

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE  
U.F.R. SCIENCES DE LUMINY  
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE, E.D. 184

## THÈSE

présentée pour obtenir le  
DOCTORAT AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
*Spécialité : Informatique*

par  
Jérôme HULIN

sous la direction du Pr. Édouard THIEL

*Titre :*

### AXE MÉDIAN DISCRET : PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES ET ALGORITHMES

soutenue publiquement le 20 novembre 2009

#### JURY

M. Éric ANDRES	Professeur, Université de Poitiers	<i>Rapporteur</i>
M. Victor CHEPOI	Professeur, Université de la Méditerranée	<i>Examineur</i>
M. Michel COUPRIE	Professeur, Université Paris-Est	<i>Rapporteur</i>
M. Jacques-Olivier LACHAUD	Professeur, Université de Savoie	<i>Examineur</i>
M. Édouard THIEL	Professeur, Université de la Méditerranée	<i>Directeur</i>

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier chaleureusement Édouard, mon directeur. Tu as été tout au long de cette thèse un encadrant aux grandes qualités humaines, et tu as toujours fait preuve d'une grande rigueur lors de la correction de mes travaux de recherche et lors des nombreuses relectures, au peigne *très* fin, de ce document. Je te remercie également de toujours avoir respecté les choix de mes pistes de recherche, et de m'avoir accompagné dans chacune d'elles. J'espère d'ailleurs que nous collaborerons à nouveau dans le futur !

J'adresse mes plus sincères remerciements à Éric Andres et Michel Couprie, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse malgré les emplois du temps de fin d'année chargés. Un grand merci à Jacques-Olivier Lachaud et Victor Chepoi, qui ont accepté de compléter ce jury en tant qu'examineurs.

Je souhaite remercier les différentes personnes avec qui j'ai travaillé durant ces dernières années, et qui m'ont aidé à entrevoir de nouvelles voies lors de mes recherches : merci à Nicolas et Pierre de m'avoir accueilli à Nantes afin de comparer nos différentes approches concernant les normes de chanfrein (et aussi pour votre bonne humeur !) ; merci à David et Isabelle de m'avoir proposé de collaborer au problème de couverture minimum, qui a donné naissance au dernier chapitre de ce document. J'apporte une attention spéciale pour deux amis mathématiciens (et co-équipiers) : Olivier, pour m'avoir éclairé sur le lien entre les « inclusions continues et réelles », me permettant d'atteindre un lemme central, et Valentin, dont la passion débordante pour les mathématiques m'inspire un grand enthousiasme.

Je voudrais remercier mes collègues du département d'informatique de Luminy et du laboratoire d'informatique, que j'ai cotoyé au quotidien tout au long de ma thèse. Je remercie en particulier Élisabeth pour avoir écouté mes besoins et attentes en tant qu'enseignant, mes compagnons manifestants Nadia, Laurent, Jean-Luc et Rémi ; et toutes les personnes avec qui j'ai sympathisé ou qui m'ont simplement toujours retourné un sourire : Jacques, Line, Michaël, Yann, Morgan, Camilla, Karim, Henri, Manuel, Jean François, Jean, Ian, Robert, Marie-Hélène, Stéphane, Jean-François, Claude, Gérard et Paul. Une attention spéciale à Sylvie et Antonio, toujours prêts à échanger une conversation intéressante ou un fou rire ; et un coucou aux futurs docteurs Mehdi, Thanh Hai, Daniela et Nicolas, à qui je souhaite toute la réussite possible. Enfin, comment ne pas mentionner Bertrand, Noël et Régis, pour qui il est toujours temps de faire une « petite » partie. . .

J'adresse finalement un grand merci à mes parents, pour m'avoir soutenu depuis toujours.

Jérôme



# Table des matières

<b>Chapitre 1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Présentation de l'axe médian . . . . .	2
1.2 État de l'art . . . . .	2
1.3 Résultats . . . . .	6
1.4 Plan du mémoire . . . . .	9
<b>Chapitre 2 Préliminaires</b>	<b>11</b>
2.1 Espace discret $\mathbb{Z}^n$ . . . . .	11
2.1.1 Symétries . . . . .	11
2.1.2 Points visibles et suites de Farey . . . . .	13
2.2 Distance, boule . . . . .	14
2.3 Norme . . . . .	17
<b>Chapitre 3 Calcul de l'axe médian discret</b>	<b>21</b>
3.1 Axe médian . . . . .	21
3.2 Le $R$ -voisinage minimum $\mathcal{T}(R)$ . . . . .	23
3.3 Méthode générale de calcul de l'axe médian . . . . .	25
3.4 Outils proposés . . . . .	26
3.4.1 Domination entre vecteurs . . . . .	26
3.4.2 Serrure et $\vec{v}$ -domination . . . . .	28
3.5 Conclusion . . . . .	30
<b>Chapitre 4 Propriétés de <math>\mathcal{T}(R)</math> pour la distance euclidienne <math>d_e</math></b>	<b>31</b>
4.1 Couvrir une boule euclidienne . . . . .	31
4.2 Relations de domination . . . . .	33
4.3 Un trousseau pour $d_e$ . . . . .	34
4.4 Caractérisation de $\mathcal{T}$ . . . . .	36
4.5 Conclusion . . . . .	41

<b>Chapitre 5 Étude de <math>\mathcal{T}(R)</math> pour <math>d_e</math> dans <math>\mathbb{Z}^2</math></b>	<b>43</b>
5.1 Lien avec les suites de Farey et trousseau minimal . . . . .	43
5.2 Calcul du rayon de couverture . . . . .	46
5.3 Un algorithme pour le rayon d'apparition . . . . .	47
5.4 Une zone de couverture . . . . .	49
5.5 Les serrures maximales . . . . .	53
5.6 Un algorithme pour $\mathcal{T}(R)$ . . . . .	56
5.7 Expérimentations . . . . .	59
5.8 Vers la 3 <sup>ème</sup> dimension . . . . .	60
5.9 Conclusion . . . . .	61
<b>Chapitre 6 Distances et normes de chanfrein</b>	<b>63</b>
6.1 Historique . . . . .	63
6.2 Algorithme pour DT . . . . .	64
6.3 Caractérisation des normes de chanfrein . . . . .	65
6.3.1 Condition suffisante de norme . . . . .	66
6.3.2 Condition nécessaire de norme . . . . .	67
6.4 Intervalle pour une distance de chanfrein homogène . . . . .	70
6.5 Masques minimaux . . . . .	71
6.6 Entiers représentables et problème de Frobenius . . . . .	71
6.7 Conclusion . . . . .	73
<b>Chapitre 7 Propriétés de <math>\mathcal{T}(R)</math> pour les normes de chanfrein</b>	<b>75</b>
7.1 Couvrir une boule de chanfrein . . . . .	75
7.1.1 G-symétries . . . . .	75
7.1.2 Rayons représentables . . . . .	77
7.2 Voisinage $\mathcal{T}$ pour masques $3^n$ . . . . .	78
7.3 Conclusion . . . . .	79
<b>Chapitre 8 Étude de <math>\mathcal{T}(R)</math> pour les normes de chanfrein <math>5 \times 5</math></b>	<b>81</b>
8.1 Propriétés élémentaires des masques $5 \times 5$ . . . . .	81
8.2 $\mathcal{T}_{\langle a,b,c \rangle}$ est borné . . . . .	82
8.2.1 Construction par récurrence des boules $H_{O-k\vec{a}}(B)$ . . . . .	82
8.2.2 Domination sur les axes $\vec{a}\mathbb{N}$ et $\vec{b}\mathbb{N}$ . . . . .	85
8.2.3 Domination par déplacement de vecteur $\vec{c}$ . . . . .	87
8.3 Rayon d'apparition de $\vec{c}$ . . . . .	88
8.3.1 Lien avec les entiers représentables . . . . .	89
8.3.2 Un critère arithmétique . . . . .	91

---

8.3.3	Une borne pour l'apparition de $\vec{c}$ . . . . .	94
8.3.4	Un algorithme pour $R_{app}(\vec{c})$ . . . . .	95
8.4	Conclusion et approche des masques $7 \times 7$ . . . . .	97
<b>Chapitre 9 Couverture minimum</b>		<b>99</b>
9.1	Introduction . . . . .	99
9.2	NP-complétude du problème $k$ -axe médian . . . . .	100
9.2.1	Variables . . . . .	101
9.2.2	Arêtes . . . . .	102
9.2.3	Clauses . . . . .	103
9.2.4	Branchements des gadgets . . . . .	103
9.3	Discussion et problèmes ouverts . . . . .	105
<b>Chapitre 10 Conclusion et perspectives</b>		<b>107</b>
<b>Index</b>		<b>109</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>111</b>





# Chapitre 1

## Introduction

La représentation et la description de formes sont des thèmes importants en imagerie numérique, étudiés dans les domaines de la géométrie discrète, de l'analyse d'image, de la vision par ordinateur, de la modélisation et de la synthèse d'image, de la compression d'images, etc. L'axe médian est un outil de représentation de formes, plus précisément d'objets binaires, par des unions de boules. Celui-ci possède de multiples propriétés telles que la réversibilité et la compacité. De plus, son caractère synthétique permet de l'utiliser dans de nombreuses applications telles que la reconnaissance et la description de formes, le calcul de squelettes ou leur simplification. Étant donné que la plupart des systèmes d'acquisition numériques génèrent des images échantillonnées grâce à des capteurs répartis de manière régulière, et que ces images sont généralement représentées par une matrice de pixels, il est très utile de pouvoir calculer efficacement l'axe médian d'un objet discrétisé sur une telle grille. Dans ce mémoire nous présentons nos travaux effectués sur l'axe médian *discret*, dans le sens où les objets que nous manipulons sont des sous-ensembles de la grille rectilinéaire  $\mathbb{Z}^n$ . Nos résultats sont de deux types : d'une part, nous établissons des liens entre l'axe médian discret et des outils bien connus de l'arithmétique ; ce qui nous permet d'autre part de proposer des algorithmes efficaces pour extraire l'axe médian.

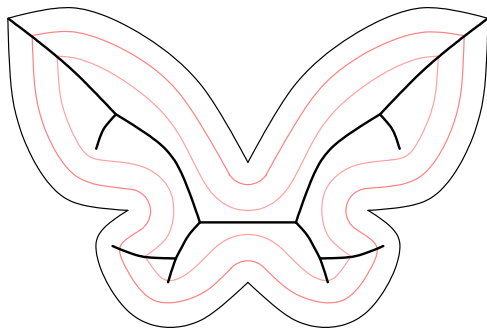


FIG. 1.1 – L'axe médian (trait fort) tel que défini par Blum : le lieu de rencontre des fronts d'onde propagés depuis la frontière.

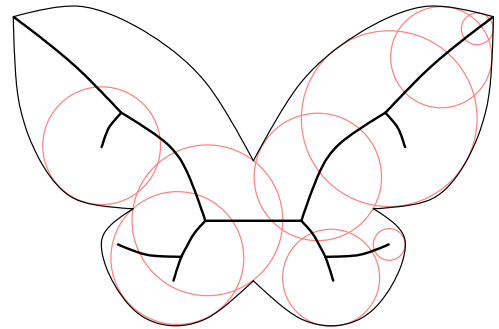


FIG. 1.2 – L'axe médian : centre des boules maximales de la forme.

## 1.1 Présentation de l'axe médian

La notion d'*axe médian* (AM) est introduite par Blum en 1967 [Blu67], dans le but d'extraire les caractéristiques « biologiques » d'une forme donnée. Dans cet article Blum ne parle pas de couverture par des boules, mais présente l'axe médian par l'analogie d'un feu de prairie (*grass fire*, voir la figure 1.1) : étant donnée une forme  $\mathcal{S}$  du plan continu  $\mathbb{R}^2$ , la frontière de  $\mathcal{S}$  est stimulée au temps initial  $t = 0$ . Cette stimulation est transmise dans le plan de proche en proche, propageant une onde à vitesse constante (telle un feu). Blum nomme *axe médian* (*medial axis*) le lieu des collisions des différents fronts d'onde. Il énumère certaines propriétés de l'axe médian, dont la propriété de symétrie : les points de l'axe médian de  $\mathcal{S}$  sont en effet équidistants d'au moins deux points distincts de la frontière de  $\mathcal{S}$ . Blum décrit également l'opération de réversibilité : par stimulation, pour tout point  $p$  de l'axe médian, d'une durée égale au temps de propagation du feu qui a été nécessaire pour atteindre  $p$  lors de la construction de l'axe médian.

Une définition alternative est proposée par Pfaltz et Rosenfeld dans [PR67]. Cette définition est basée sur le calcul de boules maximales, et permet de définir l'axe médian dans tout espace métrique. Pfaltz et Rosenfeld illustrent leur approche dans le plan discret  $\mathbb{Z}^2$ , avec les distances  $d_1$  et  $d_\infty$ . Soit  $\mathcal{S}$  une forme binaire dans un espace  $E$  (c'est-à-dire un sous-ensemble de  $E$ ), et  $B$  une boule incluse dans  $E$ . La boule  $B$  est dite *maximale* dans  $\mathcal{S}$  s'il n'existe aucune autre boule incluse dans  $\mathcal{S}$  et qui contient  $B$ . L'axe médian de  $\mathcal{S}$  est alors défini comme l'ensemble des centres (et rayons) des boules maximales de  $\mathcal{S}$ , comme illustré sur la figure 1.2. Notons que dans  $\mathbb{R}^n$ , les deux définitions ne sont pas strictement équivalentes : l'AM défini par Blum est contenu dans l'AM de Pfaltz et Rosenfeld, qui est contenu dans la fermeture du premier [Mat88].

Les applications de l'axe médian en analyse d'image sont nombreuses. Il est utilisé en robotique pour la planification de trajectoire [Lat91], et permet de développer des outils de manipulation interactive de formes [HBK02]. Il est également utile en description et reconnaissance de formes [SHB99]. Étant donné qu'il contient l'information de profondeur dans la forme (le rayon des boules maximales), l'axe médian a des applications naturelles en segmentation de formes [CPW93][DGG03]. Citons également la transmission progressive par axe médian, utile pour permettre la visualisation à distance de très gros volumes [DGB03].

L'axe médian est étudié à la fois dans les domaines continu et discret. Pour un état de l'art concernant l'axe médian continu, voir [SP08]. Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de l'extraction de l'axe médian d'objets *discrets*. Par le terme objet discret on signifie que l'objet (la forme) en entrée est un sous-ensemble de la grille rectilinéaire  $\mathbb{Z}^n$  ; nous utilisons donc naturellement la définition de l'axe médian comme centre des boules maximales, voir la figure 1.3. L'axe médian dans  $\mathbb{Z}^n$  est en général déconnecté et non fin ; le calcul d'un squelette peut être réalisé, voir [SdBT96]. Pour de plus amples références concernant l'axe médian discret, voir [TC07, chapitre 9]. Bien entendu, la forme de l'axe médian et son calcul varient selon la distance choisie. Nous avons considéré dans nos travaux les normes les plus courantes utilisées en géométrie discrète, à savoir la norme euclidienne et les normes de chanfrein ( $\ell_1$  et  $\ell_\infty$  sont des cas simples de normes de chanfrein).

## 1.2 État de l'art

Soit  $\mathcal{S}$  une forme et  $p$  un point de  $\mathcal{S}$ , on note  $I_p(\mathcal{S})$  la plus grande boule centrée en  $p$  et incluse dans  $\mathcal{S}$ . Le calcul de l'axe médian de  $\mathcal{S}$  consiste alors à chercher, pour tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , s'il existe un point  $q$  dans un certain voisinage de  $p$  tel que  $I_p(\mathcal{S})$  est incluse dans  $I_q(\mathcal{S})$ , voir la

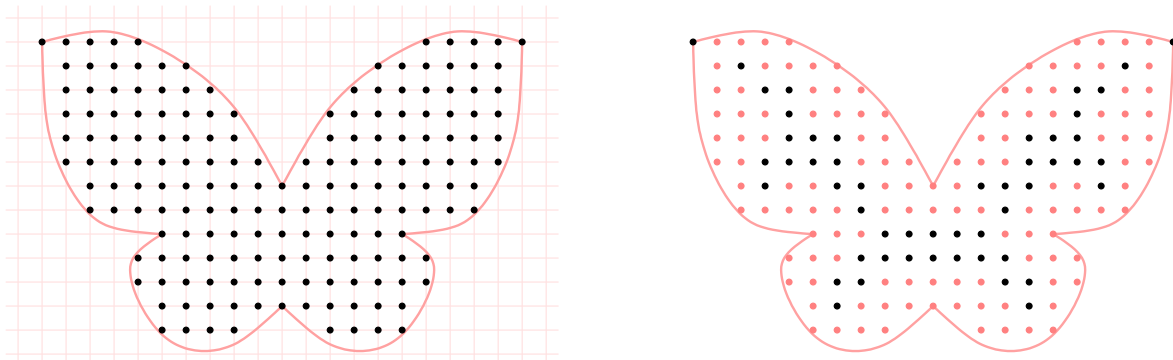


FIG. 1.3 – Une forme discrète de  $\mathbb{Z}^2$  (à gauche) et son axe médian (points noirs, à droite) pour la distance euclidienne.

figure 1.4. Si le voisinage utilisé est trop petit, on va détecter un sur-ensemble de l'axe médian ; on souhaite donc déterminer un voisinage suffisamment grand pour détecter uniquement les centres des boules maximales, et de cardinalité faible.

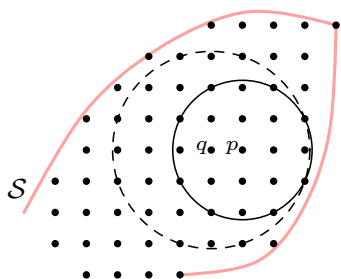


FIG. 1.4 – Les boules  $I_p(\mathcal{S})$  et  $I_q(\mathcal{S})$ , respectivement en trait fort et pointillés. La première est incluse dans la seconde, donc  $p \notin \text{AM}(\mathcal{S})$ .

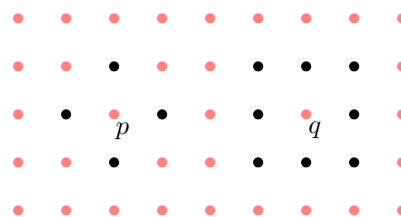


FIG. 1.5 – Le 4-voisinage du point  $p$ , et le 8-voisinage du point  $q$  (points noirs).

Les rayons des boules incluses dans  $\mathcal{S}$  sont calculés par une opération appelée *transformation de distance* (*Distance Transform*, DT). La DT consiste à calculer, en tout point  $p$  de  $\mathcal{S}$ , la distance notée  $\text{DT}[p]$  de  $p$  au plus proche point de  $\mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{S}$  (voir la figure 1.6).  $\text{DT}[p]$  représente ainsi la profondeur du point  $p$  dans  $\mathcal{S}$ . Le rayon de  $I_p(\mathcal{S})$  est la plus grande valeur inférieure à  $\text{DT}[p]$  et *représentable* par la distance. Les travaux concernant le calcul de DT et le calcul de l'axe médian sont ainsi fortement liés.

Le premier algorithme de DT est proposé par Pfaltz et Rosenfeld dans [RP66], et concerne les distances simples  $d_1$  et  $d_\infty$  dans le plan  $\mathbb{Z}^2$ . Les auteurs utilisent le fait que ce sont des distances *locales*, autrement dit l'information de profondeur dans la forme peut être propagée de proche en proche. Ils en déduisent un algorithme par balayage en deux passes séquentielles, de complexité linéaire en le nombre de points de l'image. Peu après, dans [PR67], ils formulent une caractérisation de l'axe médian pour  $d_1$  et  $d_\infty$ , appelée critère du maximum local (ou *Local Maximum Criteria*, LMC) : un point  $p$  est un *maximum local* dans  $\mathcal{S}$  pour  $d_1$  (resp.  $d_\infty$ ) si pour tout point  $q$  situé dans le 4-voisinage (resp. le 8-voisinage) de  $p$ , on a  $\text{DT}[q] \leq \text{DT}[p]$ . Les 4- et 8-voisinage sont présentés sur la figure 1.5. Pfaltz et Rosenfeld prouvent que l'axe médian de

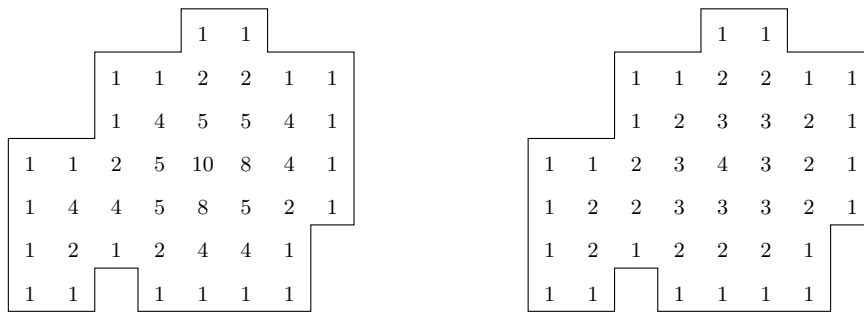


FIG. 1.6 – Transformée de distance (DT) pour  $d_e^2$  (à gauche) et  $d_1$  (à droite).

$\mathcal{S}$  est l'ensemble des maxima locaux de  $\mathcal{S}$ , ce qui est équivalent à dire que pour  $d_1$  (resp.  $d_\infty$ ), le 4-voisinage (resp. le 8-voisinage) est un voisinage de test *suffisant* pour détecter uniquement les points de l'AM. Ceci donne naturellement un algorithme linéaire pour extraire l'axe médian. Malheureusement, les boules de  $d_1$  et  $d_\infty$  sont des carrés, ce qui implique une forte anisotropie de l'axe médian pour ces distances, et en limite ainsi les applications. Notons que Pfaltz et Rosenfeld prouvent également dans cet article la réversibilité de l'axe médian.

Les *distances de chanfrein* [Mon68][Bor84][Bor86] sont des distances largement utilisées en géométrie discrète car ce sont des distances locales qui permettent d'approximer finement la distance euclidienne par des entiers. Un *masque de chanfrein*  $\mathcal{M}$  est un ensemble de déplacements (vecteurs) pondérés de  $\mathbb{Z}_*^n \times \mathbb{N}_*$ , et la distance de chanfrein associée  $d_{\mathcal{M}}$  est la distance mesurée sur le graphe d'adjacence pondéré induit par  $\mathcal{M}$ . La figure 1.7 présente les masques de chanfrein 2D classiques  $\langle 3, 4 \rangle$  et  $\langle 5, 7, 11 \rangle$ , ainsi qu'une DT pour  $d_{\langle 3, 4 \rangle}$ . Les masques de chanfrein sont très variés ; selon l'application, l'utilisateur choisit un compromis entre la taille du masque et le degré d'isotropie. Un des attraits de ces distances est que la DT peut être effectuée par l'algorithme simple de Rosenfeld et Pfaltz, qui a été adapté aux distances de chanfrein par Montanari [Mon68] puis Borgfors [Bor84]. Soit  $\mathcal{M}$  un masque à  $m$  pondérations ; la DT pour  $d_{\mathcal{M}}$  se fait là encore en deux passes séquentielles (quelle que soit la dimension), en temps  $\mathcal{O}(m.N)$ , où  $N$  est le nombre de points de l'image.

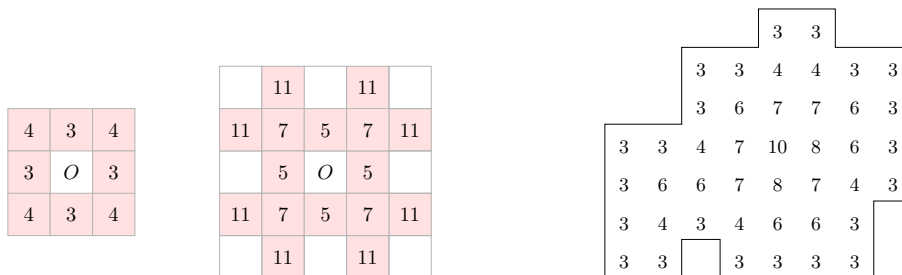


FIG. 1.7 – À gauche : masques de chanfrein  $\langle 3, 4 \rangle$  et  $\langle 5, 7, 11 \rangle$ . Les cases grisées représentent les déplacements autorisés (par rapport à  $O$ ), et les valeurs leur pondération. À droite : DT d'une forme pour  $d_{\langle 3, 4 \rangle}$ .

Une première approche du calcul de l'axe médian pour les distances de chanfrein est proposée pour le masque  $\langle 3, 4 \rangle$  dans [AdB88]. Dans cet article, Arcelli et Sanniti di Baja établissent un lien entre les maxima locaux calculés sur le 8-voisinage, et les centres des boules maximales. Le

LMC est alors formulé de la manière suivante :  $p$  est un maximum local si pour toute pondération  $(\vec{v}, w)$  du masque  $\langle 3, 4 \rangle$ , on a  $DT[p + \vec{v}] < DT[p] + w$ . Par une étude exhaustive sur les valeurs atteintes par la distance, ils montrent qu'en abaissant certaines valeurs sur la DT, le LMC permet d'établir les relations d'inclusion de tout couple de boules dont les centres sont 8-adjacents. Ceci prouve que les points de l'axe médian sont des maxima locaux ; mais ne prouve pas que le 8-voisinage est un voisinage suffisamment grand pour calculer uniquement les centres des boules maximales.

