

---

**Examen – 3 heures – documents non-autorisés**


---

**Ce sujet comporte 2 pages et 7 exercices. Le barème est donné à titre indicatif.**

**Exercice 1.***Machine de Turing (4 points)*

Soit  $L = \{ w_1 w_2 \dots w_n \in \{0,1\}^* \mid w_2 = w_n \text{ et } n \equiv 1 \pmod{3} \}$ .

On rappelle que la relation de *congruence* ( $x \equiv y \pmod{z}$ ) signifie  $(x \pmod{z}) = (y \pmod{z})$ .

1. Donner un exemple de mot qui appartient à  $L$ .
2. Donner un exemple de mot qui n'appartient pas à  $L$ .
3. Donner une machine de Turing déterministe pour décider le langage  $L$ .
4. Donner une borne sur le temps d'exécution de votre machine.

**Exercice 2.***Questions de cours (2.5 points)*

Définir les notions suivantes en complétant les débuts de phrase. On notera  $\leq_m^p$  les réductions many-one polynomiales.

1. Les deux lettres de NP signifient respectivement ...
2. Un problème  $A$  est NP-difficile (pour  $\leq_m^p$ ) si et seulement si ...
3. Un problème  $A$  est NP-complet (pour  $\leq_m^p$ ) si et seulement si ...
4. Une machine de Turing non-déterministe  $M$  accepte un mot  $x$  si et seulement si ...

**Exercice 3.***Compréhension du cours (1.5 points)*

Pour chacun des énoncés de chacune des questions, indiquer s'il est vrai ou faux.

1. Si  $\text{SAT} \in P$  alors :
  - (a)  $\text{Clique} \in NP$ ;
  - (b) Tous les problèmes NP-difficiles sont dans  $P$ ;
  - (c)  $P = NP$ .
2. Si  $P \neq NP$  alors :
  - (a)  $\text{SAT} \notin P$ ;
  - (b)  $\text{co-}P \neq P$ ;
  - (c) Aucun problème NP-difficile n'est dans  $P$ .

**Exercice 4.***Taille des entrées (2 points)*

Soit l'algorithme suivant, avec  $\text{test}(i, x)$  un test inconnu qui prend une unité de temps.

```

monalgo(entier x)
  entier y <- x+5
  pour i de 1 à y faire
    si test(i, x) alors
      rejeter
  accepter

```

1. Donner une borne supérieure sur le temps d'exécution de cet algo en fonction de la taille de l'entrée, en justifiant.

**Exercice 5.****SAT-FND**  $\in$  P (2 points)

Une formule sous *forme normale disjonctive* (FND) est une disjonction de conjonctions de littéraux, comme par exemple  $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_1) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_1 \wedge \neg x_3) \vee (x_3 \wedge \neg x_5 \wedge \neg x_2 \wedge x_4)$ .

**SAT-FND**

*entrée* : une formule  $\phi$  sous forme normale disjonctive.

*question* :  $\phi$  est-elle satisfaisable ?

1. Donner un exemple d'instance négative de **SAT-FND**.
2. Montrer que le problème **SAT-FND** appartient à la classe P.

**Exercice 6.****Edge dominating set** (5 points)**Edge dominating set**

*entrée* : un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  et un entier  $k \in \mathbb{N}$ .

*question* : existe-t-il un sous ensemble  $E' \subseteq E$  tel que  $|E'| \leq k$  et toute arête de  $E \setminus E'$  partage une extrémité avec au moins une arête de  $E'$  ?

1. Donner un exemple d'instance positive de **Edge dominating set**.
2. Montrer que le problème **Edge dominating set** appartient à la classe NP.

**Dominating set**

*entrée* : un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  et un entier  $k \in \mathbb{N}$ .

*question* : existe-t-il un sous ensemble  $V' \subseteq V$  tel que  $|V'| \leq k$  et tout sommet de  $V \setminus V'$  est adjacent à au moins un sommet de  $V'$  ?

Résultat que nous admettons : **Dominating set** est NP-complet.

3. Montrer que **Edge dominating set** est NP-difficile.
4. Que peut-on conclure des réponses de cet exercice ?

**Exercice 7.****Ensemble Indépendant**  $\leq_m^p$  SAT (4 points)

On rappelle qu'un ensemble indépendant dans un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble de sommets  $V' \subseteq V$  tel que pour tous  $u, v \in V'$  on a  $\{u, v\} \notin E$ .

**Ensemble indépendant**

*entrée* : un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  et un entier  $k \in \mathbb{N}$ .

*question* :  $G$  contient-il un ensemble indépendant de taille  $k$  ?

Le but de cet exercice est de donner une réduction de **Ensemble Indépendant** à **SAT**.

1. Donner le type de cette réduction : que doit-on transformer en quoi ?
2. Quelles sont les propriétés que doit vérifier cette transformation pour être une réduction many-one polynomiale ?
3. Donner une telle transformation.

**Indice** : on pourra prendre  $|V| \times k$  variables.

**Indication** : on ne demande pas que la formule soit sous forme-normale conjonctive.

**Demandé 1** : donner la sémantique (c-à-d l'idée d'encodage) utilisée pour les variables.

**Demandé 2** : donner la liste des contraintes implémentées dans votre formule.

**Attention** : on ne demande pas de justifier les propriétés de la question précédente, on demande simplement de donner **la transformation**, et les points **Demandé 1, 2**.