

Calculabilité : définitions

Kévin PERROT – L3 Info Aix Marseille Université – printemps 2023

Définition. Une **machine de Turing (MT)** déterministe est un 7-uplet $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$

- où
- Q est un ensemble fini : les **états**,
 - Γ est un ensemble fini : l'**alphabet de ruban**,
 - $\Sigma \subset \Gamma$ est l'**alphabet d'entrée**,
 - $\delta : (Q \setminus \{q_F\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ est la **fonction de transition**,
 - $q_0 \in Q$ est l'**état initial**,
 - $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ est le **symbole blanc**,
 - $q_F \in Q$ est l'**état final**.

Définition. Le langage **reconnu** (ou **accepté**) par la MT M est

$$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ et } \iota_w \vdash^* uq_Fv \text{ avec } u, v \in \Gamma^*\}.$$

C'est l'ensemble des mots d'entrée de Σ^* pour lesquels la machine M atteint l'état q_F .

Définition. Un langage est **semi-décidable** (on dit également **récurivement énumérable**) s'il est reconnu par une machine de Turing. Un langage est **décidable**, s'il est reconnu par une machine de Turing qui s'arrête sur toutes les entrées.

ϵ désigne le mot vide. On note $M(w) \downarrow$ lorsque le calcul de M sur w s'arrête, et $M(w) \uparrow$ dans le cas contraire. Si $M(w) \downarrow$ alors on note $M(w)$ le **résultat** du calcul de la MT M sur l'entrée w .

Définition. Une fonction $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ est **calculable** si et seulement si il existe une MT M telle que pour tout $w \in \Sigma^* : f(w) = M(w)$.

Définition. Un ensemble est de taille **finie** s'il contient un nombre fini d'éléments (sa taille est un entier naturel), **infinie dénombrable** s'il est en bijection avec \mathbb{N} , **infinie indénombrable** sinon.

On note $\langle M \rangle$ le **code** de la machine de Turing M .

Théorème. La fonction **halt** : $(\langle M \rangle, w) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } M(w) \uparrow \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas calculable.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe une machine de Turing M_{halt} qui calcule la fonction **halt**. Nous pouvons alors sans difficulté construire la machine M_{diag} suivante :

$$M_{\text{diag}}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } M_{\text{halt}}(i, i) = 0 \\ \uparrow & \text{si } M_{\text{halt}}(i, i) = 1 \end{cases}$$

où \uparrow signifie que M_{diag} entre dans une boucle infinie (et ne termine donc pas). Considérons à présent l'entrée $\langle M_{\text{diag}} \rangle$ donnée à la machine M_{diag} . Deux cas sont possibles.

- Si $M_{\text{diag}}(\langle M_{\text{diag}} \rangle) = 0$ alors, par définition de M_{diag} , nous avons $M_{\text{halt}}(\langle M_{\text{diag}} \rangle, \langle M_{\text{diag}} \rangle) = 0$ ce qui signifie, par définition de M_{halt} , que $M_{\text{diag}}(\langle M_{\text{diag}} \rangle) \uparrow$, une contradiction.
- Si $M_{\text{diag}}(\langle M_{\text{diag}} \rangle) \uparrow$ alors, par définition de M_{diag} , nous avons $M_{\text{halt}}(\langle M_{\text{diag}} \rangle, \langle M_{\text{diag}} \rangle) = 1$ ce qui signifie, par définition de M_{halt} , que $M_{\text{diag}}(\langle M_{\text{diag}} \rangle)$ s'arrête, une contradiction.

Dans les deux cas nous arrivons à une contradiction, donc notre hypothèse de départ est fautive : il n'existe pas de machine de Turing M_{halt} qui calcule la fonction **halt**. \square

Définition. Une **réduction many-one Turing** du langage $A \subseteq \Sigma_A^*$ au langage $B \subseteq \Sigma_B^*$ est une fonction calculable $f : \Sigma_A^* \rightarrow \Sigma_B^*$ telle que pour tout $w \in \Sigma_A^*$ on a $w \in A \iff f(w) \in B$. Lorsqu'une telle fonction f existe on dit que la langage A se réduit au langage B , et l'on note $A \leq_m^T B$.