Le cas de la distance  $d_{\langle 5, 7, 11 \rangle}$  est abordé par Borgfors dans [Bor93]. Elle observe que le LMC, même étendu au voisinage  $5 \times 5$ , permet uniquement de décrire les inclusions de boules dont les rayons sont supérieurs à 60, sans mentionner le lien avec le problème de Frobenius (cf §6.6). Pour tout rayon inférieur à 60, elle propose l'utilisation d'une *table de correspondance* (*Look-Up Table*, LUT). La LUT contient, pour tout vecteur  $\vec{v}$  du masque de chanfrein (à symétrie près) et tout rayon  $r < 60$ , la plus petite valeur  $DT[p + \vec{v}]$  pour laquelle la boule de centre  $p$  et de rayon  $r$  est incluse dans la boule de centre  $p + \vec{v}$  :

$$I_p(\mathcal{S}) \subseteq I_{p+\vec{v}}(\mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \quad DT[p + \vec{v}] \geq LUT[\vec{v}][DT[p]]. \quad (1.1)$$

Borgfors fournit la LUT pour le masque  $\langle 5, 7, 11 \rangle$  et conclut qu'il n'existe pas de « règle générale » pour calculer les centres des boules maximales. De plus, elle considère uniquement les inclusions dans un voisinage  $5 \times 5$  (de manière analogue à [AdB88] avec le voisinage  $3 \times 3$ ), excluant arbitrairement la possibilité que le voisinage suffisant pour extraire *uniquement* l'axe médian soit plus large que le masque de chanfrein.

Concernant la distance euclidienne, Borgfors, Ragnemalm et Sanniti di Baja publient les premiers résultats concernant le calcul de l'AM en dimension 2 dans [BRSdB91]. Là encore, la complexité des inclusions de boules amène les auteurs à proposer l'utilisation de tables de correspondance. Ils considèrent les inclusions dans le voisinage  $3 \times 3$ , et fournissent la LUT (calculée de manière exhaustive) pour les vecteurs  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ , jusqu'au rayon  $\sqrt{80}$ . Ils observent également (contrairement à  $d_{\langle 5, 7, 11 \rangle}$ ) qu'il est nécessaire de calculer la LUT pour tous les rayons inférieurs à la plus grande valeur lue sur la DT (en effet, les inclusions ne sont pas triviales à partir d'un certain rayon). Notons qu'à cette période, les algorithmes de DT euclidienne sont soit de complexité linéaire mais comportent des erreurs [Dan80], soit exacts mais à complexité relativement élevée [Rag90].

Quelques années plus tard sont découverts des algorithmes linéaires pour la DT euclidienne. Citons par exemple l'algorithme de Breu et al. [BGKW95], basé sur un calcul du diagramme de Voronoï dans lequel les sommets sont les points du complémentaire de la forme ; ou encore l'algorithme de Hirata [Hir96], parallélisable et généralisable en toute dimension.

La première approche générale pour le calcul du voisinage de test et des LUTs est proposée par Rémy et Thiel, pour les *normes* de chanfrein [RT02] et la distance euclidienne [RT05]. La méthode employée dans ces deux articles est similaire, et calcule un voisinage de test  $\mathcal{M}_{lut}(R_{max})$  suffisant pour l'extraction de l'axe médian de toute forme  $\mathcal{S}$  dont le *rayon* (i.e., le rayon de la plus grande boule incluse dans  $\mathcal{S}$ ) est inférieur à une valeur  $R_{max}$  donnée. Le voisinage de test  $\mathcal{M}_{Lut}$  est initialisé à  $\emptyset$ , et pour tout rayon  $R$  de 1 à  $R_{max}$ , l'algorithme effectue pour la boule  $B_R$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  les deux opérations suivantes :

- dans un premier temps, il réalise la DT de  $B_R$  ;
- dans un second temps, il cherche — par le critère de la LUT, équation (1.1) — les points de  $B_R$  que le voisinage  $\mathcal{M}_{Lut}$  reconnaît\* comme appartenant à  $AM(B_R)$ . Pour chacun de

---

\*Par définition, l'axe médian d'une boule est son centre.

ces points  $p$ , le vecteur  $\vec{Op}$  est inséré dans  $\mathcal{M}_{Lut}$ , et la LUT correspondant au vecteur  $\vec{Op}$  est créée.

Par construction, le voisinage  $\mathcal{M}_{Lut}(R)$  ainsi généré est nécessaire et suffisant pour décrire toutes les inclusions de boules dont les rayons sont inférieurs à  $R$ . La complexité en temps est élevée, de l'ordre de  $R^4 \cdot |\mathcal{M}_{Lut}(R)|$ , et le stockage des LUTs (et leur accès), qui atteignent rapidement plusieurs milliards de lignes pour  $d_e$ , sont des facteurs limitants. Rémy et Thiel observent que pour toute norme de chanfrein, le voisinage de test est borné, contrairement au voisinage pour  $d_e$ , dans lequel des vecteurs doivent être insérés de temps à autre lorsque  $R$  croît.

L'axe médian forme en général un ensemble de points non connexe d'une certaine épaisseur (typiquement d'épaisseur 2). Dans les calculs de squelettes fondés sur l'axe médian, une étape classique consiste à réaliser un amincissement homotopique. Saude *et al.* proposent dans [SCdAL09] un outil appelé *Higher resolution Medial Axis* (HMA). Le HMA est similaire à l'AM, à la différence que les centres des boules sont des points de la grille  $[\frac{1}{2}]\mathbb{Z}^n$ . Le HMA d'une forme  $\mathcal{S}$  est ainsi mieux « centré » dans  $\mathcal{S}$  et comporte moins de points. Les auteurs fournissent un algorithme de calcul du HMA, basé sur la méthode proposée par Rémy et Thiel.

Un algorithme nouveau a été récemment introduit par Normand et Évenou pour les normes de chanfrein en dimensions 2 [NÉ08] et 3 [NÉ09]. Cet algorithme calcule également un voisinage de test nécessaire et suffisant, de manière exhaustive, en testant les boules  $B_R$  par  $R$  croissants. L'intérêt de leur méthode est qu'ils utilisent une représentation polyédrale des boules : toute boule d'une norme de chanfrein dans  $\mathbb{Z}^n$  est l'ensemble des points entiers contenus dans un certain polyèdre de  $\mathbb{R}^n$ . L'inclusion d'une boule dans une autre boule peut ainsi être déterminée en comparant les positions d'une certaine facette de chacune des deux boules. Des tables de correspondance sont encore nécessaires, mais celles-ci sont d'une taille négligeable en comparaison de celles utilisées dans l'algorithme de Rémy et Thiel. Il en résulte un algorithme de calcul du voisinage extrêmement rapide.

### 1.3 Résultats

Les algorithmes proposés par Rémy et Thiel d'une part, Normand et Évenou d'autre part, permettent le calcul d'un voisinage minimal pour l'extraction de l'axe médian. Toutefois, leurs approches s'appuient sur la recherche *exhaustive* des configurations d'inclusions de boules, et ne fournissent aucune propriété sur la structure des voisinages de test. Notre motivation a donc naturellement consisté à trouver des *caractérisations* des différents voisinages, aussi bien pour  $d_e$  que pour les normes de chanfrein. Ces caractérisations nous ont permis d'établir de nouveaux algorithmes efficaces pour le calcul des voisinages. La plupart de nos travaux ont été publiés dans [HT09c] [HT09a] [HT09b] [CHS08].

Nous avons vu que le voisinage de test dépend à la fois de la distance considérée et du rayon (l'« épaisseur ») de la forme. Étant donné une distance  $d$ , nous appelons *R-voisinage*, tout voisinage capable de détecter l'axe médian de toutes les formes dont le rayon est inférieur à  $R$ . Un *R-voisinage* doit donc être *suffisamment grand*, afin de décrire toutes les inclusions de boules dont les rayons sont inférieurs à  $R$ . Notons que pour tout  $R \in \mathbb{R}$  et quelle que soit la distance sur  $\mathbb{Z}^n$  utilisée,  $\mathbb{Z}^n$  est un *R-voisinage*. De plus, pour tout  $R \in \mathbb{R}$ , il existe un *R-voisinage* trivial de taille bornée : l'ensemble des vecteurs dont la norme est inférieure à  $R$ . Afin d'optimiser l'extraction de l'axe médian, nous cherchons à calculer un *R-voisinage* de cardinalité minimum ; puisque ce dernier n'est pas nécessairement lié à une LUT, nous le notons simplement  $\mathcal{T}(R)$ .

Puisqu'il existe toujours un  $R$ -voisinage de taille bornée, la grille discrète autorise naturellement l'extraction de l'axe médian de manière algorithmique par une recherche locale. En revanche, une des spécificités de cette grille est que même dans le cas de la distance euclidienne  $d_e$ , les inclusions de boules de normes usuelles ne sont pas triviales. Illustrons ce phénomène

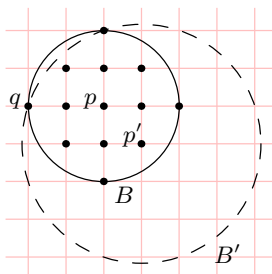


FIG. 1.8 – Le rayon de la plus petite boule centrée en  $p'$  et qui contient  $B$  a pour rayon  $d(p', q) = \sqrt{10}$ .

pour  $d_e$  : soient  $B, B'$  deux boules euclidiennes de centres  $p, p'$  et rayons  $r, r'$ . Si l'espace de travail est  $\mathbb{R}^n$ , alors naturellement  $B$  est incluse dans  $B'$  si et seulement si  $r + d(p, p') \leq r'$ . Dans  $\mathbb{Z}^n$  (voir la figure 1.8), on a toujours<sup>†</sup>  $r + d(p, p') \leq r' \Rightarrow B \subseteq B'$ , mais la réciproque est en générale fautive. On appelle *rayon de couverture* de la boule  $B$  depuis le point  $p$ , le rayon de la plus petite boule centrée en  $p$  et qui contient  $B$ ; on le note  $\mathcal{R}_p(B)$ . Il n'existe pas de formule analytique qui permet de calculer  $\mathcal{R}_p(B)$  pour  $d_e$  dans  $\mathbb{Z}^n$ . Nous verrons qu'il en va de même pour les normes de chanfrein, l'équivalent des normes polyédrales dans  $\mathbb{Z}^n$ . L'absence de formule directe pour le calcul de ces rayons de couverture est le cœur du problème de caractérisation des voisinages dans  $\mathbb{Z}^n$ .

Notre étude débute par des propriétés de  $\mathcal{T}(R)$  communes à toute distance. Nous montrons tout d'abord l'unicité de  $\mathcal{T}(R)$  pour tout  $R$ , par une preuve qui n'est pas basée sur l'analyse d'un algorithme. Il s'ensuit que les voisinages  $\mathcal{T}(R)$  sont imbriqués, et que tout  $\mathcal{T}(R)$  possède les mêmes symétries que les boules de distances considérées. Une caractérisation de  $\mathcal{T}(R)$  est d'être le plus petit  $R$ -voisinage capable de détecter l'axe médian de toutes les boules de rayon inférieur à  $R$ .

La première distance que nous considérons est la distance euclidienne  $d_e$ . Un point entier  $q$  est dit *visible* si  $O$  et  $q$  sont les seuls points entiers du segment  $[Oq]$ , voir la figure 1.10. Autrement dit, un point (ou un vecteur) est visible si ses coordonnées sont premières entre elles. Nous montrons dans un premier temps que les vecteurs non visibles sont inutiles dans tout  $R$ -voisinage. Cette propriété est triviale si on travaille dans  $\mathbb{R}^n$  (par la formule analytique du rayon de couverture, cf figure 1.9), et reste vraie dans l'espace discret. Dans un second temps, nous prouvons que pour tout vecteur visible  $\vec{v}$ , il existe un rayon  $R$  pour lequel tout  $R$ -voisinage contient  $\vec{v}$ . Le plus petit  $R$  pour lequel  $\vec{v} \in \mathcal{T}(R)$  est le *rayon d'apparition* de  $\vec{v}$ , noté  $R_{app}(\vec{v})$ . Ce résultat est établi en montrant que lorsque  $r$  croît, le rayon de couverture d'une boule de rayon  $r$  en direction  $\vec{v}$  s'approche de  $r + \vec{v}$  : en notant  $B_r$  la boule de centre  $O$  et rayon  $r$ , nous établissons

$$r + \|\vec{v}\| - \mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_r) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad r \rightarrow +\infty. \quad (1.2)$$

Intuitivement, on comprend qu'en ce qui concerne les inclusions de boules euclidiennes dans  $\mathbb{Z}^n$ , on se rapproche du cas continu (i.e., dans  $\mathbb{R}^n$ ) lorsque  $r$  croît, ce qui peut être vu comme une

<sup>†</sup>cette propriété est d'ailleurs vraie pour tout espace métrique.

opération d'affinage du maillage de la grille. Nous répondons ainsi à la conjecture exprimée par Rémy et Thiel dans [RT05] : le voisinage  $\mathcal{T}(R)$  tend vers l'ensemble des points visibles de  $\mathbb{Z}^n$  quand  $R$  tend vers  $+\infty$ .

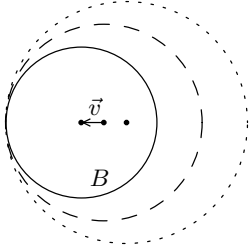


FIG. 1.9 – Boules couvrantes dans une direction donnée pour  $\mathbb{R}^2$  (à gauche) et  $\mathbb{Z}^2$  (à droite).

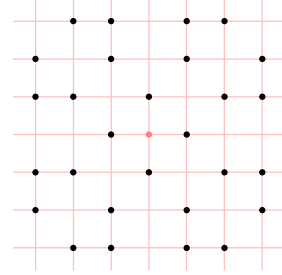


FIG. 1.10 – Premiers points visibles de  $\mathbb{Z}^2$  (l'origine  $O$  est en gris).

Nous nous intéressons ensuite au cas du plan discret  $\mathbb{Z}^2$ , où nous mettons en évidence un lien entre  $\mathcal{T}(R)$  et les suites de Farey. Pour tout entier positif non nul  $k$ , la *suite de Farey* d'ordre  $k$ , notée  $F_k$ , est la suite croissante des fractions irréductibles dont le dénominateur n'excède pas  $k$  ; par exemple  $F_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ . Nous montrons que le rayon d'apparition d'un vecteur  $\vec{v}$  est le plus petit rayon  $R$  pour lequel  $I_{O+\vec{v}}(B_R) \not\subseteq I_{O+\text{pred}(\vec{v})}(B_R)$  et  $I_{O+\vec{v}}(B_R) \not\subseteq I_{O+\text{succ}(\vec{v})}(B_R)$ , où  $\text{pred}(\vec{v})$  et  $\text{succ}(\vec{v})$  sont le prédécesseur et le successeur de  $\vec{v}(v_1, v_2)$  dans la plus petite suite de Farey qui possède la fraction  $\frac{v_2}{v_1}$ . Géométriquement parlant, le prédécesseur  $\vec{u}$  et le successeur

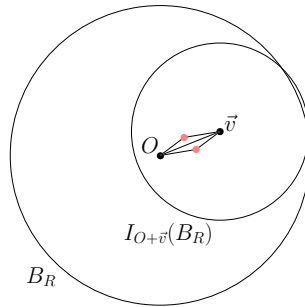


FIG. 1.11 – Le prédécesseur et le successeur (points grisés) du vecteur  $\vec{v}$ .

$\vec{w}$  de  $\vec{v}$  sont tels que  $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$  et le parallélogramme engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  a pour aire 1 (cf figure 1.11). Cette caractérisation nous permet de proposer deux algorithmes :

- le premier calcule le rayon d'apparition de tout vecteur visible  $\vec{v}$  en temps  $\mathcal{O}(R_{app}^{2.5}(\vec{v}))$  et en espace constant ;
- le second calcule le voisinage  $\mathcal{T}(R)$  en temps  $\mathcal{O}(R^4)$ , en ne faisant appel ni à la DT, ni aux LUTs. Sa complexité en espace est la taille de la boule de rayon  $R$ .

L'axe médian est une transformation réversible : une forme  $\mathcal{S}$  est l'union des boules de  $\text{AM}(\mathcal{S})$ . Cependant ce n'est pas un codage minimal, comme l'illustre la figure 1.12. Une *couverture minimum* d'une forme  $\mathcal{S}$  est un ensemble de boules incluses dans  $\mathcal{S}$  de cardinalité minimum, dont l'union est  $\mathcal{S}$ . Par définition des boules maximales, il existe une couverture minimum de  $\mathcal{S}$  qui est un sous-ensemble de  $\text{AM}(\mathcal{S})$ . On appelle *k-axe médian* de  $\mathcal{S}$ , noté  $k\text{-AM}(\mathcal{S})$ , un sous-ensemble de  $\text{AM}(\mathcal{S})$  de taille  $k$  et qui couvre  $\mathcal{S}$ . Nous établissons que le problème de décision qui consiste à déterminer s'il existe un  $k\text{-AM}$  d'une forme de  $\mathbb{Z}^2$  pour  $d_e$  est NP-difficile. Cette



preuve est basée sur une réduction du problème Planar-4 3-SAT.

Nous nous intéressons par la suite aux voisinages de test pour les distances de chanfrein homogènes. Un des avantages de ces *normes* de chanfrein est que l'on connaît les formules directes pour le calcul des distances dans chacun des cônes définis par le polytope de la jauge [Thi01]. La première étape consiste à déterminer quels sont les masques de chanfrein qui induisent une norme. Une condition suffisante de norme basée sur une analyse de ces cônes est présentée dans [Rem01] pour  $\mathbb{Z}^3$  et [Thi01] pour  $\mathbb{Z}^n$ ; nous prouvons que cette condition est également nécessaire, ce qui fournit une caractérisation des normes de chanfrein.

Nous recensons ensuite les cas où les rayons de couverture peuvent être calculés par une formule directe, selon les valeurs de distance présentes dans chaque cône de la jauge. La complexité des relations d'inclusion est naturellement liée au nombre de cônes engendrés par le masque de chanfrein. Nous nous concentrons enfin sur les masques planaires; nous montrons dans un premier temps que les normes induites par les masques  $3 \times 3$  (i.e., les masques contenus dans le 8-voisinage) sont relativement simples : pour tout masque  $3 \times 3$  induisant une norme (dont  $\ell_1$ ,  $\ell_\infty$  et  $\langle 3, 4 \rangle$ ), le voisinage  $3 \times 3$  est un  $R$ -voisinage.

Le cas des masques  $5 \times 5$  (ou masques  $\langle a, b, c \rangle$ , tels  $\langle 5, 7, 11 \rangle$ ) est plus délicat car il présente, à symétrie près, deux cônes d'influence. Nous caractérisons entièrement les voisinages  $\mathcal{T}(R)$  : dans un premier temps nous prouvons que les vecteurs du 8-voisinage appartiennent à tout  $R$ -voisinage, et que le masque de chanfrein  $\langle a, b, c \rangle$  est lui-même un  $R$ -voisinage. Puis, nous donnons un critère arithmétique pour l'apparition du vecteur  $\vec{c} = (2, 1)$  (ainsi que ses symétriques) : il existe un entier  $R$  pour lequel  $\vec{c}$  appartient à  $\mathcal{T}(R)$  si et seulement si  $\text{pgcd}(a, c) + \text{pgcd}(b, c) \leq 2(a + b - c)$ . Le lien qui lie les distances de chanfrein au problème de Frobenius nous permet d'établir que si  $\vec{c}$  appartient à un certain  $\mathcal{T}(R)$ , alors son rayon d'apparition est inférieur à  $bc$ ; et nous donnons un algorithme pour calculer le rayon d'apparition de  $\vec{c}$  en temps  $\mathcal{O}(bc)$ .

## 1.4 Plan du mémoire

Nous présentons au chapitre 2 les notions et notations utiles dans tout le document. Nous abordons en particulier les symétries de l'espace discret  $\mathbb{Z}^n$  ainsi que la notion de point visible. Puis nous rappelons les définitions des boules de distance et des normes.

Le chapitre 3 est consacré aux propriétés des inclusions de boules et du voisinage  $\mathcal{T}(R)$  communes à toute distance. Nous détaillons la notion de boule couvrante et sa relation avec

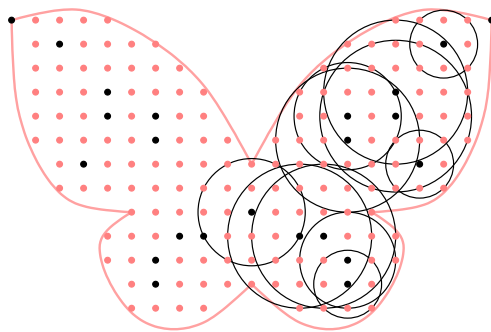


FIG. 1.12 – Une couverture minimum pour  $d_e$  (points noirs).

l'axe médian. Les  $R$ -voisinages et le voisinage  $\mathcal{T}(R)$  sont définis formellement, et nous prouvons l'unicité (et les symétries) de  $\mathcal{T}(R)$ . Nous reformulons également une caractérisation utile de  $\mathcal{T}(R)$ , uniquement en termes de boules (plutôt que de forme). Nous présentons ensuite la relation de domination entre vecteurs, qui fournit un critère d'exclusion de  $\mathcal{T}(R)$ . Enfin, nous introduisons la question de la recherche des rayons d'apparitions, par l'analogie du problème de la serrure.

Nous étudions les propriétés du voisinage de test pour la distance euclidienne aux chapitres 4 et 5. Une caractérisation du voisinage minimum est présentée au chapitre 4 :  $\mathcal{T}(R)$  tend vers l'ensemble des vecteurs visibles quand  $R$  tend vers l'infini. Le chapitre 5 est quant à lui consacré au cas du plan  $\mathbb{Z}^2$ . Nous y établissons un lien entre l'apparition des vecteurs de  $\mathcal{T}(R)$  et les suites de Farey, et proposons des algorithmes de calcul de  $\mathcal{T}(R)$  et des rayons d'apparition.

Les chapitres 6, 7 et 8 sont dédiés aux normes de chanfrein. Nous commençons par fournir une caractérisation des normes de chanfrein au chapitre 6 ; puis nous étudions au chapitre 7 les liens avec la notion d'entiers représentables, qui décrivent les propriétés relatives aux inclusions de boules. Nous y étudions également le voisinage de test pour les masques simples  $3 \times 3$ . Le chapitre 8 est consacré à la caractérisation de  $\mathcal{T}(R)$  pour les masques  $5 \times 5$ .

Finalement, nous établissons au chapitre 9 que couvrir un objet discret par un nombre minimum de boules euclidiennes est un problème NP-difficile.

Nous terminons le document par une conclusion, dans laquelle nous présentons une liste de perspectives et de problèmes ouverts.

# Chapitre 2

## Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions élémentaires et les notations qui seront utilisées tout au long du document. Nous commençons par présenter certaines propriétés de l'espace  $\mathbb{Z}^n$  (en particulier ses symétries), puis nous rappelons les notions de distance et de norme.

### 2.1 Espace discret $\mathbb{Z}^n$

Dans tout le document on travaille dans l'espace discret  $\mathbb{Z}^n$ , considéré de façon à pouvoir utiliser classiquement des points et des vecteurs. Ce cadre nous est donné par l'algèbre commutative, où la notion de module, associé à un espace affine, généralise celle d'espace vectoriel ; nous détaillerons cette notion au §2.3.

Les points de  $\mathbb{Z}^n$  sont appelés *points entiers*, et on note  $O$  l'origine de  $\mathbb{Z}^n$ . Nous serons souvent amené à plonger  $\mathbb{Z}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  ; toutefois nous n'utiliserons pas de considération topologique. Les coordonnées cartésiennes d'un élément  $x$  (point ou vecteur) sont notées  $(x_1, \dots, x_n)$ . Une *forme*  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{Z}^n$  est un sous-ensemble de points de  $\mathbb{Z}^n$ . Le *complément* d'une forme  $\mathcal{S}$ , noté  $\overline{\mathcal{S}}$ , est défini par  $\overline{\mathcal{S}} = \mathbb{Z}^n \setminus \mathcal{S}$ .

On appelle *cône vectoriel* engendré par les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ , l'ensemble des combinaisons linéaires *positives entières* de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) &= \{ \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N} \} \\ &= \vec{v}_1 \mathbb{N} + \dots + \vec{v}_k \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

De manière analogue, le *cône affine* engendré par le point  $p$  et les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  est  $\mathcal{C}(p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = p + \mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ . La figure 2.1 présente un exemple de cône affine. Le cône  $\mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  est ainsi l'intersection du réseau engendré par les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  avec le cône « réel »  $\vec{v}_1 \mathbb{R}_+ + \dots + \vec{v}_k \mathbb{R}_+$ .

#### 2.1.1 Symétries

L'espace  $\mathbb{Z}^n$  possède un ensemble de symétries naturelles ; nous rappelons ici des éléments et notations de [Thi01], voir également [KR04, §14.3]. Les symétries axiales naturelles de  $\mathbb{Z}^n$  sont de deux types :

- les symétries d'équations  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  ;
- les symétries d'équations  $x_i = x_j$ , pour tout  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq i < j \leq n$ .

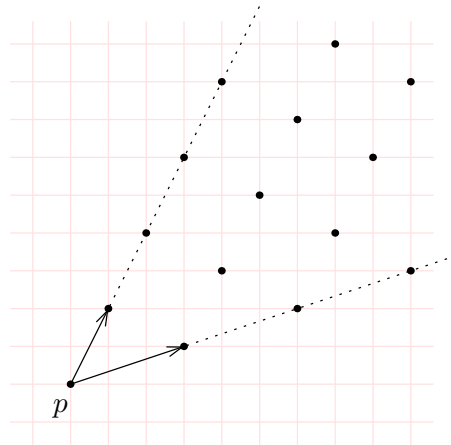


FIG. 2.1 – Le cône affine  $\mathcal{C}(p, (3, 1), (1, 2))$ .

Le *groupe de symétrie* de  $\mathbb{Z}^n$  est la fermeture transitive de ces symétries axiales, on le note  $\Sigma^n$ . Toute symétrie  $\sigma$  de  $\Sigma^n$  est appelée *G-symétrie*. Ces G-symétries séparent l'espace en *G-cônes*. Par exemple en dimension 2 (voir la figure 2.2), le groupe est constitué de 4 symétries axiales et de 4 rotations — d'angles 0 (identité),  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ ; ce qui porte le cardinal de  $\Sigma^2$  à 8 symétries. En dimension 2, les G-cônes sont appelés *octants*. Notons qu'un vecteur donné peut appartenir à plusieurs G-cônes (au plus  $n$ ), dans le cas où il est colinéaire à un axe de G-symétrie. Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$  et toute symétrie  $\sigma \in \Sigma^n$ , les coordonnées de  $\sigma(x)$  peuvent être obtenues par permutation(s) et changement(s) de signe des coordonnées de  $x$  (une permutation résulte d'une symétrie par rapport à l'hyperplan  $x_i = x_j$ , tandis qu'un changement de signe est le résultat d'une symétrie par rapport à l'hyperplan  $x_i = 0$ ). En dimension  $n$  nous avons  $n!$  permutations et  $2^n$  changements de signe possible. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le cardinal de  $\Sigma^n$  est ainsi égal à  $2^n n!$ , soit 8, 48 et 384 en dimension 2, 3 et 4.

