Calculabilité avancée (SINBU06) – Examen – Session 2

Durée : 2 heures *(Barème indicatif)*
Documents : non autorisés
Ce sujet comporte **2 pages** et 4 exercices

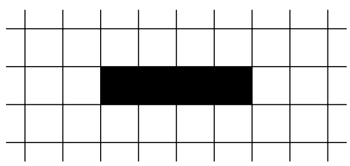
Exercice 1. *Réduction et Rice (8 points)*
Soient l'ensemble des codes de machines de Turing dont le calcul sur le mot vide s'arrête :
$$L_{halt\epsilon} = \{\langle M\rangle \mid M(\epsilon)\downarrow\}$$
et l'ensemble des codes de machines de Turing qui reconnaissent des langages non-vides :
$$L_{\emptyset} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}.$$

1. Montrer que $L_{halt\epsilon} \leq_m^T L_{\emptyset}$.

2. Appliquer le théorème de Rice pour montrer que $L_{\emptyset}$ est indécidable.

Exercice 2. *Jeu de la vie (4 points)*
Une *configuration* $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ du jeu de la vie associe à chaque case de l'espace ($\mathbb{Z}^2$) un état *mort* (0) ou *vivant* (1). Une configuration c est *finie* lorsque $\sum_{p\in\mathbb{Z}^2} c(p)$ est fini. On note
$$f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$$
la règle d'évolution *globale* du jeu de la vie. Le **problème de la mort** consiste à décider, étant donnée une configuration finie c, si $\exists t \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{Z}^2 : (f^t(c))(p) = 0$?

1. L'instance ci-dessous est-elle positive (réponse « oui ») ou négative (réponse « non ») ?



case vide = morte
case pleine = vivante

2. Donner en quelques phrases une idée de démonstration de l'indécidabilité du problème de la mort, en soulignant quelques difficultés techniques.
Indication : on attend une idée de réduction, avec un « $\iff$ ».

Exercice 3. *Arrêt et conjectures mathématiques (5 points)*

La conjecture de Goldbach, formulée en 1742 et toujours ouverte, énonce que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

1. Donner un programme qui s'arrête si et seulement si la conjecture de Goldbach est fausse (ce programme n'a pas d'entrée).

On peut déduire de votre réponse précédente que si l'on savait décider le problème de l'arrêt, alors on saurait décider si la conjecture de Goldbach est vraie ou fausse.

2. Peut-on néanmoins semi-décider si cette conjecture est vraie ? ou bien si elle est fausse ?

La suite de Collatz (ou suite de Syracuse) d'un entier $n > 0$ est la suite infinie $(f^i(n))_{i \in \mathbb{N}}$ avec

$$\begin{aligned} f : \ & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La conjecture de Collatz, formulée en 1937 et toujours ouverte, énonce que $\forall\, n > 0 : \exists\, i \geq 0 : f^i(n) = 1$, c'est-à-dire que la suite de Collatz de tout entier converge vers la boucle $1, 4, 2$.

3. Proposer un algorithme liant le problème de l'arrêt et la conjecture de Collatz.

Exercice 4. *Dovetailing (3 points)*

✎ Démontrer que le langage $\{\langle M \rangle \mid \exists w : M(w) \downarrow\}$ est semi-décidable.