4. *Propriétés de clôture ?*

Démontrer ou réfuter chacune des propriétés de clôture suivantes.
Indication : 5 sont correctes et 4 sont incorrectes.

1. Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est décidable si et seulement si L et $\Sigma^* \setminus L$ sont semi-décidables.
2. La famille des langages décidables est close par intersection et union.
3. La famille des langages semi-décidables est close par intersection et union.
4. La famille des langages non décidables est close par intersection et union.
5. La famille des langages non semi-décidables est close par intersection et union.
6. La famille des langages décidables est close par complémentation.
7. La famille des langages semi-décidables est close par complémentation.
8. La famille des langages non décidables est close par complémentation.
9. La famille des langages non semi-décidables est close par complémentation.

Exercice 5. $\langle M \rangle$

Donner le code $\langle M \rangle$ de la machine de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$, d'ensemble d'états $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabets $\Sigma = \{0, 1\}$ et $\Gamma = \{0, 1, B\}$, et dont la fonction de transition est donnée par :

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 1, R)$	$-$	$-$
q_1	$-$	$(q_1, 0, R)$	(q_F, B, L)

Exercice 6. *L'arrêt*

Indiquer si chacun des énoncés qui suit est vrai ou faux, en justifiant.

1. $\nexists M_{halt}, \forall M, \forall w : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.
2. $\forall M, \forall w, \nexists M_{halt} : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.