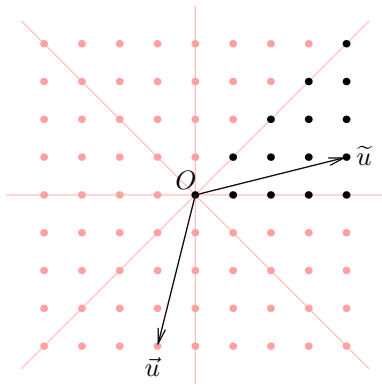


FIG. 2.2 – Les G-symétries de  $\mathbb{Z}^2$  séparent le plan discret en 8 G-cônes. Le générateur de  $\mathbb{Z}^2$  est dessiné en points forts. Le vecteur  $\tilde{u}$  est le représentant de  $\vec{u}$ .

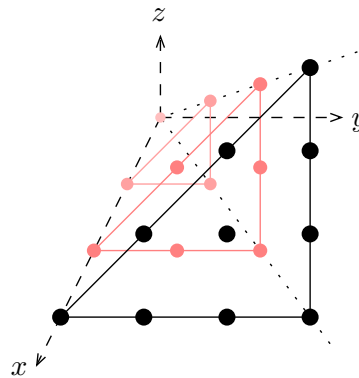


FIG. 2.3 – Le générateur de  $\mathbb{Z}^3$ .

Le *générateur*  $G(\mathcal{S})$  d'une forme  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$  est :

$$G(\mathcal{S}) = \{ p \in \mathcal{S} : p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0 \}. \quad (2.2)$$

Le générateur de  $\mathbb{Z}^n$  est donc le G-cône de  $\mathbb{Z}^n$  engendré par la base canonique (voir les figures 2.2 et 2.3) : on a  $G(\mathbb{Z}^2) = \mathcal{C}((1, 0), (1, 1))$ ,  $G(\mathbb{Z}^3) = \mathcal{C}((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ , etc. Suivant cette notion de G-symétrie, on dit qu'une forme  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$  est *G-symétrique* si pour toute G-symétrie  $\sigma \in \Sigma^n$ , on a  $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$  (voir la figure 2.4). Par conséquent, si  $\mathcal{S}$  est G-symétrique, alors  $\mathcal{S}$  est égale à l'union des images de  $G(\mathcal{S})$  par toutes les G-symétries de  $\mathbb{Z}^n$ . Les G-symétries seront très utilisées car ce document traite en grande partie des inclusions de boules, et les distances que nous utilisons engendrent naturellement des boules G-symétriques. Afin de calculer ces inclusions, il sera souvent suffisant de considérer le générateur (ou un G-cône particulier) des boules.

Les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  sont dits *G-adjacents* s'ils appartiennent à un même G-cône. Autrement dit,  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  sont G-adjacents s'il existe une symétrie  $\sigma \in \Sigma^n$  telle que  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  appartiennent tous à  $\sigma(G(\mathbb{Z}^n))$ . On note cette relation  $G_{adj}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ . Si les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  ne sont pas G-adjacents, on écrit  $\neg G_{adj}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ .

On appelle *représentant* de  $\vec{v}$  dans  $G(\mathbb{Z}^n)$ , noté  $\tilde{v}$ , le vecteur de  $G(\mathbb{Z}^n)$  vérifiant  $\tilde{v} = \sigma(\vec{v})$  pour une certaine symétrie  $\sigma \in \Sigma^n$ . Tout vecteur  $\vec{v}$  possède un unique représentant, dont on calcule les coordonnées en ordonnant par ordre décroissant les valeurs absolues des coordonnées de  $\vec{v}$ . Par exemple, le vecteur  $\vec{v} = (3, -5, -3, 1)$  a pour représentant  $\tilde{v} = (5, 3, 3, 1)$ .

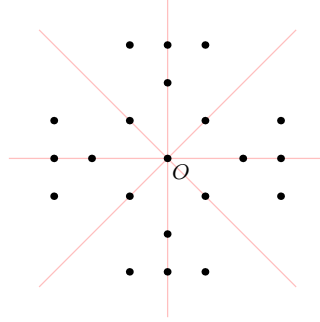


FIG. 2.4 – Une forme  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^2$  G-symétrique.

### 2.1.2 Points visibles et suites de Farey

Un point  $p \in \mathbb{Z}^n$  est dit *visible* si le segment  $[Op]$  ne contient aucun point entier excepté  $O$  et  $p$  (autrement dit, le point  $p$  est visible *depuis*  $O$ ). Un point  $p$  est donc visible si ses coordonnées sont premières entre elles. De même, un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{Z}^n$  est dit visible si le point  $p = O + \vec{v}$  est visible. L'ensemble des points visibles de  $\mathbb{Z}^n$  est noté  $\mathcal{V}^n$ .

Les suites de Farey sont des suites de fractions étudiées en géométrie des nombres, voir [HW78, chapitre 3]. Nous rappelons leur définition et leur lien avec les points visibles. Soit  $k$  un entier strictement positif. La *suite de Farey* d'ordre  $k$  est la suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 et dont les dénominateurs n'excèdent pas  $k$ . À chaque fraction irréductible  $0 \leq \frac{y}{x} \leq 1$  on peut associer un vecteur (ou un point) visible de coordonnées  $(x, y)$  appartenant au générateur du plan discret  $\mathbb{Z}^2$ , comme illustré sur la figure 2.5. Par abus de notation on dit qu'un vecteur  $\vec{v}$  (resp. un point  $p$ ) de coordonnées  $(x, y)$  appartient à une suite de Farey  $F_k$  si  $\vec{v}$  (resp.  $p$ ) appartient à  $G(\mathcal{V}^2)$  et si sa fraction associée  $\frac{y}{x}$  appartient à  $F_k$ . Les éléments de la suite de Farey  $F_k$  sont donc les vecteurs visibles de  $G(\mathbb{Z}^2)$  dont les abscisses n'excèdent pas  $k$ . Étant donné que  $F_k$  est ordonnée par ordre croissant, il est équivalent de dire que les vecteurs de  $F_k$  sont ordonnés par ordre angulaire croissant, par rapport à l'axe horizontal. Cauchy a montré que si  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont deux termes consécutifs d'une suite de Farey  $F_k$  (on dit

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{0}{1}, \frac{1}{1}; \\
 F_2 &= \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}; \\
 F_3 &= \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}; \\
 F_4 &= \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}; \\
 F_5 &= \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}; \\
 F_6 &= \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.
 \end{aligned}$$

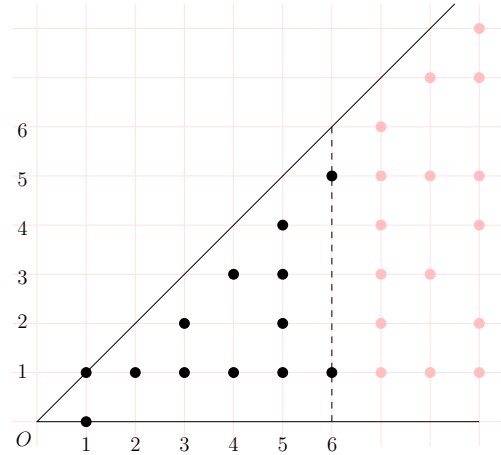


FIG. 2.5 – À gauche : les 6 premières suites de Farey. À droite : les points de la suite de Farey  $F_6$  (en noir).

alors que  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont *voisins* dans  $F_k$ ), alors  $bc - ad = 1$ . Réciproquement, si  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont deux fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 et telles que  $bc - ad = 1$ , alors il existe une suite de Farey dans laquelle  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont consécutifs [HW78]. Un corollaire est que si  $\frac{a}{b}, \frac{e}{f}, \frac{c}{d}$  sont trois termes consécutifs d'une suite de Farey, alors  $\frac{e}{f}$  est le *médian* de  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ , c'est-à-dire  $\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d}$ . Par exemple  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$  se suivent dans  $F_5$ , et on a  $\frac{1}{3} = \frac{1+2}{4+5}$ . On peut utiliser cette propriété pour construire récursivement les suites de Farey :  $F_{k+1}$  est obtenue en insérant dans  $F_k$  tous les médians des voisins de  $F_k$  dont le dénominateur n'excède pas  $k + 1$ .

Nous développerons certaines propriétés des suites de Farey au chapitre 5, pour décrire les inclusions de disques euclidiens.

## 2.2 Distance, boule

Dans ce paragraphe,  $E$  est un ensemble non vide.

**Définition 2.1 (Distance [Blu70])** Une distance  $d$  sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant :

$$\begin{aligned}
 \text{séparation :} & \quad \forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y ; \\
 \text{symétrie :} & \quad \forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x) ; \\
 \text{inégalité triangulaire :} & \quad \forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) .
 \end{aligned}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la distance employée, on note  $pq = d(p, q)$ . L'ensemble  $E$  muni d'une distance  $d$  est appelé un *espace métrique*. Une distance *discrète* est par définition une distance à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

La distance euclidienne  $d_e$ , définie par

$$d_e(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2} , \tag{2.3}$$

est couramment utilisée en géométrie discrète, mais elle n'est pas une distance discrète. Si l'on souhaite utiliser la distance euclidienne tout en travaillant avec des entiers, on peut utiliser les valeurs données par  $d_e^2$ . Notons que  $d_e^2$  n'est pas une distance car elle ne satisfait pas l'inégalité triangulaire : par exemple pour les points  $p(1,0)$  et  $q(2,0)$ , on a  $d_e^2(O,p) + d_e^2(p,q) = 1 + 1 = 2$ , tandis que  $d_e^2(O,q) = 4$ . On peut aussi remarquer que  $\lfloor d_e \rfloor$  (arrondi de  $d_e$ ) et  $\lfloor d_e \rfloor$  (partie entière de  $d_e$ ) ne sont pas des distances, tandis que  $\lceil d_e \rceil$  (troncature supérieure) est bien une distance [KR04].

Étant donné leur simplicité, les distances  $d_1$  et  $d_\infty$  sont également couramment utilisées :

$$d_1(p, q) = \sum_{i=1}^n |q_i - p_i| \quad ; \quad d_\infty(p, q) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|q_i - p_i|\}. \quad (2.4)$$

$d_1$  est connue sous le nom de distance de Manhattan ou city-block ;  $d_\infty$  est appelée distance de Chebyshev, ou parfois chessboard. Dans  $\mathbb{Z}^2$ ,  $d_1$  et  $d_\infty$  sont également respectivement appelées distances de 4-connexité ( $d_4$ ) et de 8-connexité ( $d_8$ ). Contrairement à  $d_e$ , ce sont des distances *locales*, c'est-à-dire qu'elles peuvent être calculées par la propagation d'informations de distance de proche en proche. Deux points  $p$  et  $q$  de  $\mathbb{Z}^2$  sont dits 4-voisins si  $d_4(p, q) = 1$ , autrement dit si une seule de leurs coordonnées diffère, et diffère de 1 (voir la figure 1.5). De même,  $p$  et  $q$  sont 8-voisins si  $d_8(p, q) = 1$ , autrement dit si  $p \neq q$  et si chacune de leurs coordonnées diffère d'au plus 1. Un chemin 4-connexe (resp. 8-connexe) est une suite de points  $p_1, \dots, p_k$  telle que pour tout  $i \in [1..k - 1]$ ,  $p_i$  et  $p_{i+1}$  sont 4-voisins (resp. 8-voisins). En l'occurrence, la distance entre  $p$  et  $q$  pour  $d_4$  est la taille d'un plus petit chemin 4-connexe qui relie  $p$  et  $q$ . De même,  $d_8(p, q)$  est la taille d'un plus petit chemin 8-connexe qui joint  $p$  et  $q$ , voir des exemples sur la figure 2.6. De manière similaire, dans  $\mathbb{Z}^3$ ,  $d_1$  et  $d_\infty$  sont notées  $d_6$  et  $d_{26}$ , d'après le cardinal du voisinage



FIG. 2.6 – Des chemins minimaux entre  $p$  et  $q$ , pour  $d_4$  (à gauche) et  $d_8$  (à droite).

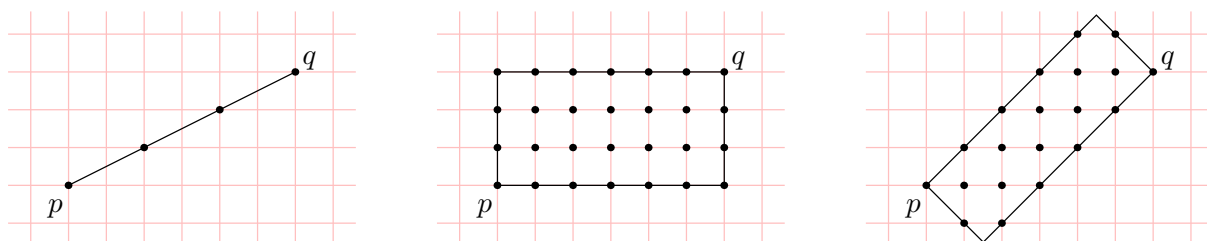


FIG. 2.7 – Intervalles  $I(p, q)$  pour (de gauche à droite)  $d_e$ ,  $d_4$  et  $d_8$ .

induit par la distance.

Ces distances ont l'intérêt d'être très simples à calculer ; en revanche, puisque leurs boules sont des carrés, elles présentent une forte anisotropie.

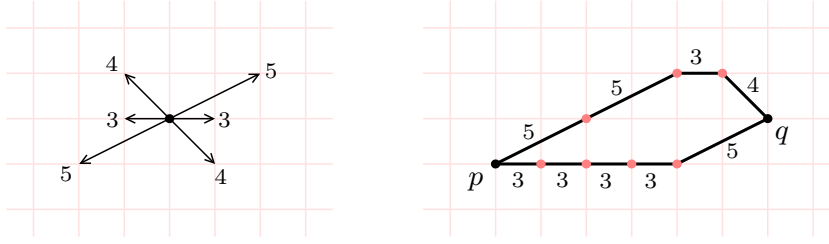


FIG. 2.8 – À gauche : un masque de chanfrein  $\mathcal{M}$ . À droite : deux  $\mathcal{M}$ -chemins minimaux (de coût 17) joignant  $p$  et  $q$ .

Les *distances de chanfrein* [Bor84][Bor86][Thi01] constituent une classe très riche de distances locales. Un *masque de chanfrein*  $\mathcal{M}$  est un ensemble de vecteurs pondérés (ou *pondérations*)  $\mathcal{M} = \{(\vec{v}_i, w_i)\}_{1 \leq i \leq m}$  où :

- les  $\vec{v}_i$  sont des vecteurs de  $\mathbb{Z}_*^n$ , appelés *déplacements* ;
- les  $w_i$  sont des entiers strictement positifs, appelés *poids* ;
- l'ensemble des déplacements de  $\mathcal{M}$  contient une base de  $\mathbb{Z}^n$  ;
- $\mathcal{M}$  est central-symétrique.

Étant donné un masque de chanfrein  $\mathcal{M} = \{(\vec{v}_i, w_i)\}_{1 \leq i \leq m}$ , un  $\mathcal{M}$ -chemin  $\mathcal{P}$  reliant  $p$  à  $q$  est une suite  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$  composée de vecteurs de  $\mathcal{M}$  et telle que  $p + \vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_k = q$ . Le *coût* de ce chemin est la somme des poids de ses vecteurs. Un *chemin minimal* entre  $p$  et  $q$  est par définition un chemin de coût minimal reliant  $p$  à  $q$ . La *distance de chanfrein*  $d_{\mathcal{M}}(p, q)$  entre  $p$  et  $q$  est le coût d'un chemin minimal joignant  $p$  et  $q$ .

Pour tout masque de chanfrein  $\mathcal{M}$ ,  $d_{\mathcal{M}}$  est bien une distance [Ver91, page 20] :

- la séparation est assurée par le fait que les poids  $w_i$  sont strictement positifs ;
- la symétrie de  $\mathcal{M}$  implique la symétrie de  $d_{\mathcal{M}}$  ;
- l'inégalité triangulaire est respectée par définition du chemin minimal.

De plus,  $d_{\mathcal{M}}$  est une distance sur  $\mathbb{Z}^n$  car l'ensemble des déplacements contient une base de  $\mathbb{Z}^n$ . La figure 2.8 illustre des chemins minimaux pour le masque  $\{((1, 0), 3), ((1, -1), 4), ((2, 1), 5)\}$ . Remarquons que  $d_4$  et  $d_8$  sont des distances de chanfrein, dont les pondérations du générateur sont  $((1, 0), 1)$  pour  $d_4$ , et  $((1, 0), 1), ((1, 1), 1)$  pour  $d_8$ .

Il existe d'autres familles de distances étudiées dans le domaine de la géométrie discrète (citons par exemple les distances de séquences de voisinage, encore appelées distances octogonales généralisées) ; voir [KR04] pour des références.

Pour tout couple de points  $p, q \in \mathbb{Z}^n$ , l'*intervalle de distance*  $I_d(p, q)$  est l'ensemble des points qui satisfont (pour  $d$ ) l'égalité triangulaire entre  $p$  et  $q$  :

$$I_d(p, q) = \{z \in \mathbb{Z}^n : d(p, z) + d(z, q) = d(p, q)\}. \quad (2.5)$$

Des exemples d'intervalles sont présentés sur la figure 2.7.

**Définition 2.2 (Boule)** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. La boule de centre  $p \in E$  et de rayon  $r \in \mathbb{R}_+$  est l'ensemble

$$\mathcal{B}_d(p, r) = \{q \in E : d(p, q) \leq r\}. \quad (2.6)$$



Nous employons donc le terme *boule* pour désigner une boule *fermée*. Si la distance est fixée on emploie simplement la notation  $\mathcal{B}(p, r)$ . On utilisera souvent des boules de centre  $O$ ; pour simplifier la notation, on écrit  $B_r$  pour désigner une boule de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Par définition, les boules d'une distance donnée vérifient la propriété d'*imbrication* :

$$\forall p \in E, r \leq r' \Rightarrow \mathcal{B}(p, r) \subseteq \mathcal{B}(p, r'). \quad (2.7)$$

Une distance est dite  $G$ -symétrique si toutes ses boules sont  $G$ -symétriques. C'est le cas pour les distances classiques  $d_e$ ,  $d_1$  et  $d_\infty$ ; mais pas pour la distance induite par le masque de la figure 2.8, qui est seulement central-symétrique.

L'espace  $\mathbb{Z}^n$  étant dénombrable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les valeurs atteintes par toute distance sur  $\mathbb{Z}^n$  ne remplissent pas  $\mathbb{R}_+$ . On remarque également que les valeurs atteintes par une distance discrète ne remplissent pas nécessairement  $\mathbb{N}$ . Toute boule de  $\mathbb{Z}^n$  a donc une infinité de rayons réels, et éventuellement plusieurs rayons entiers. On note  $\text{Im}(d)$  l'ensemble *image* de  $d$  :

$$\text{Im}(d) = \{ x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}^n, d(p, q) = x \}. \quad (2.8)$$

Les distances  $d_1$  et  $d_\infty$  ont toutes deux  $\mathbb{N}$  comme ensemble image; pour la distance euclidienne on a  $\text{Im}(d_e) = \{ \sqrt{x^2 + y^2} : x, y \in \mathbb{N} \} = \{0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, \dots\}$ . Concernant le masque  $\mathcal{M}$  présenté sur la figure 2.8, on peut vérifier que  $\text{Im}(d_{\mathcal{M}}) = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ .

On dit qu'un réel positif  $x$  est  *$d$ -représentable* si  $x \in \text{Im}(d)$ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la distance utilisée, on dit simplement que  $x$  est représentable. Le plus grand nombre  $d$ -représentable inférieur à  $x$  est noté  $[x]_d$  :

$$[x]_d = \max\{ y \in \text{Im}(d) : y \leq x \}. \quad (2.9)$$

Deux rayons  $r$  et  $r'$  sont dits équivalents si ce sont deux rayons d'une même boule :

$$r \sim_d r' \Leftrightarrow \mathcal{B}_d(O, r) = \mathcal{B}_d(O, r') \Leftrightarrow [r]_d = [r']_d. \quad (2.10)$$

Finalement, le rayon  $d$ -représentable d'une boule  $B$  est noté  $\text{rad}_d(B)$  (voir la figure 2.9). Puisque l'on considère des boules fermées, le rayon représentable d'une boule est le plus petit rayon qui engendre  $B$  :

$$\text{rad}_d(\mathcal{B}_d(O, r)) = [r]_d. \quad (2.11)$$

Sur les figures, nous représentons une boule discrète soit par l'ensemble de ses points, soit par la frontière d'une boule réelle de même rayon (par exemple un cercle dans  $\mathbb{R}^2$ ). Ces deux types de représentation apparaissent sur la figure 2.9. Notons que deux boules  $B$  et  $B'$  de  $\mathbb{Z}^n$  de rayons  $r$  et  $r'$  peuvent satisfaire  $B \subseteq B'$  sans que les boules dans  $\mathbb{R}^n$  de mêmes centres et rayons ne vérifient l'inclusion, comme illustré sur la figure 2.10. Ceci peut rendre certaines figures contre-intuitives.

## 2.3 Norme

La notion de norme est usuellement définie sur un espace vectoriel  $(V, +, \cdot)$  [Bou74]. Cependant  $(\mathbb{Z}^n, +, \cdot)$  n'est pas un espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}$  car  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  n'est pas un corps\*. En effet,

---

\*Nous employons ici les notations usuelles de l'addition  $+$  et de la multiplication  $\times$  dans  $\mathbb{Z}$ .

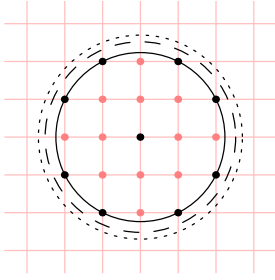


FIG. 2.9 – Toute boule a une infinité de rayons réels.  $B$  est une boule euclidienne (dessinée par des points) de rayon représentable  $\sqrt{5}$ .

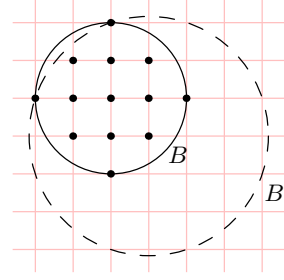


FIG. 2.10 – La boule discrète  $B$  de rayon 2 est incluse dans la boule discrète  $B'$  de rayon  $\sqrt{10}$ , ce qui n'est pas le cas pour leurs homologues dans  $\mathbb{R}^2$ .

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \times)$  ne possède pas la structure de groupe, car un élément donné de  $\mathbb{Z}$  n'a en général pas d'inverse dans  $\mathbb{Z}$  pour la multiplication (en fait, seul 1 est inversible). En comparaison,  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$  est bien un groupe.

La notion de *module* généralise la notion d'espace vectoriel : un *module*  $(M, +, \cdot)$  sur l'ensemble  $A$  (ou  $A$ -module) possède par définition toutes les propriétés d'un espace vectoriel  $(M, +, \cdot)$  sur  $A$ , à la différence que l'ensemble des scalaires  $(A, +, \times)$  est un anneau et non un corps. On rappelle qu'un anneau est une généralisation du corps, dans le sens où la structure de groupe de  $(A \setminus \{0\}, \times)$  n'est pas requise.

Dans un espace vectoriel de dimension  $n$ , une base est un ensemble de  $n$  vecteurs linéairement indépendants. Dans un module, une base doit de plus être *unimodulaire*, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice formée par les vecteurs de la base vaut  $\pm 1$ .

$\mathbb{Z}^n$  est un  $\mathbb{Z}$ -module, auquel on peut associer une norme au sens classique<sup>†</sup> :

**Définition 2.3 (Norme [Bou74][Thi01])** Soit  $(M, +, \cdot)$  un module sur l'anneau  $A$ , d'élément neutre  $\vec{0}$ . Une norme  $\|\cdot\|$  sur  $M$  est une application de  $M$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{séparation :} & \quad \forall x \in M, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0} ; \\ \text{homogénéité :} & \quad \forall x \in M \text{ et } \lambda \in A, \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| ; \\ \text{inégalité triangulaire :} & \quad \forall x, y \in M, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| . \end{aligned}$$

Si  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $M$ , le couple  $(M, \|\cdot\|)$  est appelé *module normé*. Maintenant, soit  $d$  la fonction définie par  $d(x, y) = \|y - x\|$ . L'homogénéité de  $\|\cdot\|$  implique la propriété de symétrie pour  $d$ , ainsi  $d$  est une distance (appelée *distance induite par  $\|\cdot\|$* ). Un module normé est donc un espace métrique homogène. De plus, la distance induite  $d$  est invariante par translation. Nombre de distances usuelles sont induites par des normes ; c'est le cas de  $d_1$ ,  $d_e$  et  $d_\infty$ . Elles sont respectivement induites par  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\ell_\infty$ . On rappelle que les normes  $\ell_p$  sont définies pour tout  $p \geq 1$  par

$$\ell_p(x) = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.12)$$

<sup>†</sup>Une norme sur  $\mathbb{Z}^n$  est ainsi la discrétisation de Gauss d'une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

En revanche, une distance de chanfrein n'est en général pas induite par une norme. Par exemple, la distance présentée sur la figure 2.8 n'est pas homogène selon l'axe vertical : le déplacement  $(0, 1)$  a un coût de  $7 (= 3 + 4)$ , alors que le déplacement  $(0, 2)$  a un coût de  $12 (= 5 + 4 + 3)$ .



