
Examen session 2 – 3 heures – documents non autorisés

Ce sujet comporte 2 pages et 7 exercices. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1.*Machine de Turing (4 points)*

Soit $L = \{ w_1 w_2 \dots w_n \in \{0,1\}^* \mid n \geq 3 \text{ et } w_3 = w_{n-1} \text{ et } n \equiv 3 \pmod{4} \}$.

On rappelle que la relation de *congruence* ($x \equiv y \pmod{z}$) signifie $(x \pmod{z}) = (y \pmod{z})$.

1. Donner un exemple de mot qui appartient à L .
2. Donner un exemple de mot qui n'appartient pas à L .
3. Donner une machine de Turing déterministe pour décider le langage L .
4. Donner une borne sur le temps d'exécution de votre machine.

Exercice 2.*Questions de cours (2.5 points)*

Définir les notions suivantes en complétant les débuts de phrase. On notera \leq_m^p les réductions many-one polynomiales.

1. Les deux lettres de NP signifient respectivement ...
2. $A \leq_m^p B$ si et seulement si ...
3. Un problème A est NP-complet (pour \leq_m^p) si et seulement si ...
4. Une machine de Turing non-déterministe M accepte un mot x si et seulement si ...

Exercice 3.*Compréhension du cours (1.5 points)*

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si : (un seul choix possible)

il est vrai, il est faux, il implique $P = NP$, il implique $P \neq NP$.

1. **SAT** $\in P$.
2. $\text{co-}P = P$.
3. **Clique** est P-complet pour les réduction \leq_m^p .
4. $P \cap NP = P$.

Exercice 4.*Taille des entrées (2 points)*

Soit l'algorithme suivant.

```

entrée: n (entier)
i (entier) <- 0
j (entier) <- n
tant que (i < n) faire
    si (j%2 == 0) alors j <- j/2, sinon j <- 3*j+1
    i <- i+1
si ((j == 1) ou (j == 2) ou (j == 4)) alors accepter, sinon rejeter

```

1. Donner une borne supérieure sur le temps d'exécution de cet algo en fonction de la taille de l'entrée, en justifiant.

Exercice 5.**Horn-SAT** \in P (2 points)

Une *clause de Horn* est une clause comportant au plus un littéral positif (par exemple $x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_7 \vee \neg x_8$). Une *formule de Horn* est une formule propositionnelle en forme normale conjonctive, où toutes les clauses sont des clauses de Horn.

Horn-SAT

entrée : une formule de Horn ϕ .

question : ϕ est-elle satisfiable ?

1. Donner un exemple d'instance négative de **Horn-SAT**.
2. Montrer que le problème **Horn-SAT** appartient à la classe P.

Exercice 6.**Half-Clique** (5 points)

Rappel : dans un graphe non-orienté $G = (V, E)$, une *clique* est un sous-ensemble $V' \subseteq V$ tel que pour tous $v, v' \in V'$ on a l'arrête $\{v, v'\} \in E$. Sa *taille* est $|V'|$.

Half-Clique

entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$.

question : G contient-il une clique de taille au moins $\frac{|V|}{2}$?

1. Donner un exemple d'instance positive de **Half-Clique**, avec au moins 7 sommets.
2. Montrer que le problème **Half-Clique** appartient à la classe NP.

Clique

entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.

question : G contient-il une clique de taille au moins k ?

Rappel : **Clique** est NP-complet.

3. Montrer que **Half-Clique** est NP-difficile.
4. Que peut-on conclure des réponses de cet exercice ?

Exercice 7.**Sudoku** \leq_m^p **SAT** (4 points)

La grille de jeu du **Sudoku** est un carré de neuf cases de côté, subdivisé en autant de sous-grilles carrées identiques, appelées "régions". Le but du jeu est de remplir cette grille avec des chiffres allant de 1 à 9 en veillant toujours à ce que chaque ligne, chaque colonne et chaque région ne contiennent qu'une seule fois tous les chiffres allant de 1 à 9. Au début du jeu, un certain nombre de chiffres sont déjà placés.

Étant donnée une grille de **Sudoku**, nous souhaitons savoir s'il existe une solution. Pour cela, dans cet exercice nous allons modéliser ce problème par une formule propositionnelle. On utilisera $9^3 = 729$ variables propositionnelles $c_{i,j,k}$ avec $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$, qui codent le fait que la case (i, j) contient le chiffre k .

1. Écrire les contraintes suivantes qui modélisent partiellement le problème, en formule sous forme normale conjonctive (on vous donne la première réponse) :
 - (a) Au moins une valeur par case : $\bigwedge_{i,j \in \{1, \dots, 9\}} \bigvee_{k \in \{1, \dots, 9\}} c_{i,j,k}$
 - (b) Au moins une fois chaque chiffre sur chaque ligne.
 - (c) Au plus une valeur par case.
 - (d) Au plus une fois chaque chiffre sur chaque colonne.
 - (e) Au moins une fois chaque chiffre dans chaque région.

			8	1				5
				2			3	
8					5		4	9
4			1				6	3
	2						9	
3	7				2			8
7	8		2					6
	4			5				
6				9	8			

2. On souhaite ensuite ajouter des clauses encodant les cases déjà pré-remplies. Quel ensemble de clauses faut-il ajouter pour les deux premières lignes de la grille ci-contre où des chiffres sont déjà placés ?
3. Quel est l'intérêt de réduire un problème de la classe NP à **SAT**, si l'on sait déjà que **SAT** est NP-complet ?