Année universitaire 2021/2022

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1^er semestre ☐ 2^ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : M2 Nom du diplôme : Master IMD
Code du module : SMACUA4 Libellé du module : Modèles de calcul et systèmes dynamiques
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI

Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. On attend des réponses justifiées et aussi formelles que possible.

On dit qu'un système dynamique F sur un espace X est *nilpotent* s'il existe un temps $t \in \mathbb{N}$ tel que F^t est une fonction constante.

Exercice 1. (Réseaux d'automates et systèmes dynamiques finis)

1. Décrivez en une ou deux phrases à quoi ressemble le graphe de transition d'un système dynamique nilpotent.
2. Soit $f = \{f_0, f_1, f_2\}$ le réseau d'automates booléens de taille 3 tel que $f_0(x) = x_0 \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$, $f_1(x) = x_2 \vee (\neg x_0 \wedge \neg x_1)$ et $f_2(x) = (x_0 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge (x_0 \oplus x_2))$, où x est une configuration de $\{0,1\}^3$ et $\oplus$ est l'opérateur booléen du « ou exclusif » tel que $a \oplus b = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$. Soit $\pi = (\{0,1,2\})$ le mode de mise à jour parallèle. Montrez que le système dynamique (f, π) est nilpotent.
3. Montrez que si un réseau d'automate $f : X^n \to X^n$ a un graphe d'interaction G_f acyclique, alors tout système dynamique fondé sur lui et un mode de mise à jour « *raisonnable* » (exécutant la mise à jour de chaque automate un nombre infini de fois) est nilpotent.
4. La question précédente induit que la présence d'un cycle dans le graphe d'interaction d'un réseau d'automates est nécessaire pour que son système dynamique soit non-nilpotent lorsque le réseau est soumis à un mode de mise à jour « raisonnable ». Considérons ici les réseaux d'automates booléens évoluant selon le mode de mise à jour parallèle. On distingue classiquement dans ces réseaux les cycles positifs (nombre pair d'arcs négatifs) et les cycles négatifs (nombre impair d'arcs négatifs). Montrez que la présence d'un cycle positif (resp. d'un cycle négatif) n'est pas suffisante pour la non-nilpotence. Sur la base de votre raisonnement, déduisez une propriété suffisante sur le graphe d'interaction qui assure la non-nilpotence.

Considérons à présent le réseau d'automates booléens f défini par :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_0(x) & = & x_1 \\ f_1(x) & = & x_0 \\ f_2(x) & = & x_0 \vee \neg x_3 \\ f_3(x) & = & \neg x_1 \wedge x_2 \end{pmatrix}$$

5. Dessinez le graphe d'interaction signé de f.
6. Soit $\pi = (\{0,1,2,3\})$ le mode de mise à jour parallèle associé à f. Dessinez le graphe de transition de (f,π). Le système dynamique (f,π) est-il nilpotent ?
7. Soit $\mu = (\{2,3\},\{0,1\})$ une partition ordonnée définissant un mode de mise à jour bloc-séquentiel de f. Sans calculer (f,μ), montrez que $(f,\mu) = (f,\pi)$.

Exercice 2. (Dynamique topologique)

1. Un système nilpotent est-il équicontinu ? sensible ? expansif ? Justifier (deux des trois justifications peuvent être rapides).
2. Montrer que si F est un automate cellulaire nilpotent sur $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, alors la constante en question est une configuration monochromatique, *i.e.*, $\exists 0 \in A, \exists t \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F^t(x) = {}^\infty 0^\infty$.
3. Décrire une configuration $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ qui soit σ-transitive, *i.e.*, $\overline{\{\sigma^i(x) | i \in \mathbb{Z}\}} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.
4. En déduire que si F est un automate cellulaire tel que $\exists 0 \in A, \forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \exists t \in \mathbb{N}, F^t(x) = {}^\infty 0^\infty$, alors F est nilpotent.

Exercice 3. (Indécidabilité)

Soit $\mathcal{B}$ un alphabet fini. Considérons un *sous-décalage de type fini* défini par $\Sigma := \left\{ x \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^2} \middle| \forall k \in \mathbb{Z}^2, \sigma^k(x)_{|\mathcal{N}} \notin \mathcal{F} \right\}$, où $\mathcal{N} = [\![-l, l]\!]^2$ pour un certain rayon $l \in \mathbb{N}$ et une certaine famille finie $\mathcal{F} \Subset \mathcal{B}^{\mathcal{N}}$ de motifs *interdits*.

1. On considère un nouvel alphabet $\mathcal{A} = \mathcal{B} \sqcup \{\bot\}$, et $f : \mathcal{A}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{A}$ définie par $f(u) = u$ si $u \in \mathcal{B}^{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{F}$, et $f(u) = \bot$ sinon. Soit F (la règle globale de) l'automate cellulaire bidimensionnel de voisinage $\mathcal{N}$ et de règle locale f. Montrer que si $\Sigma \neq \emptyset$, alors F n'est pas nilpotent.

2. Montrer par récurrence sur $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ et $i \in \mathbb{Z}^2$ sont tels que que $F^t(x)_0 \neq \perp$, alors $x_{|i+[\![-lt,lt]\!]^2}$ ne contient pas $\perp$ (*i.e., pour tout* $k \in i + [\![-lt, lt]\!]^2$, $x_k \neq \perp$), ni de motif interdit (*i.e., pour tout* k *tel que* $k + \mathcal{N} \subset i + [\![-lt, lt]\!]^2$, $x_{|k+\mathcal{N}} \in \mathcal{B}^{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{F}$).
3. En déduire, grâce à la compacité, que si $\Sigma = \emptyset$, alors F est nilpotent.
4. Quel problème sur les automates cellulaires peut-on montrer indécidable grâce aux questions précédentes ? Comment ?