## Chapitre 3

# Calcul de l'axe médian discret

Ce chapitre est consacré aux propriétés des inclusions de boules et du voisinage  $\mathcal{T}(R)$  communes à toute distance. Nous définissons également les outils que nous utilisons pour étudier les voisinages. Nous donnons au §3.1 les définitions de boule maximale et d'axe médian, et introduisons la notion de boule couvrante et sa relation avec l'axe médian. Les  $R$ -voisinages et le voisinage minimum  $\mathcal{T}(R)$  sont définis au §3.2, où nous prouvons l'unicité (et les symétries) du  $R$ -voisinage minimum  $\mathcal{T}(R)$ . Nous reformulons également une caractérisation utile de  $\mathcal{T}(R)$ , uniquement en termes de boules (plutôt que de forme). Après avoir détaillé les étapes du calcul de l'axe médian au §3.3, nous présentons au §3.4 les outils que nous utilisons dans la suite du mémoire pour décrire les voisinages  $\mathcal{T}(R)$  et les rayons d'apparitions des vecteurs, en particulier la relation de domination entre vecteurs, qui fournit un critère d'exclusion de  $\mathcal{T}(R)$ , et la notion de serrure, qui nous permet d'aborder la question de la recherche des rayons d'apparition.

### 3.1 Axe médian

Dans cette section, on fixe une distance  $d$  sur  $\mathbb{Z}^n$ . On note  $I_p(\mathcal{S})$  la plus grande boule centrée en  $p$  et incluse dans  $\mathcal{S}$ , voir la figure 3.1.

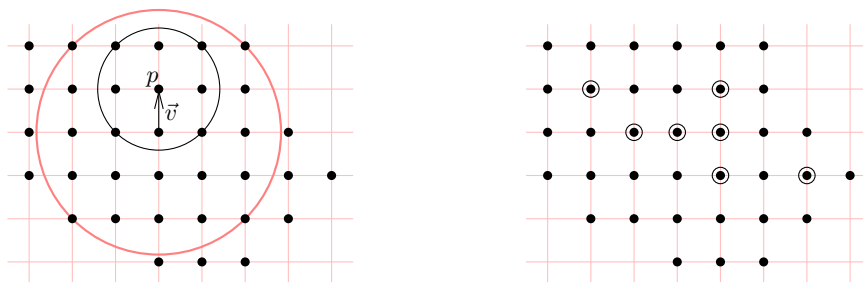


FIG. 3.1 – À gauche : les boules  $I_p(\mathcal{S})$  et  $I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$  d'une forme  $\mathcal{S}$ , pour  $d_e$ . Leurs rayons représentables sont respectivement  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{8}$ .  $I_p(\mathcal{S})$  est incluse dans  $I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$  : on dit que  $\vec{v}$  interdit  $p \in \text{AM}(\mathcal{S})$ . À droite : l'axe médian de  $\mathcal{S}$  (points cerclés) pour  $d_e$ .

**Définition 3.1 (Boule maximale [PR67])** Soit  $\mathcal{S}$  une forme de  $\mathbb{Z}^n$  et  $B$  une boule incluse dans  $\mathcal{S}$ . La boule  $B$  est dite maximale dans  $\mathcal{S}$  s'il n'existe aucune autre boule incluse dans  $\mathcal{S}$  et qui contient  $B$ .

Il est clair que seules les boules  $I_p(\mathcal{S})$  sont susceptibles d'être des boules maximales de  $\mathcal{S}$ , et donc :

$$B \text{ est maximale dans } \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall q \in \mathcal{S}, B \not\subseteq I_q(\mathcal{S}). \quad (3.1)$$

**Définition 3.2 (Axe médian [PR67])** *L'axe médian d'une forme  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$  est l'ensemble des centres (et rayons) des boules maximales de  $\mathcal{S}$ .*

La figure 3.1 illustre un axe médian pour la distance euclidienne. Afin de décrire les inclusions de boules, nous utiliserons souvent la notion de *boule couvrante* :

**Définition 3.3 (Boule couvrante et rayon de couverture)** *Soit  $B$  une boule et  $p \in \mathbb{Z}^n$  ; on note  $H_p(B)$  la plus petite boule centrée en  $p$  et qui contient  $B$ . Le rayon  $d$ -représentable de  $H_p(B)$ , noté  $\mathcal{R}_p(B)$ , s'exprime*

$$\mathcal{R}_p(B) = \min\{r \in \text{Im}(d) : B \subseteq \mathcal{B}(p, r)\}. \quad (3.2)$$

De manière équivalente, ce *rayon de couverture* est donné par la distance à  $p$  d'un point de  $B$  qui maximise la distance à  $p$  :

$$\mathcal{R}_p(B) = \max\{d(p, q) : q \in B\}. \quad (3.3)$$

La boule couvrante  $H_p(B)$  est ainsi

$$H_p(B) = \mathcal{B}(p, \mathcal{R}_p(B)). \quad (3.4)$$

L'observation suivante permet d'exprimer l'axe médian en utilisant des boules  $H$ , nous l'illustrons sur la figure 3.2.

**Observation 3.1** *Soit  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$  une forme,  $p \in \mathcal{S}$ ,  $\vec{v} \in \mathbb{Z}_*^n$ , et  $B = I_p(\mathcal{S})$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $\vec{v}$  interdit à  $p$  d'appartenir à l'axe médian de  $\mathcal{S}$ ,
- (b)  $B \subseteq I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$ ,
- (c)  $H_{p-\vec{v}}(B) \subseteq \mathcal{S}$ .

**Preuve.** Par définition de l'axe médian nous avons (a)  $\Leftrightarrow$  (b). On a aussi clairement (c)  $\Rightarrow$  (a). Nous montrons finalement que (b)  $\Rightarrow$  (c) : si  $B \subseteq I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$  alors  $H_{p-\vec{v}}(B) \subseteq I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$ , et donc  $B \subseteq H_{p-\vec{v}}(B) \subseteq I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ .  $\square$

Le lemme suivant donne une borne simple sur le rayon de couverture, et est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire.

**Lemme 3.1 (Rayon de couverture)** *Soient  $p, q$  deux points de  $\mathbb{Z}^n$ , et  $B$  une boule de centre  $p$  et de rayon  $r$ . On a*

$$\mathcal{R}_q(B) \leq r + d(p, q).$$

**Preuve.** Soit  $x$  un point de  $B$  qui maximise la distance à  $q$  (voir la figure 3.3). Le rayon représentable de la boule  $H_q(B)$  est donc  $\mathcal{R}_q(B) = d(q, x)$ . Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\mathcal{R}_q(B) = d(q, x) \leq d(q, p) + d(p, x).$$

Or  $x$  appartient à  $B$  donc  $d(p, x) \leq r$ , par conséquent  $\mathcal{R}_q(B) \leq d(q, p) + r$ .  $\square$

Dans le cas de la distance euclidienne, l'égalité  $\mathcal{R}_q(B) = d(q, p) + d(p, x)$  est respectée uniquement si  $x$  appartient à la droite  $(pq)$ . En revanche, pour la distance  $d_4$  (resp.  $d_8$ ), l'égalité est toujours vérifiée. En effet, pour tout point  $x$  de  $B$  maximisant la distance à  $q$ , il existe un chemin minimal 4-connexe (resp. 8-connexe) de  $q$  à  $x$  qui passe par  $p$ , comme indiqué sur la figure 3.4. Nous formalisons cette observation au paragraphe 7.1.2.

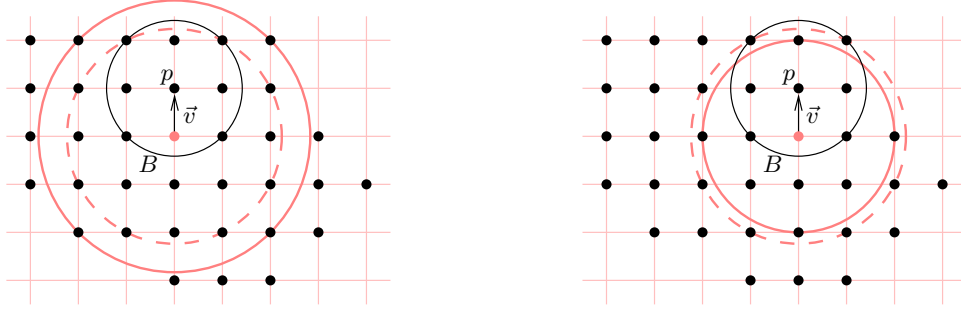


FIG. 3.2 –  $B$  est la boule  $I_p(\mathcal{S})$ , en noir. Les boules  $I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$  et  $H_{p-\vec{v}}(B)$  apparaissent en gris et gris pointillés. À gauche :  $\vec{v}$  interdit  $p \in \text{AM}(\mathcal{S})$ , on a  $B \subseteq H_{p-\vec{v}}(B) \subseteq I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$ . À droite :  $\vec{v}$  n'interdit pas  $p \in \text{AM}(\mathcal{S})$  car  $H_{p-\vec{v}}(B) \not\subseteq \mathcal{S}$ .

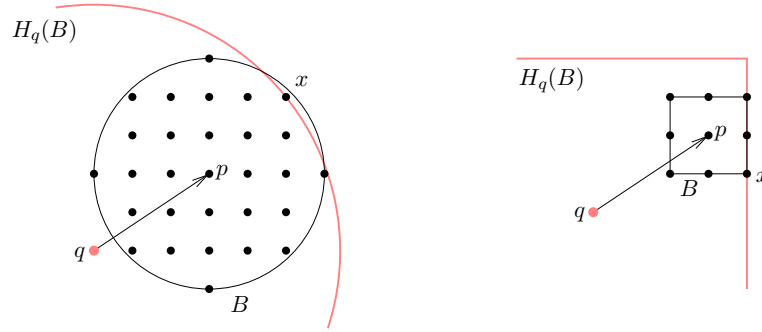


FIG. 3.3 – Pour  $d_e$  à gauche, et  $d_8$  à droite :  $x$  est un point de  $B$  qui maximise la distance à  $q$ .  $H_q(B)$  est la plus petite boule centrée en  $q$  et contenant  $B$ ; son rayon est  $d(q, x)$ .

### 3.2 Le $R$ -voisinage minimum $\mathcal{T}(R)$

Le voisinage de test nécessaire pour extraire l'axe médian dépend à la fois de la distance employée et de l'épaisseur de la forme traitée; nous détaillons ici les notations prises pour décrire les formes de  $\mathbb{Z}^n$ .

Rappelons que  $\text{rad}_d(B)$  est le rayon  $d$ -représentable de la boule  $B$ . Nous étendons la notion de rayon à une forme quelconque de  $\mathbb{Z}^n$  : pour toute forme  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$  et distance  $d$ , on note  $\text{rad}_d(\mathcal{S})$  le rayon  $d$ -représentable d'une plus grande boule incluse dans  $\mathcal{S}$  (ou simplement  $\text{rad}(\mathcal{S})$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $d$ ) :

$$\text{rad}_d(\mathcal{S}) = \max_{p \in \mathcal{S}} \{ \text{rad}_d(I_p(\mathcal{S})) \}. \quad (3.5)$$

Enfin, on note  $\text{CS}_d^n(R)$  l'ensemble des formes de  $\mathbb{Z}^n$  dont les rayons (pour la distance  $d$ ) sont inférieurs à  $R$ . Là encore, on pourra omettre de mentionner  $d$  ou  $n$  lorsque la distance ou la dimension est fixée.

**Définition 3.4 ( $R$ -voisinage)** Un  $R$ -voisinage est un voisinage suffisant pour détecter l'axe médian de toute forme de rayon inférieur à  $R$  :

$$X \text{ est un } R\text{-voisinage} \Leftrightarrow \forall \mathcal{S} \in \text{CS}(R), \forall p \in \mathcal{S}, \left( p \notin \text{AM}(\mathcal{S}) \Rightarrow \exists \vec{v} \in X, I_p(\mathcal{S}) \subset I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S}) \right).$$

Notons que pour toute distance et pour tout  $R \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}_*^n$  est un  $R$ -voisinage. De plus, l'ensemble des vecteurs dont la norme est inférieure à  $R$  est un  $R$ -voisinage borné. La première

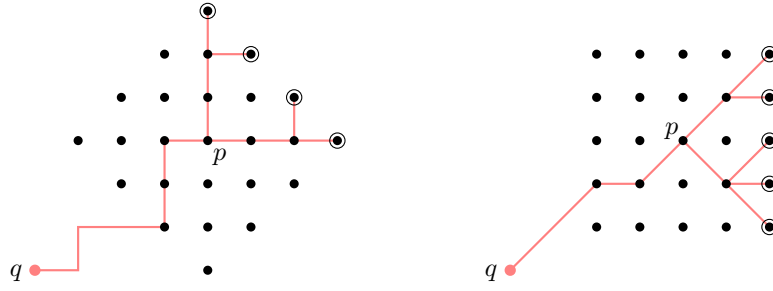


FIG. 3.4 – Une boule  $B$  (points noirs) de centre  $p$ , pour  $d_4$  (gauche) et  $d_8$  (droite). Pour tout point  $x$  de  $B$  qui maximise la distance à  $q$  (points cerclés),  $p$  appartient à l'intervalle  $I(q, x)$ .

propriété importante est l'unicité du  $R$ -voisinage minimum. L'unicité est établie par construction de l'algorithme présenté dans [RT02]; nous fournissons ici une autre preuve :

**Théorème 3.1** *On fixe une distance  $d$ . Pour tout  $R \in \mathbb{R}$ , il existe un unique  $R$ -voisinage de cardinalité minimum. Ce voisinage de test minimum est noté  $\mathcal{T}(R)$ .*

**Preuve.** Supposons qu'il existe un rayon  $R \in \mathbb{R}$  pour lequel il existe deux  $R$ -voisinages différents  $\mathcal{T}(R)$  et  $\mathcal{T}'(R)$ , tous deux de cardinalité minimum. Il existe au moins un vecteur  $\vec{u}$  dans  $\mathcal{T}(R) \setminus \mathcal{T}'(R)$ . De plus, il existe une forme  $\mathcal{S} \in \text{CS}(R)$  et un point  $x \in \mathcal{S}$  tels que  $\vec{u}$  est l'unique vecteur de  $\mathcal{T}(R)$  qui interdit à  $x$  d'appartenir à  $\text{AM}(\mathcal{S})$ , car sinon  $\mathcal{T}(R) \setminus \{\vec{u}\}$  serait un  $R$ -voisinage, contredisant la minimalité de  $\mathcal{T}(R)$ .

Notons  $B = I_x(\mathcal{S})$  et  $H = H_{x-\vec{u}}(B)$ , voir la figure 3.5. Par l'observation 3.1 nous avons  $H \subseteq \mathcal{S}$ , donc  $H \in \text{CS}(R)$ . Puisque  $\{x - \vec{u}\}$  est l'axe médian de  $H$  (c'est une boule) et que  $\vec{u} \notin \mathcal{T}'(R)$ , il existe un vecteur  $\vec{u}' \neq \vec{u}$  dans  $\mathcal{T}'(R)$  qui interdit à  $x$  d'appartenir à  $\text{AM}(H)$ . Maintenant, considérons  $H' = H_{x-\vec{u}'}(B)$ . Le vecteur  $\vec{u}'$  interdit  $x \in \text{AM}(H)$ , donc l'observation 3.1 implique  $H' \subseteq H$ . De plus,  $H$  et  $H'$  ne coïncident pas (elles n'ont pas le même centre), on en déduit que  $H \not\subseteq H'$ . Toujours par l'observation 3.1, nous en déduisons que  $\vec{u}$  n'interdit pas à  $x$  d'appartenir à  $\text{AM}(H')$ . Par conséquent, il existe un vecteur  $\vec{v} \neq \vec{u}$  dans  $\mathcal{T}(R)$  qui interdit  $x \in \text{AM}(H')$ . Cependant, un tel vecteur  $\vec{v}$  interdit également à  $x$  d'appartenir à  $\text{AM}(\mathcal{S})$ , contredisant le fait que  $\vec{u}$  est le seul vecteur interdisant  $x \in \text{AM}(\mathcal{S})$ .

□

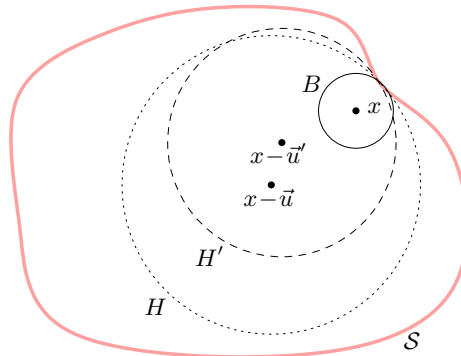


FIG. 3.5 – Une forme  $\mathcal{S}$ , une boule  $B = I_x(\mathcal{S})$ , et deux boules  $H = H_{x-\vec{u}}(B)$ ,  $H' = H_{x-\vec{u}'}(B)$ .



**Corollaire 3.2 (Imbrication des voisinages)** *Si  $0 \leq R \leq R'$  alors  $\mathcal{T}(R) \subseteq \mathcal{T}(R')$ .*

**Preuve.** Supposons que  $\mathcal{T}(R) \not\subseteq \mathcal{T}(R')$ , et soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $\mathcal{T}(R) \setminus \mathcal{T}(R')$ . Par minimalité de  $\mathcal{T}(R)$ , il existe une forme  $\mathcal{S} \in \text{CS}(R)$  et un point  $x \in \mathcal{S}$  tels que  $\vec{u}$  est l'unique vecteur de  $\mathcal{T}(R)$  qui interdit à  $x$  d'appartenir à  $\text{AM}(\mathcal{S})$ . Or  $R \leq R'$  donc  $\mathcal{T}(R')$  est un  $R$ -voisinage, donc il existe  $\vec{v} \in \mathcal{T}(R')$ , différent de  $\vec{u}$ , qui interdit  $x \in \text{AM}(\mathcal{S})$ . Puisque  $\vec{u}$  est le seul vecteur de  $\mathcal{T}(R)$  qui interdit  $x \in \text{AM}(\mathcal{S})$ , on a  $\vec{v} \notin \mathcal{T}(R)$ . Par conséquent  $(\mathcal{T}(R) \setminus \{\vec{u}\}) \cup \{\vec{v}\}$  est un  $R$ -voisinage, ce qui contredit l'unicité de  $\mathcal{T}(R)$ .  $\square$

Puisque les voisinages sont imbriqués, nous pouvons définir le voisinage de test minimum suffisant pour extraire l'AM de toutes les formes de  $\mathbb{Z}^n$ , que l'on note  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{T}(R). \quad (3.6)$$

**Corollaire 3.3 (Symétries des voisinages)** *Pour tout  $R \geq 0$ ,  $\mathcal{T}(R)$  est G-symétrique.*

**Preuve.** Puisque nous considérons des distances G-symétriques, toutes les boules sont G-symétriques. Donc pour toute forme  $\mathcal{S}$  de  $\text{CS}(R)$  et toute G-symétrie  $\sigma$ , on a  $\sigma(\mathcal{S}) \in \text{CS}(R)$ . Comme  $\mathcal{T}(R)$  est un voisinage suffisant pour calculer l'axe médian de  $\sigma(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{T}(R)$  est également G-symétrique.  $\square$

De manière générale, le voisinage de test  $\mathcal{T}(R)$  dispose des mêmes symétries que la distance utilisée. Lorsque l'on considère une distance G-symétrique, par abus de notation on note  $\mathcal{T}(R)$  pour  $\text{G}(\mathcal{T}(R))$ .

Nous rappelons une caractérisation élémentaire de  $\mathcal{T}(R)$ , qui est utilisée dans [RT02] [RT05] [NÉ08]. Cette caractérisation est à la base des algorithmes de calcul des voisinages de test :

**Lemme 3.4** *Pour toute distance,  $\mathcal{T}(R)$  est le plus petit voisinage suffisant pour détecter l'axe médian de toutes les boules de rayon inférieur à  $R$ .*

**Preuve.** Soit  $\Theta(R)$  un voisinage capable de détecter l'axe médian de toutes les boules de rayon inférieur à  $R$ ; il suffit de montrer que  $\Theta(R)$  est un  $R$ -voisinage.

Soit  $\mathcal{S}$  une forme de rayon inférieur à  $R$ , et  $p$  un point de  $\mathcal{S}$  n'appartenant pas à  $\text{AM}(\mathcal{S})$ . Il existe un vecteur  $\vec{v} \in \mathcal{T}(R)$  tel que  $I_p(\mathcal{S}) \subseteq I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$ , on note  $B = I_{p-\vec{v}}(\mathcal{S})$ .  $B$  est incluse dans  $\mathcal{S}$  donc son rayon est inférieur à  $R$ , et on a  $I_p(\mathcal{S}) = I_p(B)$ . L'axe médian de  $B$  est son centre  $\{p - \vec{v}\}$  donc il existe un vecteur  $\vec{u} \in \Theta(R)$  tel que  $I_p(B) \subseteq I_{p-\vec{u}}(B)$ . On a donc  $I_p(\mathcal{S}) = I_p(B) \subseteq I_{p-\vec{u}}(B) \subseteq I_{p-\vec{u}}(\mathcal{S})$ , ce qui prouve que  $\vec{u}$  interdit à  $p$  d'appartenir à  $\text{AM}(\mathcal{S})$ .  $\square$

### 3.3 Méthode générale de calcul de l'axe médian

Nous détaillons dans ce paragraphe les étapes du calcul de l'axe médian d'une forme  $\mathcal{S}$  pour une distance  $d$ . La première étape consiste en la DT de  $\mathcal{S}$ . En notant  $N$  le nombre de points de l'image, cette opération s'effectue en temps  $\mathcal{O}(N)$  pour  $d_e$  en toute dimension [Hir96], ou en temps  $\mathcal{O}(m.N)$  pour toute distance de chanfrein [RP66] [Bor84], où  $m$  est le cardinal du masque de chanfrein  $\mathcal{M}$ . Soit  $D$  la plus grande valeur lue sur la DT, et  $R$  la plus grande valeur  $d$ -représentable strictement inférieure à  $D$  (i.e.,  $R$  est le rayon de  $\mathcal{S}$ ). Le voisinage de test utilisé doit être un  $R$ -voisinage. On procède alors, pour chaque vecteur  $\vec{v}$  du voisinage, à deux opérations :

- calcul de la LUT de  $\vec{v}$ , pour tout  $x$  de 0 à  $R$ ;
- pour tout point  $p \in \mathcal{S}$ , test de l'inéquation  $\text{DT}[p + \vec{v}] \geq \text{LUT}[\vec{v}][\text{DT}[p]]$ .

Le calcul d'une LUT s'effectue en temps  $\mathcal{O}(N)$ , voir [RT02]. Si on a un  $R$ -voisinage de test  $T$  précalculé, la complexité globale est donc  $\mathcal{O}(|T|.N)$  pour  $d_e$ , et  $\mathcal{O}((m + |T|).N)$  pour  $d_M$ .

## 3.4 Outils proposés

### 3.4.1 Domination entre vecteurs

**Définition 3.5 (Domination)** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{Z}_*^n$ , et  $B, B_u, B_v$  trois boules de centres respectifs  $O, O - \vec{u}$  et  $O - \vec{v}$ . On dit que  $\vec{v}$  est dominé par  $\vec{u}$  (noté  $\vec{v} \preceq \vec{u}$ ) ssi pour tout couple  $(B, B_v)$  satisfaisant  $B \subseteq B_v$ , il existe une boule  $B_u$  intercalée entre  $B$  et  $B_v$  :

$$\vec{v} \preceq \vec{u} \Leftrightarrow \forall B, \forall B_v, \left( B \subseteq B_v \Rightarrow \exists B_u \text{ t.q. } B \subseteq B_u \subseteq B_v \right). \quad (3.7)$$

L'intérêt de la notion de domination est la suivante : si  $\vec{v}$  est dominé par  $\vec{u}$ , alors pour toute forme  $\mathcal{S}$  et tout point  $p \in \mathcal{S}$ , il est inutile de tester l'appartenance de  $p$  à l'axe médian de  $\mathcal{S}$  en direction  $\vec{v}$  si on l'a déjà testée en direction  $\vec{u}$ . En effet, si  $\vec{v}$  interdit à  $p$  d'appartenir à  $\text{AM}(\mathcal{S})$ , alors  $\vec{u}$  l'interdit aussi.

On peut formuler la relation de domination en utilisant les boules  $H$  : étant donné que la plus petite boule  $B_v$  contenant  $B$  est  $H_{O-\vec{v}}(B)$ , l'équation (3.7) peut s'écrire

$$\vec{v} \preceq \vec{u} \Leftrightarrow \forall B, \exists B_u \text{ t.q. } B \subseteq B_u \subseteq H_{O-\vec{v}}(B).$$

Puis, en observant qu'il existe une boule  $B_u$  intercalée entre deux formes  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  si et seulement si la plus petite boule  $B_u$  qui contient  $\mathcal{S}$  est incluse dans  $\mathcal{S}'$ , on obtient :

$$\vec{v} \preceq \vec{u} \Leftrightarrow \forall B, H_{O-\vec{u}}(B) \subseteq H_{O-\vec{v}}(B). \quad (3.8)$$

De manière équivalente, on dira qu'un point  $q \in \mathbb{Z}_*^n$  domine un point  $p \in \mathbb{Z}_*^n$  si pour toute boule  $B$  de centre  $O$ , on a l'inclusion  $H_q(B) \subseteq H_p(B)$ , voir un exemple sur la figure 3.6.

