
Examen session 2 – Calculabilité avancée

2 heures, documents non-autorisés.Ce sujet comporte **2 pages** et **5 exercices**.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1.*Notions de cours (4 points)*

1. Donner si possible un exemple de langage non récursivement énumérable mais récursif.
2. Donner si possible un exemple de langage non récursif mais récursivement énumérable.
3. Montrer que si L est fini¹ alors L est récursif.
4. Montrer que si un langage L est récursivement énumérable et si son complémentaire cL est aussi récursivement énumérable, alors L est récursif.

Exercice 2.*Réduction many-one Turing (8 points)*Rappel : $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ n'accepte pas } w\}$ n'est pas récursivement énumérable.

1. Donner sans justifier la transformation qui montre que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_{\neq}$, avec

$$L_{\neq} = \{\langle M \rangle \# \langle M' \rangle \# w \mid M \text{ accepte } w \text{ et } M' \text{ n'accepte pas } w\}.$$

2. Montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_{\text{fini}}$, avec

$$L_{\text{fini}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ est fini}\}.$$

3. Pourquoi peut-on en déduire que L_{\neq} et L_{fini} ne sont pas récursifs ?

Exercice 3.*Théorème de Rice (4 points)*

1. Qu'est-ce qu'une propriété *non triviale* ?
2. Donner un exemple de propriété *triviale*.
3. Donner un exemple de propriété *non triviale*.
4. Que dit le théorème de Rice de cette propriété (celle de votre réponse à la question 3) ? Répondre en complétant la phrase suivante : « Il n'existe pas de machine de Turing qui prenne en entrée... »

1. c'est-à-dire $|L| \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.*M_u (4 points)*

1. Proposer un encodage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M .
2. Expliquer avec précision ce qu'est une machine de Turing universelle.
3. Pourquoi ce concept est-il important ?

Exercice 5.*Bonus (4 points)*

1. Énoncer le problème de l'arrêt des machines de Turing.

Dans cet exercice nous considérons des *machines de Turing avec oracle* qui sont des couples (M, A) , où A est un *langage oracle* (quelconque), et M est une machine de Turing qui possède un ruban supplémentaire appelé *ruban d'oracle* et trois états spéciaux :

- $q_?$ qui permet d'interroger l'oracle pour le mot m écrit sur le *ruban d'oracle*. À partir de l'état $q_?$, la machine effectue automatiquement une *transition d'oracle* vers l'état :
 - q_{oui} si $m \in A$,
 - q_{non} si $m \notin A$.
- 2. Donner un exemple de langage L_{halt} et de machine M (vous pouvez expliquer son fonctionnement sous forme de pseudo code) tels que la *machine de Turing avec oracle* (M, L_{halt}) résolve le problème de l'arrêt des machines de Turing².
- 3. Montrer que le problème de l'arrêt des *machines de Turing avec oracle* ayant pour oracle le langage L_{halt} , ne peut pas être résolu par une *machine de Turing avec oracle* ayant pour oracle le langage L_{halt} .

2. on parle ici du problème de l'arrêt des machines de Turing sans oracle.