
Examen session exceptionnelle – Calculabilité (SIN6U05L)

Durée : 2 heures

(Barème indicatif)

Documents : non autorisés**Exercice 1.**

Définitions (5 points)

1. Qu'est-ce qu'un langage **non semi-décidable** ?
2. Dans la définition d'une machine de Turing, quel est le type de la fonction de transition δ ? (Rappel : ensemble d'états Q , état final q_f , alphabet d'entrée Σ , alphabet de ruban Γ .)
3. Réordonner les symboles suivants afin d'énoncer correctement le **théorème de l'arrêt** :
 $\forall w, \nexists M_2, \forall M_2 : M_1(w, \langle M_1 \rangle) = \text{halt}(\langle M_1 \rangle, w)$.
4. Donner un exemple de **propriété non triviale**, en justifiant. Compléter la phrase suivante sur ce que l'on peut alors conclure en appliquant le théorème de Rice :
 « Il n'existe pas de machine de Turing prenant en entrée et décidant si »

Exercice 2.

Machine de Turing (6 points)

Soit le langage L_2 sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant les mots de longueur multiple de trois et avec un a en position centrale (si la longueur est paire, le centre est un peu décalé) :

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w_1 w_2 \dots w_k \text{ avec } (k \equiv 0 \pmod{3}) \text{ et } (w_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} = a)\}.$$

1. Donner deux mots de $\{a, b\}^*$ appartenant à L_2 .
2. Donner deux mots de $\{a, b\}^*$ n'appartenant pas à L_2 .
3. Donner l'automate d'une machine de Turing qui **décide** le langage L_2 .
4. Donner l'exécution de votre machine sur l'entrée aaa (donc en partant de $q_0aaa \vdash \dots$).

Exercice 3.

Réduction (6 points)

Rappel : $L_{\text{halt}\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \downarrow\}$ contient le code des machines de Turing dont l'exécution, partant de l'entrée vide, s'arrête. Soit $L_4 = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \{aab\}\}$.

1. Montrer que $L_{\text{halt}\epsilon} \leq_m^T L_4$.
2. Est-ce que $L_{\text{halt}\epsilon}$ est décidable? semi-décidable?
3. Que peut-on déduire sur L_4 à partir des réponses précédentes?

Exercice 4.

Réduction? (3 points)

Pour cet exercice bonus, toute réponse imprécise ne vous rapportera aucun point.

1. Le langage L_4 de l'exercice précédent est-il semi-décidable? Justifier.