On peut bien sûr formuler la relation de domination en utilisant les boules  $I$  : la plus grande boule  $B$  incluse dans  $B_v$  est  $I_O(B_v)$  donc (3.7) peut s'écrire

$$\vec{v} \preceq \vec{u} \Leftrightarrow \forall B_v, \exists B_u \text{ t.q. } I_O(B_v) \subseteq B_u \subseteq B_v.$$

Ensuite, on utilise le fait qu'il existe une boule  $B_u$  intercalée entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  si et seulement si la plus grande boule  $B_u$  incluse dans  $\mathcal{S}'$  contient  $\mathcal{S}$  :  $\vec{v} \preceq \vec{u} \Leftrightarrow \forall B_v, I_O(B_v) \subseteq I_{O-\vec{u}}(B_v)$ . En translatant la boule  $B_v$  du vecteur  $\vec{v}$ , on obtient

$$\vec{v} \preceq \vec{u} \Leftrightarrow \forall B, I_{O+\vec{v}}(B) \subseteq I_{O+\vec{v}-\vec{u}}(B). \quad (3.9)$$

On montre facilement que  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{Z}_*^n$  : elle est clairement réflexive et transitive ; il reste à établir qu'elle est antisymétrique, c'est-à-dire que pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}_*^n$ , on a

$$\vec{u} \preceq \vec{v} \text{ et } \vec{u} \succcurlyeq \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}.$$

Supposons que  $\vec{u} \preceq \vec{v}$  et  $\vec{v} \preceq \vec{u}$ , et soit  $B$  une boule de centre  $O$ . Par définition de  $\preceq$ , on a  $H_{O-\vec{v}}(B) \subseteq H_{O-\vec{u}}(B)$  et  $H_{O-\vec{u}}(B) \subseteq H_{O-\vec{v}}(B)$ , et donc  $H_{O-\vec{u}}(B) = H_{O-\vec{v}}(B)$ . Or deux boules égales ont nécessairement le même centre, par conséquent  $\vec{u} = \vec{v}$ .

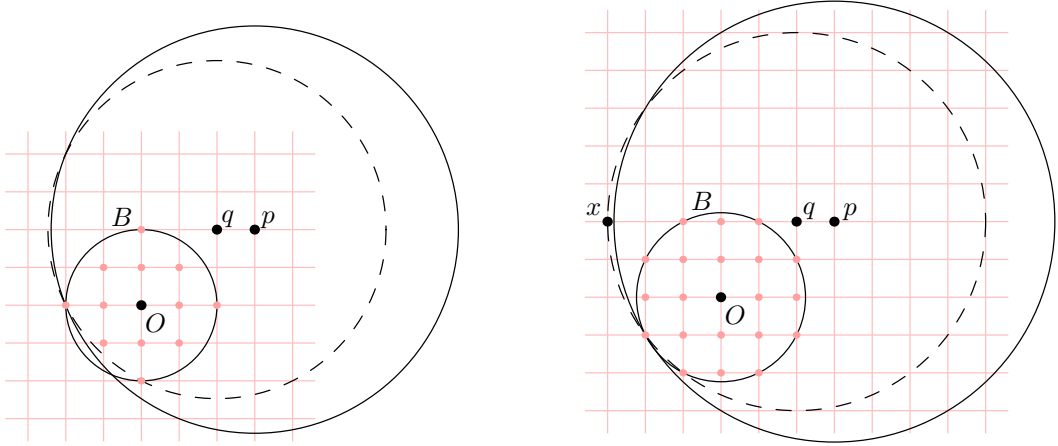


FIG. 3.6 –  $B$  (points gris) est une boule de centre  $O$  et de rayon  $r$  pour  $d_e$ . À gauche : pour  $r = 2$ ,  $H_q(B)$  est incluse dans  $H_p(B)$ . À droite : pour  $r = \sqrt{5}$ , on a un point  $x \in H_q(B) \setminus H_p(B)$ . Le vecteur  $\overrightarrow{Op}$  n'est donc pas dominé par  $\overrightarrow{Oq}$ . On dit encore que  $p$  n'est pas dominé par  $q$ .

Notons que  $\preceq$  n'est pas une relation d'ordre total, il est clair que la majorité des couples de vecteurs  $(\vec{u}, \vec{v})$  est incomparable. Puisque  $\preceq$  est une relation d'ordre, on peut lui associer une relation d'ordre strict  $\prec$ , que l'on emploiera plus fréquemment par la suite :

$$\vec{v} \prec \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} \preceq \vec{u} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{u}.$$

Ainsi, on peut ainsi formuler la domination stricte par :

$$\vec{v} \prec \vec{u} \Leftrightarrow \forall B, H_{O-\vec{u}}(B) \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B). \quad (3.10)$$

**Lemme 3.5 (Exclusion par domination)** *Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}_*^n$ ,*

$$\vec{v} \prec \vec{u} \Rightarrow \vec{v} \text{ n'appartient à aucun } \mathcal{T}(R).$$

**Preuve.** Supposons qu'il existe un rayon  $R \in \mathbb{R}$  pour lequel  $\vec{v} \in \mathcal{T}(R)$ .

- Si  $\vec{u}$  appartient à  $\mathcal{T}(R)$ , alors  $\mathcal{T}(R)$  n'est pas de cardinalité minimale car  $\mathcal{T}(R) \setminus \{\vec{v}\}$  est un  $R$ -voisinage.
- Sinon,  $\mathcal{T}'(R) = (\mathcal{T}(R) \setminus \{\vec{v}\}) \cup \{\vec{u}\}$  est un  $R$ -voisinage ayant même cardinalité que  $\mathcal{T}(R)$ , ce qui contredit l'unicité de  $\mathcal{T}(R)$ .

□

Les relations de domination sont simples pour les distances  $d_4$  et  $d_8$  :

**Lemme 3.6** *On fixe la distance  $d_4$  ou  $d_8$ , et  $p$  un point de  $\mathbb{Z}^n$ . Pour toute boule  $B$  de centre  $O$ , l'ensemble des points  $q$  pour lesquels  $H_q(B) \subseteq H_p(B)$  est l'intervalle  $I(O, p)$ .*

**Preuve.** On note  $r$  le rayon représentable de  $B$ . On a l'inclusion  $H_q(B) \subseteq H_p(B)$  ssi  $H_p(H_q(B)) = H_p(B)$ , autrement dit ssi

$$\mathcal{R}_p(H_q(B)) = \mathcal{R}_p(B). \quad (3.11)$$

Calculons ces rayons de couverture : Pour  $d_4$  (ou  $d_8$ ), le rayon de couverture de  $B$  en direction  $\overrightarrow{Op}$  est simplement donné par  $\mathcal{R}_p(B) = d(O, p) + r$  (voir la figure 3.4). On a de

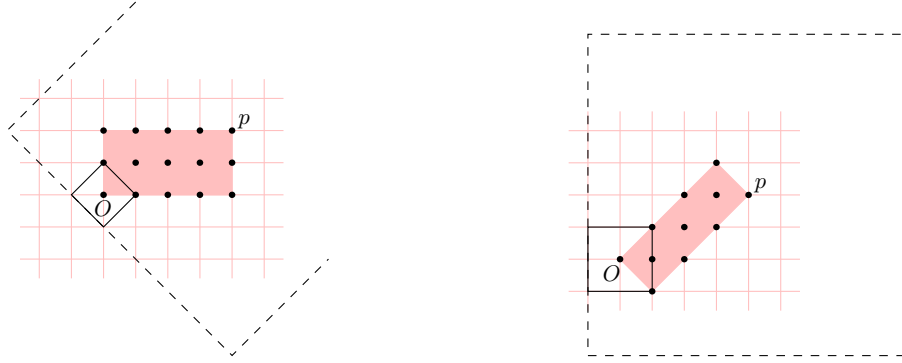


FIG. 3.7 – On considère les distances  $d_4$  (à gauche) et  $d_8$  (à droite). Pour toute boule  $B$  de centre  $O$  et tout  $p \in \mathbb{Z}_*^n$ , le lieu des points  $q$  pour lesquels  $H_q(B) \subseteq H_p(B)$  est l'intervalle  $I(O, p)$ , dessiné en gris.

même  $\mathcal{R}_q(B) = d(O, q) + r$ , et enfin  $\mathcal{R}_p(H_q(B)) = d(p, q) + \mathcal{R}_q(B) = d(p, q) + d(O, q) + r$ . L'équation (3.11) est par conséquent équivalente à  $d(p, q) + d(O, q) + r = d(O, p) + r$ , soit  $d(O, q) + d(q, p) = d(O, p)$ .  $\square$

### 3.4.2 Serrure et $\vec{v}$ -domination

Dans cette section nous présentons la notion de *serrure*, qui va nous permettre de décrire le problème des rayons d'apparition des vecteurs.

**Définition 3.6 (Serrure)** *On fixe une distance  $d$  invariante par translation. La serrure de paramètres  $R \geq 0$  et  $\vec{v} \in \mathbb{Z}_*^n$  est le couple  $\{B_R, H_{O-\vec{v}}(B_R)\}$ . Le rayon de la serrure  $(R, \vec{v})$  est  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_R)$ .*

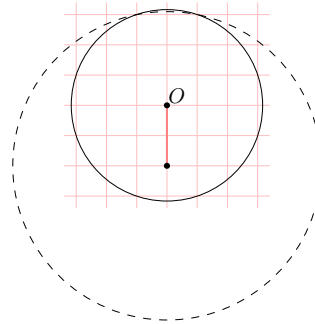


FIG. 3.8 – La serrure euclidienne de paramètres  $r = \sqrt{10}$  et  $\vec{v} = (0, 2)$ . Le rayon de cette serrure est  $\sqrt{5^2 + 1^2}$ .

**Définition 3.7 (Clef)** *Une boule  $B$  est une clef de la serrure  $(R, \vec{v})$  si  $B_R \subsetneq B \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B_R)$ .*

Le *rayon d'apparition* d'un vecteur  $\vec{v}$ , noté  $R_{app}(\vec{v})$ , est le plus petit rayon  $R$  pour lequel  $\vec{v} \in \mathcal{T}(R)$ . Par convention, on écrit  $R_{app}(\vec{v}) = +\infty$  si  $\vec{v}$  n'appartient à aucun  $\mathcal{T}(R)$ . Nous donnons une caractérisation des rayons d'apparition :

**Lemme 3.7 (Caractérisation de  $R_{app}(\vec{v})$ )** *Le rayon d'apparition d'un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{Z}_*^n$  est le rayon de la plus petite serrure  $(R, \vec{v})$  qui ne possède pas de clef :*

$$R_{app}(\vec{v}) = \min \left\{ R : \forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \setminus \{\vec{v}\}, I_{O+\vec{v}}(B_R) \not\subseteq I_{O+\vec{u}}(B_R) \right\} \quad (3.12)$$

$$= \min \left\{ \mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_R) : \forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \setminus \{\vec{v}\}, H_{O-\vec{u}}(B_R) \not\subseteq H_{O-\vec{v}}(B_R) \right\}. \quad (3.13)$$

**Preuve.** Soit  $\rho(\vec{v}) = \min \{ R : \forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \setminus \{\vec{v}\}, I_{O+\vec{v}}(B_R) \not\subseteq I_{O+\vec{u}}(B_R) \}$ . Afin de prouver (3.12) nous montrons les deux propriétés suivantes : **(i)**  $\forall R \geq \rho(\vec{v}), \vec{v} \in \mathcal{T}(R)$  et **(ii)**  $\forall R < \rho(\vec{v}), \vec{v} \notin \mathcal{T}(R)$ .

**(i)** est triviale par définition de  $\rho(\vec{v})$  : si  $R = \rho(\vec{v})$  alors  $\vec{v}$  est le seul vecteur de  $\mathbb{Z}_*^n$  qui interdit  $O + \vec{v} \in \text{AM}(B_R)$ .

Pour prouver **(ii)**, fixons tout d'abord un  $R$  tel que  $R < \rho(\vec{v})$ . Par définition de  $\rho(\vec{v})$ , il existe un point  $q$  différent de  $O$  et de  $p = O + \vec{v}$  pour lequel  $I_p(B_R)$  est strictement incluse dans  $I_q(B_R)$ . D'autre part il existe un vecteur  $\vec{u} \in \mathcal{T}(R)$  qui interdit  $p \in \text{AM}(I_q(B_R))$ , et qui donc interdit également  $p \in \text{AM}(B_R)$ . Le fait important est que  $\vec{u}$  est différent de  $\vec{v}$ , car par construction de  $\vec{u}$  on a  $\|\vec{u}\| < \|\vec{v}\|$ . Pour tout  $R < \rho(\vec{v})$  il existe donc un  $\vec{u} \in \mathcal{T}(R)$  différent de  $\vec{v}$  tel que  $I_p(B_R) \subseteq I_{p-\vec{u}}(B_R)$ ; par minimalité de  $\mathcal{T}(R)$  on déduit que  $\vec{v} \notin \mathcal{T}(R)$ .  $\square$

Le principal intérêt de cette caractérisation est de fournir une expression de  $R_{app}(\vec{v})$  qui ne fait pas intervenir  $\mathcal{T}(R)$ . Elle va ainsi permettre de calculer le rayon d'apparition d'un vecteur  $\vec{v}$  donné sans avoir à calculer au préalable les voisinages de test  $\mathcal{T}(R)$  pour tous  $R$  de 0 à  $R_{app}(\vec{v})$ . Notons également que l'assertion **(i)** fournit une autre preuve de l'imbrication des voisinages (lemme 3.2).

Lorsque l'on cherche la configuration d'apparition d'un vecteur donné, on aimerait tester le plus petit nombre de boules susceptibles d'être des clefs :

**Définition 3.8 (Trousseau)** *On fixe une distance  $d$  invariante par translation. Étant donné un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{Z}_*^n$ , on appelle trousseau (de clefs) de  $\vec{v}$  tout ensemble  $A$  de vecteurs qu'il est suffisant de tester pour calculer le rayon d'apparition de  $\vec{v}$  :*

$$A \text{ est un trousseau de } \vec{v} \Leftrightarrow \forall R \in [0, R_{app}(\vec{v})[, \exists \vec{u} \in A \text{ t.q. } B_R \subsetneq H_{O-\vec{u}}(B_R) \subsetneq H_{O-\vec{v}}(B_R).$$

Autrement dit, un trousseau de  $\vec{v}$  fournit au moins une clef de chaque serrure  $(R, \vec{v})$  dont le rayon est strictement inférieur à  $R_{app}(\vec{v})$ . Trivialement,  $\mathbb{Z}^n$  est un trousseau de tout vecteur. Étant donné que  $\mathcal{T}(R)$  est un  $R$ -voisinage, on a la propriété suivante :  $\mathcal{T}(R_{app}(\vec{v}))$  est un trousseau de  $\vec{v}$ . Pour une distance  $d$  et un vecteur  $\vec{v}$ , on souhaite déterminer un trousseau de  $\vec{v}$  de cardinalité minimale ; on définit donc la relation de domination suivante :

**Définition 3.9 ( $\vec{v}$ -Domination)** *Soient  $\vec{v}, \vec{u}$  et  $\vec{u}'$  trois vecteurs distincts de  $\mathbb{Z}_*^n$ . On dit que  $\vec{u}'$  est  $\vec{v}$ -dominé par  $\vec{u}$  si et seulement si pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{u}$  n'est pas une clé de la serrure  $(r, \vec{v})$  implique que  $\vec{u}'$  n'est pas une clé de  $(r, \vec{v})$  :*

$$\vec{u} \succ_{\vec{v}} \vec{u}' \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}, \left( H_{O-\vec{u}}(B_r) \not\subseteq H_{O-\vec{v}}(B_r) \Rightarrow H_{O-\vec{u}'}(B_r) \not\subseteq H_{O-\vec{v}}(B_r) \right).$$

Par conséquent, si  $\vec{u}'$  est  $\vec{v}$ -dominé par  $\vec{u}$ , alors  $\vec{u}'$  peut être remplacé par  $\vec{u}$  dans tout trousseau de  $\vec{v}$ .

Contrairement à la domination, la  $\vec{v}$ -domination n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique. Il est en effet simple de trouver deux vecteurs distincts  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  tels que pour tout  $r \geq 0$ , on ait  $H_{O-\vec{u}}(B_r) \not\subseteq H_{O-\vec{v}}(B_r) \Leftrightarrow H_{O-\vec{u}'}(B_r) \not\subseteq H_{O-\vec{v}}(B_r)$ . Par exemple, pour toute distance G-symétrique, prenons un vecteur  $\vec{v}$  selon un axe de G-symétrie  $\sigma$  et les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  symétriques par rapport à  $\sigma$ . Un exemple serait  $\vec{v} = (2, 0)$ ,  $\vec{u} = (1, 1)$  et  $\vec{u}' = (1, -1)$ .

La propriété de  $\preceq_{\vec{v}}$  qui nous intéresse ici est la transitivité.

### 3.5 Conclusion

Après avoir recensé les propriétés de  $\mathcal{T}(R)$  communes à toute distance, nous avons introduit la plupart des outils que nous utiliserons pour étudier les voisinages de test, en particulier les relations de domination et de  $\vec{v}$ -domination. Les notions de clef et de trousseau modélisent le problème des rayons d'apparition, dans le but de limiter les tests d'inclusions de boules lors du calcul des vecteurs de  $\mathcal{T}(R)$ . Nous appliquons ces outils à la distance euclidienne dans les chapitres 4 et 5, et aux normes de chanfrein dans les chapitres 7 et 8.

## Chapitre 4

# Propriétés de $\mathcal{T}(R)$ pour la distance euclidienne $d_e$

Dans ce chapitre, nous abordons les propriétés du voisinage de test pour la distance euclidienne  $d_e$  en toute dimension. Puisque nous fixons la distance et que nous travaillons en dimension  $n$ , on note  $\mathcal{T}^n(R)$  le voisinage de test minimum, et on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne. Nous commençons par étudier les inclusions de boules euclidiennes au §4.1 : en utilisant la propriété de G-symétrie des boules euclidiennes, nous remarquons qu'il est suffisant de se restreindre à un seul G-cône lorsque l'on souhaite calculer un rayon de couverture ou déterminer si une boule est incluse dans une autre. Ensuite, nous déterminons les relations de domination entre vecteurs au §4.2 : pour  $d_e$ , tout vecteur domine ses multiples. Puis, au §4.3, nous étudions les configurations d'apparition d'un vecteur  $\vec{v}$  donné, en lien avec les G-symétries. Cette analyse, plus les relations de domination établies, nous permettent de proposer un trousseau de  $\vec{v}$  relativement efficace. Enfin, nous caractérisons le voisinage de test minimum au §4.4, en montrant que le voisinage  $\mathcal{T}^n$  est l'ensemble des points visibles de  $\mathbb{Z}^n$ . Les travaux présentés dans ce chapitre ont été publiés dans [HT09c].

### 4.1 Couvrir une boule euclidienne

Le premier résultat concernant les boules couvrantes est lié aux G-symétries, et va nous permettre de restreindre l'étude des inclusions de boules à un seul G-cône. On rappelle que  $\tilde{u}$  désigne le représentant de  $\vec{u}$  dans  $G(\mathbb{Z}^n)$ , cf §2.1.1.

**Lemme 4.1** *Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{Z}^n$ , avec  $n \geq 2$ . Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas G-adjacents alors  $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\tilde{u} + \tilde{v}\|$ .*

L'inégalité stricte est spécifique à la distance euclidienne ; nous verrons au §7.1 que ce lemme est vérifié pour toute norme G-symétrique si on remplace  $<$  par  $\leq$ .

**Preuve.** Sans perte de généralité, considérons  $\vec{u} \in G(\mathbb{Z}^n)$  et  $\vec{v} \notin G(\mathbb{Z}^n)$ . Soit la fonction  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , définie par :

- si  $\exists i \in 1 \dots n$  pour lequel  $v_i < 0$ , alors  $f(\vec{v}) = (|v_1|, \dots, |v_n|)$  ;
- sinon, si il existe au moins deux entiers  $1 \leq i < j \leq n$  pour lesquels  $v_i < v_j$  et  $u_i > u_j$ , alors  $f(\vec{v}) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$  ;

– sinon (dans ce cas  $\vec{v} \in G(\mathbb{Z}^n)$ ),  $f(\vec{v}) = \vec{v}$ .

Toutes les coordonnées de  $\vec{u}$  sont positives donc si le premier cas s'applique, alors clairement  $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u} + f(\vec{v})\|$ . Pour le second cas, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + f(\vec{v})\|^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (u_i + v_j)^2 + (u_j + v_i)^2 - (u_i + v_i)^2 - (u_j + v_j)^2 \\ &= 2(u_i - u_j)(v_j - v_i), \end{aligned}$$

terme qui est strictement positif. On peut calculer  $\tilde{v}$  en composant  $f$  un certain nombre de fois sur  $\vec{v}$  ( $f$  doit être appliqué au moins une fois) :

$$\tilde{v} = f \circ f \circ \dots \circ f(\vec{v}).$$

On obtient donc  $\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u} + f(\vec{v})\| < \|\vec{u} + f \circ f(\vec{v})\| < \dots < \|\vec{u} + \tilde{v}\|$ . □

Ce lemme est facilement généralisable à un nombre arbitraire de vecteurs (la preuve est inchangée). Dans ce cas, on requiert qu'au moins deux des vecteurs ne soient pas  $G$ -adjacents :

**Lemme 4.2** *Soit  $U = \{\vec{u}_i\}_{1 \leq i \leq k}$  un ensemble de vecteurs. S'il existe deux vecteurs de  $U$  non  $G$ -adjacents alors  $\|\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_k\| < \|\tilde{u}_1 + \dots + \tilde{u}_k\|$ .*

Nous utilisons cette propriété pour localiser un sous-ensemble des points de  $B$  (un certain  $G$ -cône) qu'il est nécessaire de considérer lorsqu'on souhaite calculer le rayon de couverture de  $B$  dans une direction donnée :

**Lemme 4.3 (Couverture du générateur)** *Soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $\mathbb{Z}^n$  et  $B$  une boule de centre  $O$ . Si  $p$  est un point de  $B$  qui maximise la distance euclidienne à  $O - \vec{v}$ , alors  $\vec{v}$  et  $\vec{Op}$  sont  $G$ -adjacents.*

**Preuve.** Par définition de  $p$  on a  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B) = \|\vec{v} + \vec{Op}\|$ . Supposons que  $\vec{v}$  et  $\vec{Op}$  ne sont pas  $G$ -adjacents ; on note  $x$  un  $G$ -symétrique de  $p$  tel que  $\vec{Ox}$  est  $G$ -adjacent à  $\vec{v}$ . La boule  $B$  est  $G$ -symétrique donc  $x$  appartient à  $B$ . Puisque  $\vec{v}$  et  $\vec{Ox}$  sont  $G$ -adjacents, le lemme 4.1 nous donne  $\|\vec{v} + \vec{Ox}\| > \|\vec{v} + \vec{Op}\|$ . Par conséquent,  $x$  est un point de  $B$  dont la distance à  $O - \vec{v}$  est strictement supérieure à  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B)$ , une contradiction. □

Grâce au lemme 4.3, nous déduisons que déterminer l'inclusion d'une boule  $B$  dans une boule  $B'$  se réduit à observer l'inclusion d'un certain  $G$ -cône de  $B$ , dans  $B'$  :

**Corollaire 4.4** *Soient  $\vec{v}$  un vecteur de  $G(\mathbb{Z}^n)$ , et  $B, B'$  deux boules euclidiennes de centres respectifs  $O$  et  $O - \vec{v}$ . Si  $G(B) \subseteq B'$  alors  $B \subseteq B'$ .*

**Preuve.** On note  $O' = O - \vec{v}$ . D'après le lemme 4.3, il existe un point  $p$  de  $G(B)$  pour lequel  $O'p = \mathcal{R}_{O'}(B)$ . De plus  $G(B) \subseteq B'$  implique que  $B'$  possède  $p$ , et donc  $\text{rad}(B') \geq O'p = \mathcal{R}_{O'}(B)$ . Par conséquent  $B'$  contient  $H_{O'}(B)$ , qui elle-même contient  $B$ . □



## 4.2 Relations de domination

**Lemme 4.5** Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $\mathbb{Z}^n$ . Pour tout entier  $\lambda \geq 2$ , on a  $\vec{u} \succ \lambda\vec{u}$ . En d'autres termes, tout vecteur domine ses multiples.

Notons que cette propriété est triviale pour  $d_e$  dans  $\mathbb{R}^n$ , où on a toujours  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_r) = r + \|\vec{v}\|$ . Elle est encore vraie dans  $\mathbb{Z}^n$ , mais non évidente. Notons que cette propriété n'est pas vérifiée pour toute norme, voir par exemple les normes induites par les masques de chanfrein  $7 \times 7$ , au §8.4.

**Preuve.** On note  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ,  $x' = x - \vec{u}$ ,  $x'' = x - \vec{v}$ . Soit  $B$  une boule de centre  $x$ , et  $p$ ,  $p'$  et  $p''$  trois points de  $B$  (arbitrairement choisis) qui maximisent respectivement la distance à  $x$ ,  $x'$  et  $x''$  (voir la figure 4.1). On a donc

$$\forall z \in B, \quad xz \leq xp, \quad x'z \leq x'p' \text{ et } x''z \leq x''p''. \quad (4.1)$$

Soient  $B' = \mathcal{B}(x', x'p')$  et  $B'' = \mathcal{B}(x'', x''p'')$ . Par construction,  $B' = H_{x'}(B)$  et  $B'' = H_{x''}(B)$ . L'objectif est de montrer que  $B'$  est incluse dans  $B''$ . Avant de compléter la preuve, nous introduisons deux lemmes préliminaires.

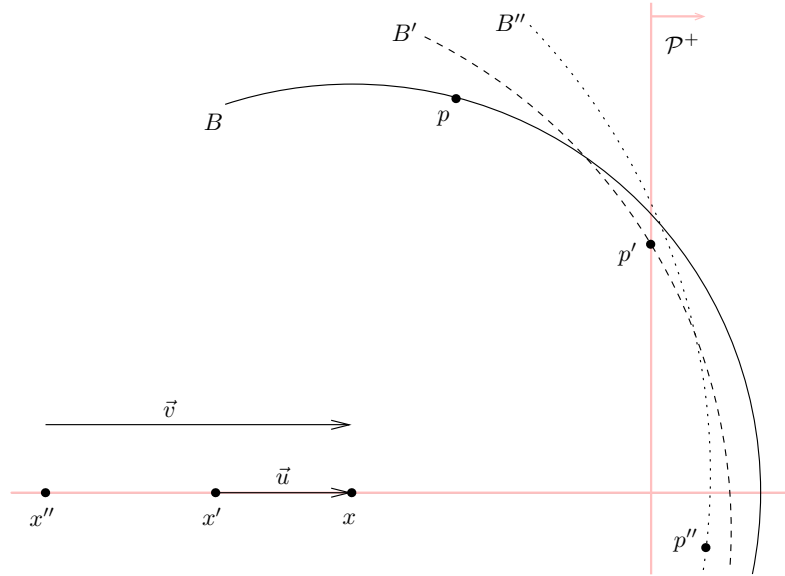


FIG. 4.1 –  $x$ ,  $x'$  et  $x''$  sont colinéaires.  $B$  est une boule de centre  $x$ ;  $B'$  et  $B''$  sont les plus petites boules centrées en  $x'$  et  $x''$  et qui contiennent  $B$ . Par souci de clarté, la position des points est exagérée.

Soit  $\mathcal{P}$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  orthogonal à  $\vec{u}$  et qui possède  $p'$ ; et soit  $\mathcal{P}^+$  le demi-espace fermé délimité par  $\mathcal{P}$  et qui ne possède pas  $x'$ . On a

$$\mathcal{P}^+ = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \cdot \overrightarrow{p'z} \geq 0 \right\}, \quad (4.2)$$

où  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . On rappelle la formule  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**Lemme 4.6**  $B' \cap \mathcal{P}^+ \subseteq B$ .

**Preuve.** Soit  $z$  un point de  $B' \cap \mathcal{P}^+$ . Puisque  $z \in B'$ , nous avons  $(x'z)^2 \leq (x'p')^2$ . En écrivant  $\vec{u} = \vec{x'x}$ , on obtient  $(\vec{u} + \vec{xz})^2 \leq (\vec{u} + \vec{xp'})^2$ . Un développement des termes de l'inégalité donne  $xz^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{xz} \leq xp'^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{xp'}$ , et donc

$$xz^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{xz} \leq xp'^2. \quad (4.3)$$

Le point  $z$  appartient à  $\mathcal{P}^+$  donc par définition (4.2), on a  $\vec{u} \cdot \vec{xz} \geq 0$ . Par conséquent, (4.3) donne  $xz^2 \leq xp'^2$ , et donc  $xz \leq xp'$ . De plus,  $p' \in B$  par définition, donc  $xp' \leq xp$ . On en déduit que  $xz \leq xp$ , c'est-à-dire  $z \in B$ .  $\square$

**Lemme 4.7**  $B' \setminus B'' \subseteq \mathcal{P}^+$ .

**Preuve.** Soit  $z$  un point de  $B' \setminus B''$ . Le point  $z$  appartient à  $B'$ , c'est-à-dire  $x'z \leq x'p'$ . En écrivant  $\vec{u} = \vec{x'x}$ , on obtient  $(\vec{u} + \vec{xz})^2 \leq (\vec{u} + \vec{xp'})^2$ , et après développement,

$$xz^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{xz} \leq xp'^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{xp'}. \quad (4.4)$$

L'hypothèse  $z \notin B''$  s'écrit  $x''p'' < x''z$ . Par définition  $p' \in B \subseteq B''$ , donc  $x''p' \leq x''p''$ , et ainsi  $x''p' < x''z$ . Puis en écrivant  $\vec{v} = \vec{x''x}$ , on obtient  $(\vec{v} + \vec{xp'})^2 < (\vec{v} + \vec{xz})^2$ , ce qui donne après développement

$$xp'^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{xp'} < xz^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{xz}. \quad (4.5)$$

Nous ajoutons les membres respectifs des inéquations (4.4) et (4.5) pour obtenir  $\vec{u} \cdot \vec{xz} + \vec{v} \cdot \vec{xp'} < \vec{u} \cdot \vec{xp'} + \vec{v} \cdot \vec{xz}$ , ce qui implique  $\vec{u} \cdot \vec{xz} < \vec{v} \cdot \vec{xz}$ . Étant donné que  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ , on peut écrire  $(\lambda - 1)\vec{u} \cdot \vec{xz} > 0$ . Comme  $\lambda > 1$ , il s'ensuit  $\vec{u} \cdot \vec{xz} > 0$ , c'est-à-dire  $z \in \mathcal{P}^+$ .  $\square$

Ces deux lemmes nous permettent de compléter la preuve du lemme 4.5 ; on rappelle qu'il suffit de montrer l'inclusion  $B' \subseteq B''$ . Supposons qu'il existe un point  $z$  dans  $B' \setminus B''$ . D'après le lemme 4.7, on a  $z \in \mathcal{P}^+$ . Le point  $z$  appartenant à la fois à  $B'$  et à  $\mathcal{P}^+$ , on peut appliquer le lemme 4.6 et en déduire  $z \in B$ . Finalement  $z \in B$  et  $z \notin B''$ , mais par construction  $B \subseteq B''$ , contradiction.  $\square$

La propriété d'exclusion par domination (lemme 3.5) nous permet donc d'obtenir un premier résultat concernant  $\mathcal{T}^n$  dans le cas euclidien :

**Corollaire 4.8** Pour tout  $n \in \mathbb{N}_*$ , les éléments de  $\mathcal{T}^n$  sont des vecteurs visibles de  $\mathbb{Z}^n$ .

### 4.3 Un trousseau pour $d_e$

Calculer le rayon d'apparition d'un vecteur  $\vec{v}$  donné consiste à trouver la plus petite serrure  $(R, \vec{v})$  qui ne possède pas de clef ; le lemme suivant permet de restreindre le lieu de recherche des éventuelles clefs.

**Lemme 4.9** Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{Z}^n$ , et  $B$  une boule de centre  $x \in \mathbb{Z}^n$ , avec  $n \geq 2$ . Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v} - \vec{u}$  ne sont pas  $G$ -adjacents alors  $H_{x-\vec{u}}(B) \not\subseteq H_{x-\vec{v}}(B)$ .

**Preuve.** Notons  $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ , et sans perte de généralité supposons  $\vec{w} \in G(\mathbb{Z}^n)$ . Soient  $x' = x - \vec{u}$ ,  $x'' = x - \vec{v}$ ,  $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{x''x'}$  (voir la figure 4.2). Soit  $p$  un point de  $B$  qui maximise la distance à  $x''$  (arbitrairement choisi), et notons  $\vec{z} = p - x$ . Par construction,  $x''p = \|\vec{v} + \vec{z}\|$  est le rayon représentable de  $B''$ . Considérons maintenant  $q = x' + \tilde{u} + \tilde{z}$ . Nous allons montrer que  $q$  est un point de  $B' \setminus B''$ .

On a  $x'q = \|\tilde{u} + \tilde{z}\|$  et  $x''q = \|\overrightarrow{x''x'} + \overrightarrow{x'q}\| = \|\vec{w} + \tilde{u} + \tilde{z}\|$ . Soit  $\sigma$  la symétrie de  $\Sigma^n(x')$  pour laquelle  $\sigma(\vec{u}) = \tilde{u}$ ; on note  $\tilde{B} = \sigma(B)$ . Étant donné que  $\sigma$  est une symétrie de centre  $x'$  (le centre de la boule  $B'$ ) et préserve les distances, et que  $B \subseteq B'$ , on déduit  $\tilde{B} \subseteq B'$ . De plus  $q \in \tilde{B}$ , donc  $q \in B'$ .

Il reste à prouver que  $q \notin B''$ . Puisque par hypothèse  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas G-adjacents, on déduit du lemme 4.2 que  $\|\vec{w} + \tilde{u} + \tilde{z}\| > \|\vec{w} + \vec{u} + \vec{z}\|$ . De plus, on a choisi  $\vec{w} \in G(\mathbb{Z}^n)$ , c'est-à-dire  $\tilde{w} = \vec{w}$ , et donc

$$x''q = \|\vec{w} + \tilde{u} + \tilde{z}\| > \|\vec{w} + \vec{u} + \vec{z}\| = x''p.$$

Le rayon représentable de  $B''$  étant  $x''p$ , cette inéquation prouve  $q \notin B''$ .  $\square$

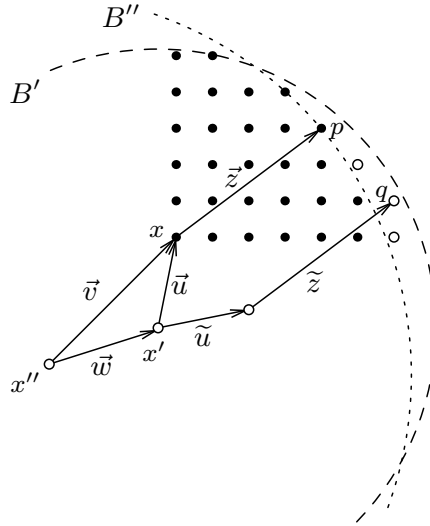


FIG. 4.2 – Une boule  $B$  de centre  $x$  (partiellement dessinée en points noirs), les boules  $B' = H_{x-\vec{u}}(B)$  et  $B'' = H_{x-\vec{v}}(B)$  pour deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\vec{u}$  et  $\vec{v} - \vec{u}$  ne sont pas G-adjacents. Mise en évidence d'un point  $q$  dans  $B' \setminus B''$ . En général,  $\vec{z}$  n'est pas égal à  $\tilde{z}$ .

Ce lemme nous permet de proposer un trousseau de tout vecteur visible :

**Définition 4.1 (Diamant)** *Le diamant d'un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{Z}^n$  est l'ensemble*

$$\diamond \vec{v} = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n : \vec{u} \neq \vec{v} \text{ et } G_{adj}(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) \right\}.$$

Notons que la propriété  $G_{adj}(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u})$  est équivalente à  $G_{adj}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} - \vec{u})$ . En effet si deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  appartiennent à un G-cône  $C$ , alors leur somme  $\vec{u} + \vec{w}$  appartient également à  $C$ .

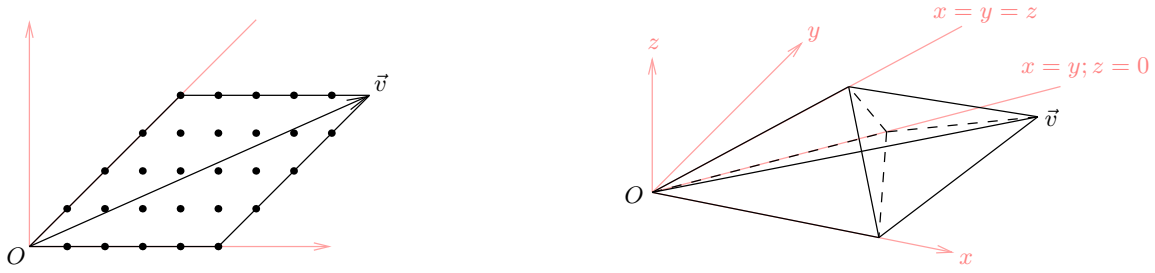


FIG. 4.3 – À gauche : le diamant  $\diamond \vec{v}$  du vecteur  $\vec{v}(9, 4)$ . À droite : le diamant d'un vecteur  $\vec{v}$  de  $\mathbb{Z}^3$ .

Géométriquement, les vecteurs de  $\diamond \vec{v}$  sont angulairement proches de  $\vec{v}$ ; de plus leur cardinalité est finie. Des exemples de diamants en dimensions 2 et 3 sont présentés sur la figure 4.3.

**Corollaire 4.10** *Soit  $\vec{v}$  un vecteur visible de  $\mathbb{Z}_*^n$ . Le diamant  $\diamond \vec{v}$  du vecteur  $\vec{v}$  est un trousseau de  $\vec{v}$  pour  $d_e$ .*

Résumons les lemmes 4.5 et 4.9 en termes de serrure (voir également la figure 4.6, à mettre en relation avec la figure 3.7). Pour toute serrure  $(R, \overrightarrow{Op})$ , on a :

- les (éventuelles) clefs sont centrées sur des points du diamant de  $\overrightarrow{Op}$ ;
- tout point appartenant au segment  $[Op]$ , c'est-à-dire l'intervalle  $I(O, p)$ , est le centre d'une clef.

On va maintenant utiliser le fait que tout vecteur domine ses multiples, afin d'affiner le trousseau d'un vecteur donné. Soit  $B$  une boule de centre  $O$  et  $B'$  une boule de centre  $O + \vec{v}$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{N}_*$  et tout  $\vec{u} \in \mathbb{Z}^n$ , les boules  $B$ ,  $H_{O+\vec{u}}(B)$  et  $H_{O+\lambda\vec{u}}(B)$  sont imbriquées, donc  $H_{O+\vec{u}}(B) \not\subseteq B'$  implique  $H_{O+\lambda\vec{u}}(B) \not\subseteq B'$ . De manière générale (pour toute distance), on peut formuler l'observation suivante : si un vecteur  $\vec{u}$  domine un vecteur  $\vec{u}'$ , alors pour tout  $\vec{v}$  on a  $\vec{u} \succ_{\vec{v}} \vec{u}'$ . Un exemple est donné sur la figure 4.4 (à gauche) pour  $\vec{v} = (5, 3)$  et  $\vec{u} = (1, 1)$ .

De plus, en exprimant la domination par les boules  $I$ , on peut écrire que les boules  $B'$ ,  $I_{O+\vec{v}-\vec{u}}(B')$  et  $I_{O+\vec{v}-\lambda\vec{u}}(B')$  sont imbriquées. Par conséquent,  $B \not\subseteq I_{O+\vec{v}-\vec{u}}(B')$  implique  $B \not\subseteq I_{O+\vec{v}-\lambda\vec{u}}(B')$ . Là encore, on peut observer de manière générale que si  $\vec{u}$  domine  $\vec{u}'$ , alors pour tout  $\vec{v}$  on a  $\vec{v} - \vec{u} \succ_{\vec{v}} \vec{v} - \vec{u}'$ . Voir la figure 4.4 (à droite) pour un exemple d'imbrication de ces boules.

Ces deux observations nous permettent d'affirmer d'une part que l'ensemble des vecteurs visibles de  $\mathbb{Z}^n$  est un trousseau euclidien de tout vecteur  $\vec{v}$ ; d'autre part l'ensemble des vecteurs  $\vec{u}$  pour lesquels  $\vec{v} - \vec{u}$  est visible, est également un trousseau de  $\vec{v}$ . En conclusion, l'ensemble  $\{q \in \diamond p : q \text{ est visible depuis } O \text{ et visible depuis } p\}$  est un trousseau euclidien du point  $p$ . La figure 4.5 présente ce trousseau pour le point  $p(9, 4)$ .

Nous verrons au chapitre 5 comment affiner encore ce trousseau.

## 4.4 Caractérisation de $\mathcal{T}$

Le lemme suivant établit un lien entre les rayons de couverture discret et réel. Dans  $\mathbb{R}^n$ , le rayon de couverture d'une boule de rayon  $r$  en direction  $\vec{v}$  est naturellement  $r + \|\vec{v}\|$ . Cette

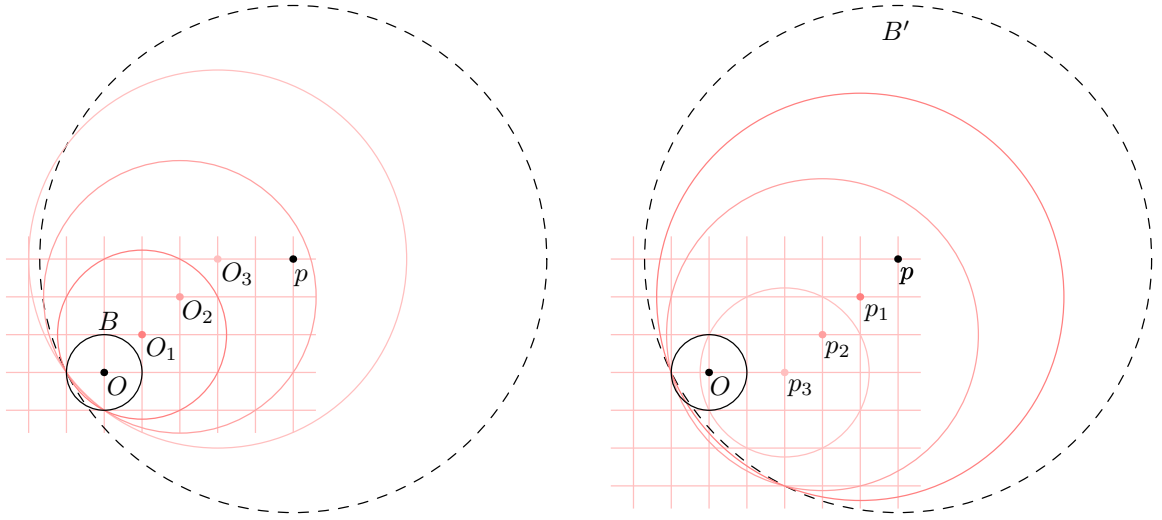


FIG. 4.4 –  $B$  (en noir) est une boule de centre  $O$ , et  $B'$  (en pointillés) est une boule de centre  $p$  et qui contient  $B$ . À gauche : les boules  $B, H_{O_1}(B), H_{O_2}(B), H_{O_3}(B)$  sont imbriquées. À droite : les boules  $B', I_{p_1}(B'), I_{p_2}(B'), I_{p_3}(B')$  sont imbriquées.

propriété est en général fausse dans  $\mathbb{Z}^n$ , cependant on montre qu'elle « tend » à être vraie lorsque  $r$  croît. De manière équivalente, on peut dire qu'on tend vers le cas réel lorsqu'on diminue la largeur de maille de la grille discrète.

**Lemme 4.11** *Étant donné un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{Z}_*^n$  (avec  $n \geq 2$ ), soit  $f$  la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ r &\longmapsto \mathcal{R}_{x-\vec{v}}(\mathcal{B}(x, r)), \text{ pour un point } x \in \mathbb{Z}^n \text{ quelconque. On a} \\ &\lim_{r \rightarrow +\infty} r + \|\vec{v}\| - f(r) = 0. \end{aligned}$$

**Preuve.** Notons tout d'abord que dans la définition de  $f$ ,  $x$  est choisi arbitrairement car  $d_e$  est invariante par translation. Soit  $p$  le point de la boule  $\mathcal{B}(x, r)$  vérifiant  $p = x + \lambda \vec{v}$  ( $\lambda \in \mathbb{N}$ ) et qui maximise la distance à  $x$  (voir la figure 4.7). Il existe au moins un vecteur de  $\mathbb{Z}^n$  orthogonal à  $\vec{v}$  et dont la norme est inférieure à celle de  $\vec{v}$  : prenons par exemple  $\vec{z} = (-v_2, v_1, 0, \dots, 0)$ . On note  $q$  le point de la boule  $\mathcal{B}(x, r)$  vérifiant  $q = p + k \cdot \vec{z}$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ) et qui maximise la distance à  $p$ ; et on note  $t$  le point de  $\mathbb{R}^n$  qui vérifie  $xt = r$  et  $t = p + l \cdot \vec{z}$  pour un certain  $l \in \mathbb{R}_+$ . On a

$$pq \geq pt - \|\vec{z}\| \geq pt - \|\vec{v}\|. \quad (4.6)$$

Par ailleurs  $\vec{z}$  est orthogonal à  $\vec{v}$ , donc on peut utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles  $(ptx)$  et  $(pqx')$  :

$$pt^2 = xt^2 - xp^2 \quad (4.7)$$

$$\text{et } f^2(r) \geq x'q^2 = x'p^2 + pq^2. \quad (4.8)$$

Si on substitue (4.6) et (4.7) dans (4.8), on obtient

$$f^2(r) \geq x'p^2 + (\sqrt{xt^2 - xp^2} - \|\vec{v}\|)^2. \quad (4.9)$$

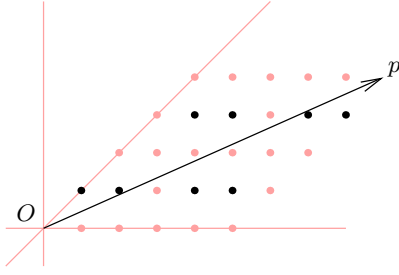


FIG. 4.5 – L'ensemble des points de  $\diamond p$  qui sont visibles depuis  $O$  et depuis  $p$  (points noirs) est un trousseau de  $p$ .

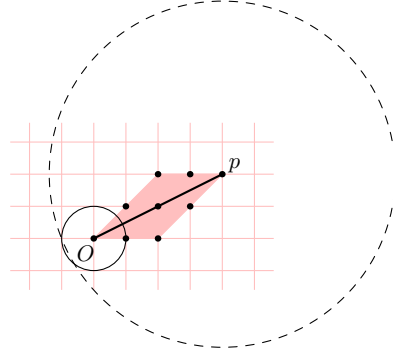


FIG. 4.6 – Les clés de la serrure  $(R, \overrightarrow{Op})$  sont dans  $\diamond \overrightarrow{Op}$  (zone grisée). Tout point du segment  $[Op]$  est le centre d'une clé de la serrure  $(R, \vec{v})$ .

Puis, en remplaçant  $x'p$  par  $xp + \|\vec{v}\|$  et  $xt$  par  $r$ , on peut reformuler (4.9) :

$$\begin{aligned} f^2(r) &\geq (xp + \|\vec{v}\|)^2 + (\sqrt{r^2 - xp^2} - \|\vec{v}\|)^2 \\ &\geq (xp + \|\vec{v}\|)^2 + r^2 - xp^2 + \vec{v}^2 - 2\|\vec{v}\|\sqrt{r^2 - xp^2} \\ &\geq \|\vec{v}\|(2xp + \|\vec{v}\|) + r^2 + \vec{v}^2 - 2\|\vec{v}\|\sqrt{r^2 - xp^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

De plus, par construction de  $p$ , on a  $xp > r - \|\vec{v}\|$ . En substituant cette borne inférieure dans (4.10), on obtient

$$\begin{aligned} f^2(r) &\geq \|\vec{v}\|(2r - \|\vec{v}\|) + r^2 + \vec{v}^2 - 2\|\vec{v}\|\sqrt{r^2 - xp^2}, \\ f^2(r) &\geq r^2 + 2\|\vec{v}\|r - 2\|\vec{v}\|\sqrt{r^2 - xp^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

D'autre part,  $xp > r - \|\vec{v}\|$  implique que  $r^2 - xp^2 < r^2 - (r - \|\vec{v}\|)^2 = 2\|\vec{v}\|r - \vec{v}^2$ , d'où

$$r^2 - xp^2 < 2\|\vec{v}\|r.$$

Cette dernière inégalité, substituée dans (4.11), permet de déduire

$$f^2(r) \geq r^2 + 2\|\vec{v}\|r - 2\|\vec{v}\|\sqrt{2\|\vec{v}\|r}. \quad (4.12)$$

En introduisant la notation  $\varepsilon(r) = r + \|\vec{v}\| - f(r)$ , on peut réécrire (4.12) :

$$\varepsilon(r) \leq r + \|\vec{v}\| - \sqrt{r^2 + 2\|\vec{v}\|r - 2\|\vec{v}\|\sqrt{2\|\vec{v}\|r}}. \quad (4.13)$$

$f(r)$  est le rayon de couverture d'une boule de rayon  $r$  en direction  $\vec{v}$  donc on a naturellement  $\varepsilon(r) \geq 0$  pour tout  $r$  (voir le lemme 3.1). D'autre part, le développement limité d'ordre 1 du membre droit de (4.13) donne

$$\frac{\|\vec{v}\| \cdot \sqrt{2\|\vec{v}\|}}{\sqrt{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \text{ quand } r \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,  $\varepsilon(r)$  tend vers 0 quand  $r \rightarrow +\infty$ . □

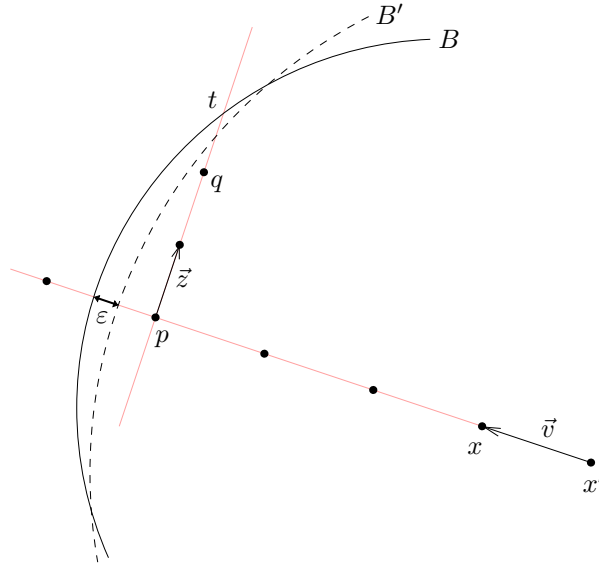


FIG. 4.7 – Une boule  $B$  de centre  $x$  et rayon  $r$ , et la boule  $B' = H_{x-\vec{v}}(B)$  de rayon  $f(r)$ . Afin de majorer  $\varepsilon(r) = r + \|\vec{v}\| - f(r)$ , on minore  $f(r)$  par  $x'q$ .

**Lemme 4.12** *Tout vecteur visible de  $\mathbb{Z}^n$  appartient à  $\mathcal{T}^n$ .*

**Preuve.** Soit  $\vec{v} \in \mathcal{V}^n$  un vecteur visible. Nous allons exhiber un rayon  $R$  pour lequel la serrure  $(R, \vec{v})$  n'a pas de clef, i.e., un rayon  $R$  pour lequel

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{Z}_*^n \setminus \{\vec{v}\}, H_{O-\vec{u}}(B_R) \not\subseteq H_{O-\vec{v}}(B_R). \quad (4.14)$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $p_k = O + k\vec{v}$ ,  $B_k = \mathcal{B}(O, k\|\vec{v}\|)$  et pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{Z}^n$ , on note  $B_k^{\vec{u}} = H_{O-\vec{u}}(B_k)$ . Une illustration est présentée sur la figure 4.8. Étant donné que  $p_k$  appartient à  $B_k^{\vec{v}}$  et que  $d(O - \vec{v}, p_k) = (k+1)\|\vec{v}\| = \text{rad}(B_k) + \|\vec{v}\|$ , on a (via le lemme 3.1)  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_k) = \text{rad}(B_k) + \|\vec{v}\|$ .

Supposons que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v} - \vec{u}$  ne sont pas  $G$ -adjacents. D'après le lemme 4.9, on a  $B_k^{\vec{u}} \not\subseteq B_k^{\vec{v}}$ . Par conséquent, pour compléter la preuve, il suffit de considérer les vecteurs de  $\diamond \vec{v}$  (le diamant de  $\vec{v}$ ), et de trouver un entier  $\gamma$  pour lequel

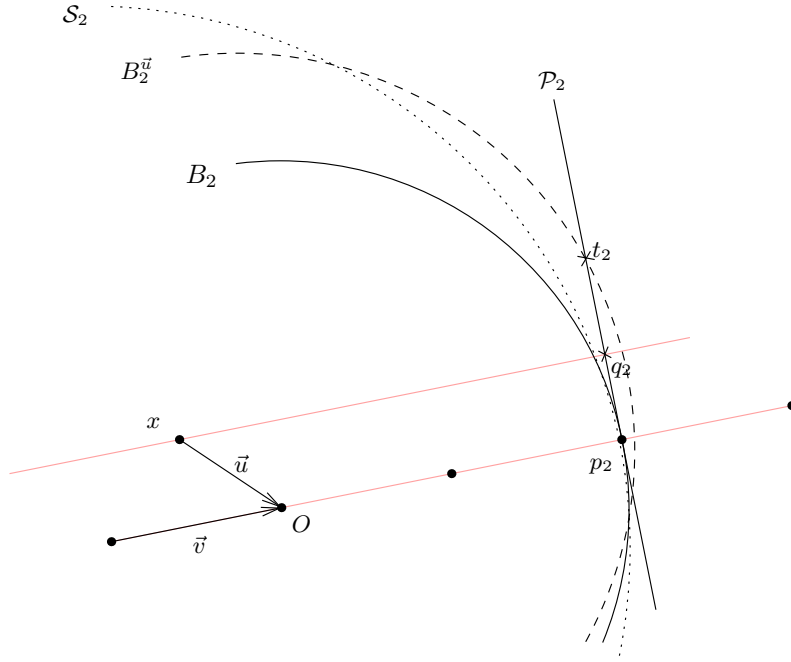
$$\forall \vec{u} \in \diamond \vec{v}, B_\gamma^{\vec{u}} \not\subseteq B_\gamma^{\vec{v}}. \quad (4.15)$$

Pour tout  $\vec{u} \in \diamond \vec{v}$ , on note  $\mathcal{W}(\vec{u})$  le plan (de dimension 2) de  $\mathbb{R}^n$  qui possède les points  $O$ ,  $O - \vec{v}$  et  $O - \vec{u}$ . Notons également  $\mathcal{P}_k$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  orthogonal à  $\vec{v}$  et qui possède  $p_k$ . Par construction, l'intersection de  $B_k^{\vec{v}}$  et du plan  $\mathcal{P}_k$  est exactement le point  $p_k$ . Notons  $x = O - \vec{u}$ , puis  $q_k$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $\mathcal{P}_k$ , et enfin  $t_k$  le point vérifiant  $xt_k = \text{rad}(B_k^{\vec{u}})$  et  $t_k = p_k + \lambda \overrightarrow{p_k q_k}$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Notons que dans le cas général,  $q_k$  et  $t_k$  ne sont pas des points à coordonnées entières. Considérant le triangle  $(xq_k t_k)$ , on peut écrire

$$(q_k t_k)^2 = (x t_k)^2 - (x q_k)^2. \quad (4.16)$$

Ensuite, en projetant  $\vec{u}$  sur  $\vec{v}$ , on peut exprimer  $xq_k$  comme  $Op_k + \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ , et donc

$$\begin{aligned} (q_k t_k)^2 &= (x t_k)^2 - (Op_k + \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}))^2 \\ &= (x t_k + xp_k + \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}))(x t_k - xp_k - \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})). \end{aligned} \quad (4.17)$$


 FIG. 4.8 – Les boules  $B_k, B_k^{\vec{u}}, S_k$  dans le plan  $\mathcal{W}(\vec{u})$  (pour  $k = 2$ ).

Étant donné que  $Op_k$  et  $xt_k$  sont les rayons respectifs de  $B_k$  et de  $B_k^{\vec{u}}$ , nous déduisons du lemme 4.11 que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} xt_k - Op_k = \|\vec{u}\|. \quad (4.18)$$

Pour tout  $\vec{u} \in \diamond \vec{v}$ , les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, et donc  $0 < \cos(\vec{u}, \vec{v}) < 1$ . Les équations (4.17) et (4.18) nous permettent ainsi de calculer

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} q_k t_k = +\infty. \quad (4.19)$$

Chaque ligne  $(p_k q_k)$  contient une infinité de points de  $\mathbb{Z}^n$ , car  $p_k \in \mathbb{Z}^n$  et il existe un vecteur directeur à coordonnées entières de la droite  $(p_k q_k) = \mathcal{W}(\vec{u}) \cap \mathcal{P}_k$ , par exemple  $\vec{z} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}$ , où  $\wedge$  représente le produit vectoriel. De plus, les points entiers du segment  $[q_k t_k]$  appartiennent à  $B_k^{\vec{u}} \setminus B_k^{\vec{v}}$  car  $[q_k t_k] \subseteq \mathcal{P}_k$  et  $\mathcal{P}_k \cap B_k^{\vec{v}} = \{p_k\}$ . Ces deux arguments, ainsi que la limite exprimée en (4.19), nous permettent de déduire

$$\forall \vec{u} \in \diamond \vec{v}, \exists k_{\vec{u}} \in \mathbb{N}, \forall k > k_{\vec{u}}, B_k^{\vec{u}} \not\subseteq B_k^{\vec{v}}. \quad (4.20)$$

Finalement, observons que choisir  $\gamma = \max\{k_{\vec{u}} : \vec{u} \in \diamond \vec{v}\}$  est suffisant pour satisfaire la condition (4.15). L'existence de  $\gamma$  est assurée par le fait que pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{Z}^n$ , l'ensemble  $\diamond \vec{v}$  est borné.  $\square$

Les lemmes 4.8 et 4.12 nous permettent de caractériser le voisinage  $\mathcal{T}^n$  :

**Théorème 4.1** *Pour tout entier  $n \geq 2$ , on a  $\mathcal{T}^n = \mathcal{V}^n$ .*



## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons énoncé deux principaux résultats concernant les  $R$ -voisinages minimum pour la distance euclidienne : d'une part nous avons établi que  $\mathcal{T}(R)$  tend vers l'ensemble des points visibles de  $\mathbb{Z}^n$  quand  $R \rightarrow +\infty$ , d'autre part nous avons identifié un trousseau de tout vecteur visible, appelé diamant de  $\vec{v}$ .

La densité des points visibles  $\mathcal{V}^n$  parmi  $\mathbb{Z}^n$  est liée à la fonction zêta de Riemann, étudiée en théorie des nombres [EF75]. Pour tout entier  $n \geq 2$ , la fonction zêta est définie par

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}. \quad (4.21)$$

Soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $\mathbb{Z}^n$  ; la probabilité  $p(n)$  que  $\vec{v}$  soit visible est donnée par  $\frac{1}{\zeta(n)}$ . En dimension 2, on obtient

$$p(2) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.61.$$

En dimensions supérieures, on a  $p(3) \approx 0.83$  et  $p(4) \approx 0.92$ . De plus,  $p(n)$  croît avec  $n$  et tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . A priori, ceci laisse penser que la méthode de recherche locale de l'axe médian n'est pas efficace car la majorité des points de  $\mathbb{Z}^n$  appartiennent au voisinage  $\mathcal{T}^n$ . Cependant, nous observons dans le prochain chapitre que le rayon d'apparition d'un vecteur  $\vec{v}$  est toujours bien plus grand que  $\|\vec{v}\|$ , ce qui implique que le  $R$ -voisinage minimum est de taille négligeable par rapport à toute forme de rayon  $R$ , permettant une extraction efficace de l'axe médian.



## Chapitre 5

# Étude de $\mathcal{T}(R)$ pour $d_e$ dans $\mathbb{Z}^2$

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'étude du voisinage minimum  $\mathcal{T}(R)$  pour  $d_e$  dans le plan  $\mathbb{Z}^2$ . Notons tout d'abord que pour toute forme  $\mathcal{S}$ , les axes médians de  $\mathcal{S}$  calculés pour  $d_e$  et  $d_e^2$  sont identiques. Étant donné que nous utiliserons fréquemment ces deux distances, et afin de ne pas surcharger les notations, on pose la convention selon laquelle la variable  $r$  désigne un rayon euclidien, et  $R$  un rayon euclidien au carré. De même,  $B_r$  et  $B_R$  sont respectivement les boules de rayon euclidien  $r$  et de rayon euclidien au carré  $R$ . Enfin, on note  $r_{app}(\vec{v})$  et  $R_{app}(\vec{v})$  les rayons d'apparition de  $\vec{v}$  pour  $d_e$  et  $d_e^2$  (on a ainsi  $R_{app}(\vec{v}) = r_{app}^2(\vec{v})$ ).

Nous commençons par établir au §5.1 un lien entre les inclusions de boules et les suites de Farey ; nous en déduisons que les voisins de  $\vec{v}$  dans la plus petite suite de Farey qui contient  $\vec{v}$ , forment un trousseau de  $\vec{v}$ . Ce résultat, associé à un algorithme simple de calcul des rayons de couverture présenté au §5.2, nous permet d'élaborer au §5.3 un algorithme de calcul du rayon d'apparition  $r_{app}(\vec{v})$  d'un vecteur  $\vec{v}$  donné, de complexité  $\mathcal{O}(r_{app}^3(\vec{v}))$ . Nous optimisons ensuite la complexité de cet algorithme, sur la base de deux observations géométriques : d'une part nous bornons au §5.4 l'ensemble des points d'une boule qu'il est suffisant de considérer pour calculer le rayon de couverture, d'autre part au §5.5 nous utilisons le fait qu'il est suffisant, dans la recherche du rayon d'apparition, de considérer un sous-ensemble des serrures, appelées serrures maximales. Ceci nous permet de proposer un algorithme pour  $r_{app}(\vec{v})$  de complexité  $\mathcal{O}(r_{app}^{2.5}(\vec{v}))$ . Enfin, nous présentons au §5.6 un algorithme pour le calcul de  $\mathcal{T}(R)$  qui n'utilise ni la DT, ni la LUT. L'idée centrale de cet algorithme est de décrire les inclusions de boules dans toutes les serrures de rayon inférieur à  $R$ , par plusieurs chaînages des points de  $B_R$ . Nous commentons les résultats de nos algorithmes au §5.7. Finalement, nous abordons au §5.8 l'étude des trousseaux en dimension supérieure. La majeure partie des travaux exposés dans ce chapitre ont été publiés dans [HT09b].

### 5.1 Lien avec les suites de Farey et trousseau minimal

Nous allons faire le lien entre les suites de Farey vues au §2.1.2, et les inclusions de boules euclidiennes dans  $\mathbb{Z}^2$ . Nous commençons par rappeler quelques propriétés, puis nous définissons le prédécesseur et le successeur d'un vecteur visible.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs consécutifs dans une suite de Farey. Étant donné que  $|u_1v_2 - u_2v_1| = 1$ , le couple  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$ . Le parallélogramme fondamental  $(O, O + \vec{u}, O +$

$\vec{u} + \vec{v}, O + \vec{v}$ ) a donc pour aire 1, et il ne possède aucun point entier excepté ses quatre sommets. Pour une discussion détaillée sur le réseau fondamental  $\mathbb{Z}^2$ , voir [OLD00] ou [HW78], chapitre 3.

Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction irréductible strictement comprise entre 0 et 1. On appelle *prédécesseur* de  $\frac{a}{b}$  le terme qui précède  $\frac{a}{b}$  dans la suite de Farey d'ordre  $b$ ; on le note  $\text{pred}(\frac{a}{b})$ . De même, le *successeur* de  $\frac{a}{b}$ , noté  $\text{succ}(\frac{a}{b})$ , est le terme qui suit  $\frac{a}{b}$  dans la suite  $F_b$ . Par exemple, le prédécesseur et le successeur de  $\frac{3}{4}$  sont respectivement  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{1}{1}$ . Prenons  $\vec{v}$  un vecteur d'une suite de Farey ayant pour prédécesseur  $\vec{u}$  et pour successeur  $\vec{w}$ . Étant donné que  $\vec{v}$  est le médian de  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ , on a  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ . Un exemple de prédécesseur – successeur est présenté sur la figure 5.1.

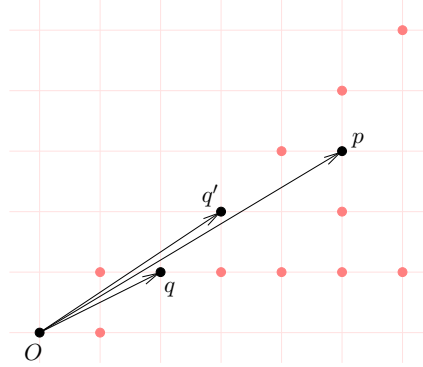


FIG. 5.1 – Le prédécesseur et le successeur de  $p = (5, 3)$  sont respectivement  $q = (2, 1)$  et  $q' = (3, 2)$ . Le parallélogramme  $Oqq'p$  a pour aire 1.

Étudions maintenant la configuration géométrique des points des suites de Farey afin d'établir des relations de  $\vec{v}$ -domination. Dorénavant,  $\vec{v}$  est un vecteur visible de  $G(\mathbb{Z}^2)$ , différent de  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ . On note  $p = O + \vec{v}$ , et  $q$  et  $q'$  sont respectivement le prédécesseur et le successeur de  $p$ . De plus, nous définissons les points  $p'(p_1, 0)$  et  $p''(p_1, p_1)$ , ayant la même abscisse que  $p$  et d'ordonnées minimale et maximale dans  $G(\mathbb{Z}^2)$ , voir la figure 5.2. Le triangle  $(Op'p'')$  contient donc l'ensemble des points de la suite de Farey d'ordre  $p_1$ , ainsi que le diamant de  $\vec{v}$ .

**Lemme 5.1** *Si  $t$  est un point entier du triangle  $(Opp')$  (différent de  $O$  et  $p$ ) alors  $q$  appartient au triangle  $(Opt)$ . De même, si  $t$  est un point entier du triangle  $(Opp'')$  (différent de  $O$  et  $p$ ) alors  $q'$  appartient au triangle  $(Opt)$ .*

**Preuve.** Étant donné que  $q$  est le prédécesseur de  $p$ , il n'existe aucun vecteur dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{Oq}, \vec{Op})$  et dont l'abscisse est inférieure à celle de  $p$ . Supposons que le triangle  $(Opt)$  ne possède pas le point  $q$ ; le vecteur  $\vec{pt}$  doit donc appartenir au cône  $\mathcal{C}(\vec{pq}, \vec{pO})$ , voir la figure 5.2. Maintenant, soit  $q'$  le successeur de  $p$ . Le point  $p$  est le médian des points  $q$  et  $q'$  donc  $\vec{Oq'} = \vec{qp}$  (et  $\vec{Oq} = \vec{q'p}$ ). Par symétrie, le vecteur  $\vec{tp}$  appartient donc au cône  $\mathcal{C}(\vec{Op}, \vec{Oq'})$ ; de plus son abscisse est inférieure à celle de  $\vec{Op}$ . On en déduit qu'il existe un point situé entre  $p$  et  $q'$  dans la suite de Farey d'ordre  $p_1$ , ce qui contredit le fait que  $q'$  est le successeur de  $p$ .

On peut appliquer le même raisonnement dans le cas où  $t$  appartient à  $(Opp'')$ : un tel point  $t$  appartient au cône  $\mathcal{C}(\vec{pq'}, \vec{pO})$ , puis on en déduit que  $\vec{tp}$  appartient au cône  $\mathcal{C}(\vec{Op}, \vec{Oq})$ , ce qui contredit  $q = \text{pred}(p)$ .  $\square$

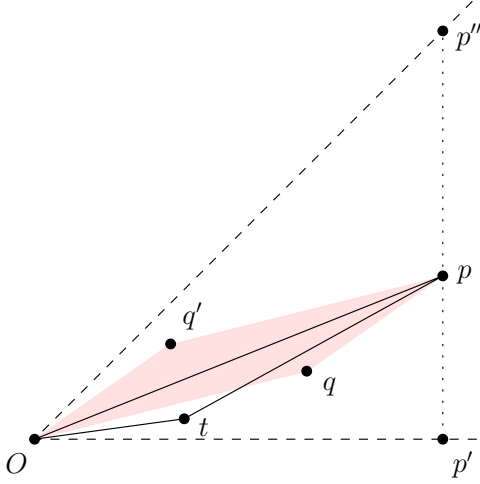


FIG. 5.2 – Configuration impossible illustrant la preuve du lemme 5.1 : Les points  $q$  et  $q'$  sont respectivement le prédécesseur et le successeur du point visible  $p$  (le parallélogramme grisé a pour aire 1 et ne possède aucun point entier excepté ses 4 sommets). Le triangle  $(Opt)$  ne possède pas le point  $q$ . Par souci de lisibilité, l'angle  $\widehat{Oqp}$  est accentué.

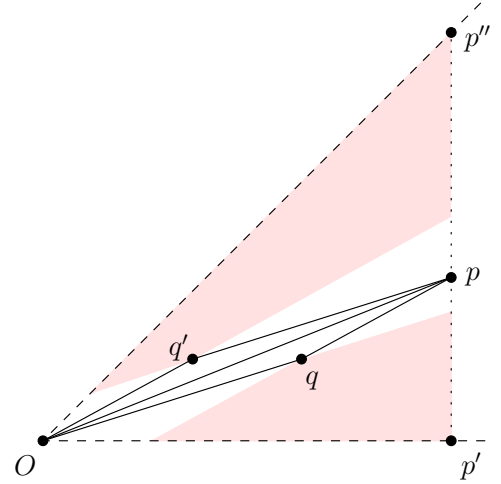


FIG. 5.3 – Les points  $q$  et  $q'$  sont respectivement le prédécesseur et le successeur du point visible  $p$ . Excepté les points  $O$  et  $p$ , tous les points entiers du triangle  $(Op'p'')$  sont situés dans la zone grisée (frontière incluse). Par souci de lisibilité, l'angle  $\widehat{Oqp}$  est accentué.

Tout point du générateur de  $\mathbb{Z}^2$  dont l'abscisse est inférieure à celle de  $p$  est donc inclus dans la zone grisée indiquée sur la figure 5.3 (à l'exception des points  $O$  et  $p$ ). Cette propriété géométrique des prédécesseur et successeur va nous permettre d'établir le lemme suivant :

**Lemme 5.2** *Tout point  $t$  du triangle  $(Opp')$ , différent de  $O$  et  $p$ , est  $\vec{v}$ -dominé par  $q$ . De même, tout point  $t$  du triangle  $(Opp'')$ , différent de  $O$  et  $p$ , est  $\vec{v}$ -dominé par  $q'$ .*

**Preuve.** Prenons le cas où  $t$  est un point du triangle  $(Opp'')$ . D'après le lemme 5.1, le triangle  $(Opt)$  possède  $q'$ , autrement dit  $t$  appartient à la zone grisée supérieure de la figure 5.3. Soit  $B$  une boule de centre  $O$  ; le but est de prouver que si  $H_{q'}(B)$  n'est pas incluse dans  $H_p(B)$ , alors  $H_t(B)$  n'est pas incluse dans  $H_p(B)$ . En particulier (voir figure 5.4), nous allons montrer que tout point  $z \in H_{q'}(B) \setminus H_p(B)$  appartient également à  $H_t(B)$ .

On note  $x$  un point de la boule  $B$  qui maximise la distance à  $q'$ . Nous établissons dans un premier temps trois inéquations de distance :

- par définition  $q'x$  est le rayon représentable de  $H_{q'}(B)$  ; de plus  $z \in H_{q'}(B)$ . Par conséquent  $q'z \leq q'x$  ;
- le point  $x$  appartient à  $B$ , contrairement au point  $z$ , car  $z \notin H_p(B)$  et  $B \subseteq H_p(B)$ . On a ainsi  $Ox \leq Oz$  ;
- la boule  $H_p(B)$  possède  $x$  (car  $x \in B$ ), mais ne possède pas  $z$ , donc  $px \leq pz$ .

Ces trois inéquations nous permettent de déduire la position de  $O$ ,  $p$  et  $q'$  par rapport à la médiatrice du segment  $[xz]$ , notée  $\text{med}(x, z)$  : les points  $O$  et  $p$  sont situés d'un côté, le point  $q'$  de l'autre, comme illustré à droite sur la figure 5.4. Étant donné que  $q'$  est à l'intérieur du triangle  $(Opt)$ , le point  $t$  doit être situé du même côté de la médiatrice que

$q'$ . On en déduit que  $t$  est plus proche de  $z$  que de  $x$ . Or  $x$  appartient à  $H_t(B)$ , ce qui implique que  $z$  appartient également à  $H_t(B)$ .

Comme pour le lemme 5.1, la preuve pour le cas où  $t$  appartient au triangle  $(Opp')$  est obtenue de manière similaire.  $\square$

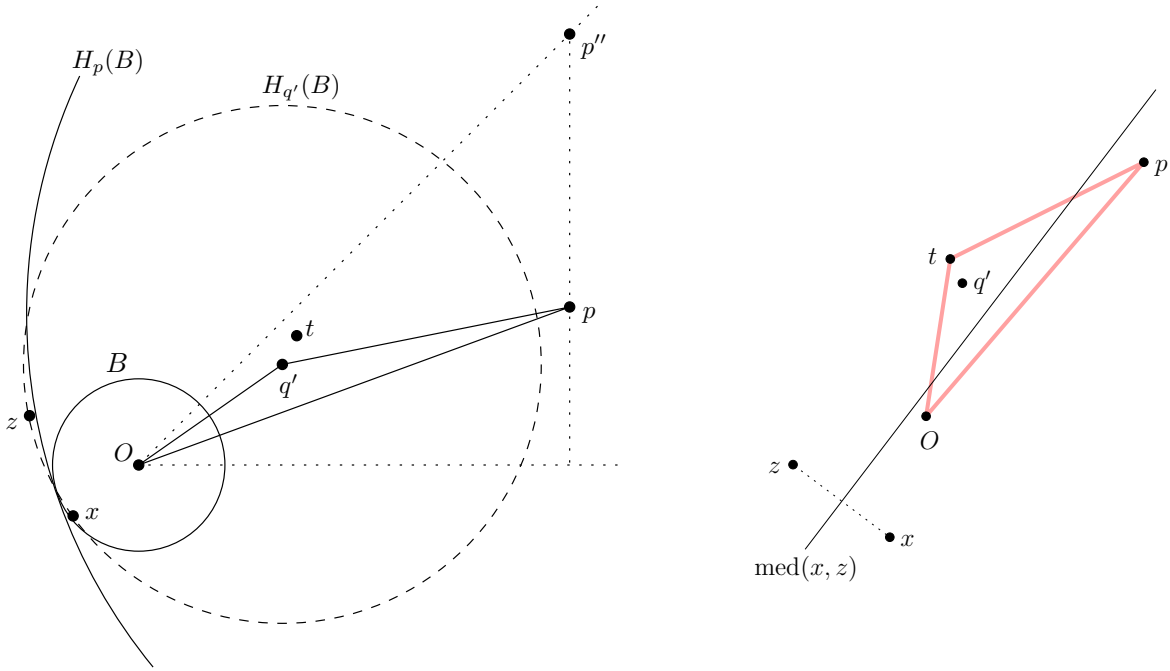


FIG. 5.4 – Illustration pour la preuve du lemme 5.2. À gauche : un point  $p$  et son successeur  $q'$ .  $x$  est un point de  $B$  qui maximise la distance à  $q'$ . Si pour une boule  $B$  de centre  $O$  il existe un point  $z \in H_{q'}(B) \setminus H_O(B)$ , alors  $z \in H_t(B)$ . À droite : position des points  $O$ ,  $p$ ,  $q'$  et  $t$  de part et d'autre de la médiatrice  $[xz]$ .

Nous avons vu au corollaire 4.10 que le diamant de  $\vec{v}$  est un trousseau de  $\vec{v}$ . Or le diamant de  $\vec{v}$  est inclus dans le triangle  $(Op'p'')$  (en utilisant les notations du lemme 5.1). Grâce au lemme 5.2, nous savons maintenant que tout vecteur du diamant de  $\vec{v}$  est  $\vec{v}$ -dominé soit par  $\text{pred}(\vec{v})$ , soit par  $\text{succ}(\vec{v})$ . Par conséquent nous pouvons exhiber un trousseau formé uniquement de deux éléments :

**Théorème 5.1** *Soit  $\vec{v}$  un vecteur visible de  $G(\mathbb{Z}^2)$ , différent de  $(1,0)$  et  $(1,1)$ . Le couple  $\{\text{pred}(\vec{v}), \text{succ}(\vec{v})\}$  est un trousseau de  $\vec{v}$  pour  $d_e$ .*

Il est raisonnable de supposer que ce trousseau est minimal : en effet les prédécesseur et successeur de  $\vec{v}$  sont situés de part et d'autre de  $\vec{v}$ , et il existe toujours de très petits rayons  $R$  pour lesquels  $H_{O-\text{pred}(\vec{v})}(B_R) \not\subseteq H_{O-\vec{v}}(B_R)$  ou  $H_{O-\text{succ}(\vec{v})}(B_R) \not\subseteq H_{O-\vec{v}}(B_R)$ .

## 5.2 Calcul du rayon de couverture

Dans ce paragraphe, nous cherchons à calculer le rayon de couverture d'une boule euclidienne dans une direction donnée. Précisément, nous voulons calculer, pour toute boule  $B$  de centre  $O$  et tout vecteur  $\vec{v}$ , le rayon  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B)$ . Le but est de chercher un point  $q$  de  $B$  qui maximise

la distance à  $O - \vec{v}$ . Étant donné que  $d_e$  est G-symétrique, on peut sans perte de généralité se restreindre au cas  $\vec{v} \in G(\mathbb{Z}^2)$ . Sous cette hypothèse, le lemme 4.3 nous indique qu'il est suffisant de chercher un tel point  $q$  dans le générateur\* de  $B$ . Enfin, on remarque qu'il est suffisant de considérer les points du « bord » de  $B$ , c'est-à-dire les points adjacents au complémentaire de  $B$ , voir la figure 5.5.

On note  $\{q_i\}_{1 \leq i \leq h}$  la suite des points de  $G(B)$  qui sont 4-adjacents au complémentaire de  $B$ , triés par ordonnées croissantes. Pour parcourir cette suite, nous utilisons une méthode similaire à celle du tracé de cercle proposé par Pitteway [Pit67], dans le sens où nous utilisons uniquement des additions d'entiers (en particulier, il n'y a pas d'appel à la fonction racine carrée). On note  $R$  le rayon euclidien (au carré) de  $B$  et  $p = O - \vec{v}$ . Les coordonnées de  $\vec{v}$  sont notées  $(v_x, v_y)$ ; celles de  $q_i$ ,  $(x_i, y_i)$ . Enfin, notons  $d_i = d_e^2(O, q_i) = x_i^2 + y_i^2$ ,  $d'_i = d_e^2(p, q_i) = (x_i + v_x)^2 + (y_i + v_y)^2$  et  $R'_i = \max_{1 \leq k \leq i} \{d'_k\}$ . Le rayon  $\mathcal{R}_p(B)$  est ainsi  $R'_h$ . Pour tout couple de points consécutifs  $q_i, q_{i+1}$  de la suite, on a deux configurations possibles :

- si le point au dessus de  $q_i$  appartient à  $B$ , alors  $q_{i+1} = q_i + (0, 1)$ . On a alors  $d_{i+1} = x_i^2 + (y_i + 1)^2 = d_i + 2y_i + 1$  et  $d'_{i+1} = (x_i + v_x)^2 + (y_i + 1 + v_y)^2 = d'_i + 2y_i + 2v_y + 1$ ;
- sinon,  $q_{i+1} = q_i + (-1, 1)$ ; auquel cas  $d_{i+1} = (x_i - 1)^2 + (y_i + 1)^2 = d_i - 2x_i + 2y_i + 2$  et  $d'_{i+1} = (x_i - 1 + v_x)^2 + (y_i + 1 + v_y)^2 = d'_i - 2x_i - 2v_x + 2y_i + 2v_y + 2$ .

L'algorithme 5.1 réalise le calcul de  $\mathcal{R}_p(B)$ . Le premier point  $q_1$  a pour coordonnées  $(\lfloor \sqrt{R} \rfloor, 0)$ , où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la fonction partie entière. Au début du  $i$ -ème passage de la boucle principale (ligne 5), les variables  $x, y, d, d'$  contiennent respectivement les valeurs  $x_i, y_i, d_i, d'_i$ ; tandis que la variable  $R'$  contient  $R'_{i-1}$ . Si  $q_i(x_i, y_i)$  est dans le générateur alors on met éventuellement à jour  $R'$  (ligne 6); puis on calcule les valeurs de  $x, y, d, d'$  du prochain point  $q_{i+1}$ , aux lignes 7–14. Le test du lieu de  $q_{i+1}$  est effectué à la ligne 8.

En ce qui concerne la complexité de cet algorithme : la boucle principale est parcourue autant de fois qu'il y a de points dans la suite  $\{q_i\}$ , c'est-à-dire  $h \simeq \sqrt{R} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$  fois. L'algorithme 5.1 s'exécute donc en temps  $\mathcal{O}(\sqrt{R})$ .

### 5.3 Un algorithme pour le rayon d'apparition

Le théorème 5.1 va nous permettre de calculer efficacement le rayon d'apparition de tout vecteur visible  $\vec{v}$ . En effet, il n'est pas nécessaire de calculer le voisinage  $\mathcal{T}(R_{app}(\vec{v}))$  pour trouver le rayon d'apparition de  $\vec{v}$  : il suffit d'énumérer les serrures  $(R, \vec{v})$  par  $R$  croissants et de chercher, pour chacune d'elles, s'il existe une clef centrée en  $O - \text{pred}(\vec{v})$  ou en  $O - \text{succ}(\vec{v})$ .

Examinons tout d'abord le cas des vecteurs  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ , qui n'ont ni prédécesseur ni successeur. Il est facile de vérifier que  $\mathcal{T}(1) = \{(1, 0)\}$  et  $\mathcal{T}(2) = \{(1, 0), (1, 1)\}$  (les boules de rayons 1 et 2 sont dessinées sur la figure 5.6) :

- la plus petite boule de rayon non nul a pour rayon 1. Puisque  $p(1, 0)$  appartient à  $B_1$  mais n'appartient pas à  $\text{AM}(B_1)$  (l'axe médian d'une boule est son centre), on déduit que  $(1, 0)$  a pour rayon d'apparition 1;
- l'entier  $d_e^2$ -représentable supérieur est 2. Le point  $q(1, 1)$  n'appartient pas à  $\text{AM}(B_2)$ ; cependant le vecteur  $(1, 0)$  n'interdit pas à  $q$  d'être dans  $\text{AM}(B_2)$  car  $I_p(B_2)$  a pour rayon 0, et donc  $I_q(B_2) \not\subseteq I_p(B_2)$ . Par conséquent  $(1, 1)$  appartient à  $\mathcal{T}(2)$ .

Procédons maintenant au cas général. Fixons un vecteur visible  $\vec{v} \in G(\mathbb{Z}^2)$  d'abscisse supérieure à 2; on note  $p = O + \vec{v}$  et on appelle respectivement  $q$  et  $q'$  le prédécesseur et le successeur

---

\*D'ailleurs, si  $\vec{v}$  n'appartient à aucun autre G-cône, alors tout point  $q$  appartient à  $G(\mathbb{Z}^2)$ .

---

**Algorithme 5.1 : R\_couv**

---

**Entrées :** un entier positif  $R$  et un vecteur  $\vec{v}(v_x, v_y)$ .

**Sortie :** le rayon représentable de  $H_{O-\vec{v}}(B_R)$  pour  $d_e^2$ .

```

1  $x \leftarrow \lfloor \sqrt{R} \rfloor ; y \leftarrow 0 ;$ 
2  $d \leftarrow x^2 ;$ 
3  $d' \leftarrow (x + v_x)^2 + v_y^2 ;$ 
4  $R' \leftarrow 0 ;$ 
5 tant que  $x \geq y$  faire
6   si  $d' > R'$  alors  $R' \leftarrow d' ;$ 
7    $d \leftarrow d + 2y + 1 ;$ 
8   si  $d \leq R$  alors
9      $d' \leftarrow d' + 2y + 2v_y + 1 ;$ 
10  sinon
11     $d \leftarrow d - 2x + 1 ;$ 
12     $d' \leftarrow d' + 2(y + v_y - x - v_x + 1) ;$ 
13     $x \leftarrow x - 1 ;$ 
14   $y \leftarrow y + 1 ;$ 
15 retourner  $R' ;$ 

```

---

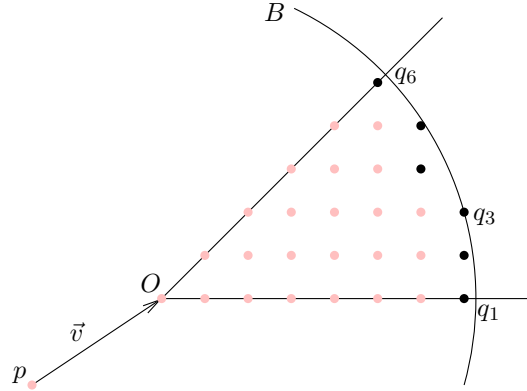


FIG. 5.5 – Les points  $q_1, \dots, q_6$  (en noir) du bord du générateur de la boule  $B = \mathcal{B}(O, \sqrt{53})$ , parcourus par l'algorithme  $\mathbf{R\_couv}$ . Le rayon  $\mathcal{R}_p(B)$  est la valeur maximale des  $pq_i$ .

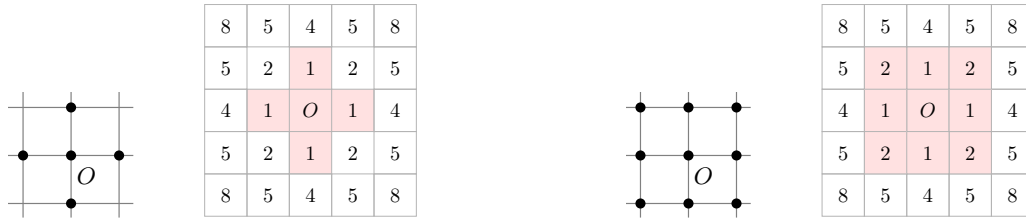


FIG. 5.6 – Boules de rayon euclidien au carré 1 et 2. Les valeurs indiquent la distance à  $O$ .

de  $p$ . D'après le théorème 5.1, la configuration géométrique d'apparition de  $\vec{v}$  est la serrure  $(R, \vec{v})$  de plus petit rayon vérifiant  $H_q(B_R) \not\subseteq H_p(B_R)$  et  $H_{q'}(B_R) \subseteq H_p(B_R)$ .

L'algorithme **Rapp** énumère les boules  $B_R$  par rayons  $R$  croissants. Pour chaque  $R$  il calcule tout d'abord (à la ligne 4)  $R_p = \mathcal{R}_p(B_R)$  et  $R_q = \mathcal{R}_q(B_R)$ , en utilisant la fonction  $\mathbf{R\_couv}$ . La fonction **est\_incluse** détermine l'inclusion d'une boule  $B$  dans une boule  $B'$ , et procède de manière similaire à  $\mathbf{R\_couv}$  (elle parcourt le bord de la boule  $B$ ). Étant donné que  $\vec{qp} = \vec{Oq'}$ , on a  $H_q(B_R) \subseteq H_p(B_R) \Leftrightarrow \mathbf{est\_incluse}(R_q, R_p, \vec{Oq'})$ . Si  $H_q(B_R) \not\subseteq H_p(B_R)$ , il reste à tester si  $H_{q'}(B_R) \subseteq H_p(B_R)$ ; ce test est réalisé de la même manière aux lignes 6–7. L'existence de la configuration d'apparition de  $\vec{v}$  est assurée par le fait que tout vecteur visible appartient au voisinage de test (théorème 4.1).

Analysons la complexité de l'algorithme **Rapp**. Le calcul du prédécesseur  $q$  et successeur  $q'$  de  $p$  est simple : étant donné que  $q$  et  $p$  sont deux termes successifs d'une suite de Farey, on a  $q_1 p_2 - q_2 p_1 = 1$ . Calculer  $q$  consiste à trouver deux entiers positifs  $a$  et  $b$  tels que  $p_2 a - p_1 b = 1$ , ce qui est réalisé grâce à l'algorithme d'Euclide étendu, en temps  $\mathcal{O}(\log(u_2))$ .

Nous avons vu au paragraphe précédent que la fonction  $\mathbf{R\_couv}(R, \vec{v})$  s'exécute en temps  $\mathcal{O}(\sqrt{R})$ ,



**Algorithme 5.2 : Rapp****Entrée** : un vecteur visible  $\vec{v} = \overrightarrow{Op}$ .**Sortie** : le rayon d'apparition de  $\vec{v}$ .

```

1 si  $\vec{v} = (1, 0)$  alors retourner 1 ; si  $\vec{v} = (1, 1)$  alors retourner 2 ;
2  $q \leftarrow \text{pred}(p)$  ;  $q' \leftarrow \text{succ}(p)$  ;  $R \leftarrow 0$  ;
3 boucle
4    $R_p \leftarrow \text{R\_couv}(R, \vec{v})$  ;  $R_q \leftarrow \text{R\_couv}(R, \overrightarrow{Oq})$  ;
5   si  $\text{est\_incluse}(R_q, R_p, \overrightarrow{Oq'}) = \text{faux}$  alors
6      $R_{q'} \leftarrow \text{R\_couv}(R, \overrightarrow{Oq'})$  ;
7     si  $\text{est\_incluse}(R_{q'}, R_p, \overrightarrow{Oq}) = \text{faux}$  alors retourner  $R_p$  ;
8    $R \leftarrow R + 1$  ;

```

**Algorithme 5.3 : est\_incluse****Entrées** : deux entiers positifs  $R$  et  $R'$ , et un vecteur  $\vec{v}(v_x, v_y)$ .**Sortie** : test d'inclusion de la boule  $\mathcal{B}(O, R)$  dans la boule  $\mathcal{B}(O - \vec{v}, R')$ . $x \leftarrow \lfloor \sqrt{R} \rfloor$  ;  $y \leftarrow 0$  ; $d \leftarrow x^2$  ;  $d' \leftarrow (x + v_x)^2 + v_y^2$  ;**tant que**  $x \geq y$  **faire**  **si**  $d' > R'$  **alors retourner faux** ;   $y \leftarrow y + 1$  ;   $d \leftarrow d + 2y - 1$  ;  **si**  $d \leq R$  **alors**  $d' \leftarrow d' + 2y + 2v_y - 1$  ;  **sinon**     $d \leftarrow d - 2x + 1$  ;     $d' \leftarrow d' + 2y - 2x + 2v_y - 2v_x$  ;     $x \leftarrow x - 1$  ;**retourner vrai** ;

il en est de même pour la fonction `est_incluse`. La boucle principale est composée d'au plus 5 appels à ces deux fonctions, la complexité globale est donc de l'ordre de  $\sum_{R=0}^{R_{app}(\vec{v})} \sqrt{R}$ . Nous majorons cette somme par une intégrale, en utilisant l'inégalité  $\sum_{t=0}^x \sqrt{t} \leq \int_1^{x+1} \sqrt{t} dt$ , qui tend vers  $\frac{2}{3}x^{3/2}$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Par conséquent, l'algorithme `Rapp` s'exécute en temps  $\mathcal{O}(R_{app}^{3/2}(\vec{v}))$ . D'autre part, il est clair que sa complexité en espace est  $\mathcal{O}(0)$ .

Nous allons voir dans les deux prochains paragraphes, comment optimiser cet algorithme.

## 5.4 Une zone de couverture

La première optimisation concerne le calcul du rayon de couverture. Nous reprenons les notations du paragraphe 5.2 :  $\vec{v}$  est un vecteur visible de  $\mathbb{G}(\mathbb{Z}^2)$  et  $B$  une boule de centre  $O$ , et on cherche un point  $q$  de  $B$  qui maximise la distance à  $p = O - \vec{v}$ . Il est intéressant de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de parcourir intégralement le générateur du bord de  $B$ . En effet, comme illustré sur la figure 5.7, un tel point  $q$  se situe entre deux points  $x$  et  $y$  qui sont les

intersections des frontières des boules  $B$  et  $H_p(B)$ . Nous allons voir que la longueur de l'arc liant  $x$  et  $y$  est négligeable devant le périmètre d'un cercle de rayon  $r$ , permettant ainsi d'améliorer la complexité de l'algorithme `R_couv`, et ainsi d'optimiser le calcul du rayon d'apparition d'un vecteur donné.

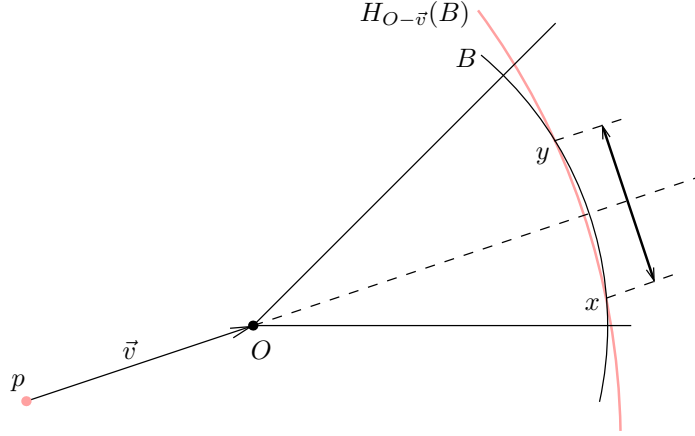


FIG. 5.7 –  $x$  et  $y$  sont les intersections du cercle de centre  $O$  et rayon  $rad(B)$ , et du cercle de centre  $O - \vec{v}$  et rayon  $\mathcal{R}_p(B)$ . Les points de  $B$  qui maximisent la distance à  $p$  sont situés sur la frontière de  $B$ , entre  $x$  et  $y$ .

On peut calculer une borne supérieure précise de la longueur de cet arc si on dispose d'une borne inférieure précise de  $\mathcal{R}_p(B)$ . La première étape consiste donc à minorer  $\mathcal{R}_p(B)$ , en utilisant une analyse plus fine que celle utilisée dans la preuve du lemme 4.11.

Pour tout vecteur visible  $\vec{v}$ , on note  $L(\vec{v})$  l'ensemble des lignes de  $\mathbb{R}^2$  qui sont orthogonales à  $\vec{v}$  et qui possèdent au moins un point de  $\mathbb{Z}^2$ . Soit  $\vec{u}$  un vecteur visible de  $\mathbb{Z}^2$  orthogonal à  $\vec{v}$  et  $\vec{u}'$  un vecteur tel que  $(\vec{u}, \vec{u}')$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$  (voir la figure 5.8). Géométriquement,  $\vec{u}'$  est le vecteur de la base  $(\vec{u}, \vec{u}')$  qui permet de « passer » d'une ligne de  $L(\vec{v})$  à une de ses voisines. Étant donné que  $\mathbb{Z}^2$  est un réseau (et donc possède une structure de groupe discret), la distance entre deux lignes voisines de  $L(\vec{v})$  est constante ; on la note  $\delta(\vec{v})$ . Le parallélogramme fondamental de la base  $(\vec{u}, \vec{u}')$  a pour aire  $\|\vec{u}\| \delta(\vec{v})$ , or le parallélogramme fondamental de toute base de  $\mathbb{Z}^2$  a pour aire 1. On en déduit  $\delta(\vec{v}) = 1/\|\vec{u}\|$ . Enfin, remarquons qu'il n'existe (pour le choix de  $\vec{u}$ ) que deux vecteurs visibles orthogonaux à  $\vec{v}$ , dont les coordonnées sont  $(v_2, -v_1)$  et  $(-v_2, v_1)$ . La norme de  $\vec{u}$  est donc égale à celle de  $\vec{v}$ , ce qui implique  $\delta(\vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|}$ .

Nous utilisons maintenant ce découpage en lignes pour approximer le rayon de couverture  $\mathcal{R}_p(B)$ . On note  $r$  le rayon de  $B$ , et on appelle  $C$  le cercle (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Soit  $a$  le point de la demi-droite  $O + \vec{v}\mathbb{R}_+$  tel que  $a' = a + \vec{u}$  appartient à  $C$  (voir la figure 5.9). On pose donc l'hypothèse :  $r$  est supérieur à  $\|\vec{v}\|$ , qui n'est pas gênante dans le sens où les configurations que l'on recherche (les configurations d'apparition d'un vecteur) sont obtenues pour des rayons bien supérieurs à la norme du vecteur considéré, comme nous le verrons au §5.7. On note  $d$  le point du segment  $[Oa]$  pour lequel  $da = \delta(\vec{v})$ . Soit  $c$  le point de la droite orthogonale à  $\vec{v}$  et qui passe par  $d$ , tel que  $c' = c + \vec{u}$  appartient à  $C$ . Il existe une ligne  $\ell$  de  $L(\vec{v})$  entre les droites  $(aa')$  et  $(cc')$  ; soit  $b$  le point de  $\ell$  pour lequel  $b' = b + \vec{u}$  appartient à  $C$ . Étant donné que le segment  $[bb']$  est inclus dans  $\ell$  et que sa longueur est  $\|\vec{u}\|$ , ce segment possède un point  $z$  de  $\mathbb{Z}^2$ . On a naturellement l'inégalité  $pz \geq pb$ . De plus, on a  $pb \geq pc$  : en effet,  $p$  est au-dessus de la médiatrice  $m$  de  $[b'c']$  (celle-ci passe par  $O$ ), et donc  $p$  est également au-dessus de la médiatrice

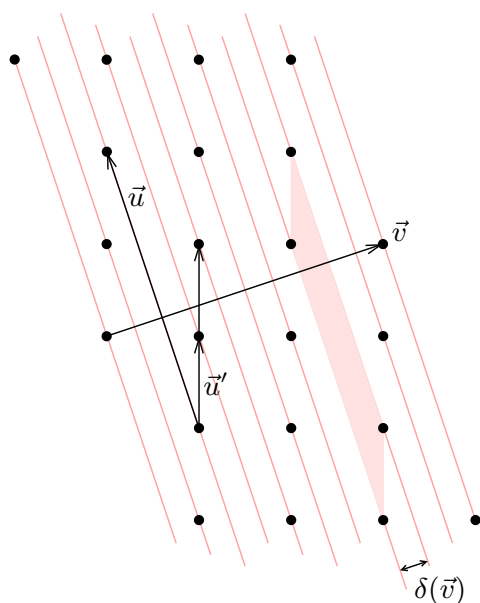


FIG. 5.8 – Lignes de  $L(\vec{v})$  (en gris), orthogonales à  $\vec{v}$  et qui intersectent  $\mathbb{Z}^2$ .  $\vec{u}$  est un vecteur orthogonal à  $\vec{v}$ , et  $(\vec{u}, \vec{u}')$  est une base du réseau  $\mathbb{Z}^2$  dont le parallélogramme fondamental est dessiné grisé.

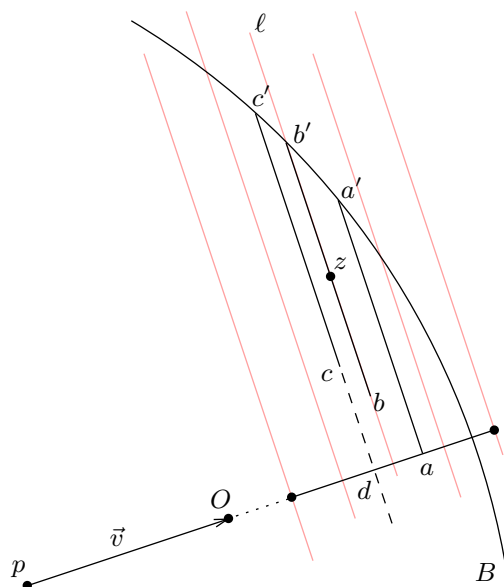


FIG. 5.9 – Le segment  $[bb']$  a pour longueur  $\|\vec{u}\|$  et est inclus dans une ligne  $\ell$  de  $L(\vec{v})$ , il possède donc un point entier  $z$ . On peut minorer  $pz$  par  $pc$ .

de  $[bc]$ , qui est la translatée de  $m$  par le vecteur  $-\vec{u}$ . Par conséquent  $pz \geq pc$ , et puisque  $z \in B$  on a  $\mathcal{R}_p(B) \geq pc$ . Calculons la distance  $pc$  : le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle  $(pdc)$  donne

$$pc^2 = pd^2 + cd^2 = (\|\vec{v}\| + Od)^2 + (c'd - \|\vec{u}\|)^2.$$

Puisque  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont même norme, on développe  $pc^2 = v^2 + Od^2 + c'd^2 + 2\|\vec{v}\|(Od - c'd)$ . Or par construction de  $c'$  et  $d$ , on a  $Od^2 + c'd^2 = Oc'^2 = r^2$ , donc  $pc^2 = r^2 + v^2 + 2\|\vec{v}\|(Od - c'd)$ . On peut remplacer  $c'd^2$  par  $Oc'^2 - Od^2 = r^2 - Od^2$  (Pythagore dans  $(Oc'd)$ ), pour obtenir

$$pc^2 = r^2 + v^2 + 2\|\vec{v}\|(Od - \sqrt{r^2 - Od^2}).$$

On substitue ensuite  $Od$  par  $Oa - \delta(\vec{v}) = Oa - \frac{1}{\|\vec{v}\|}$ , et on écrit  $Oa^2$  comme  $Oa'^2 - aa'^2 = r^2 - v^2$ . Ceci nous permet de déduire

$$pc^2 = r^2 + v^2 + 2\|\vec{v}\| \left( \sqrt{r^2 - v^2} - \frac{1}{\|\vec{v}\|} - \sqrt{r^2 - \left( \sqrt{r^2 - v^2} - \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right)^2} \right).$$

En développant le dernier carré, on peut écrire

$$pc^2 = r^2 + v^2 + 2\|\vec{v}\| \left( \sqrt{r^2 - v^2} - \sqrt{\frac{2}{\|\vec{v}\|} \sqrt{r^2 - v^2} + v^2 - \frac{1}{v^2}} \right) - 2.$$

En omettant les termes négligeables  $-v^2$  et  $-\frac{1}{v^2}$  de la deuxième racine carrée, on obtient finalement

$$\mathcal{R}_{O-\vec{v}}^2(B) \geq pc^2 > r^2 + v^2 + 2\|\vec{v}\| \left( \sqrt{r^2 - v^2} - \sqrt{\frac{2r}{\|\vec{v}\|} + v^2} \right) - 2. \quad (5.1)$$

Notons que cette borne est plus serrée (d'un facteur  $\|\vec{v}\|$ ) que celle établie dans la preuve du lemme 4.11. En effet, elle permet d'établir, par un développement limité d'ordre 1 :

$$r + \|\vec{v}\| - \mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B) \leq \sqrt{\frac{2\|\vec{v}\|}{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty. \quad (5.2)$$

Revenons maintenant au calcul de la zone de couverture  $xy$  de la figure 5.7. Pour simplifier les notations, on fixe  $r' = \mathcal{R}_p(B)$ . Remarquons tout d'abord que comme  $B$  et  $H_p(B)$  ont pour centres respectifs  $O$  et  $p$ , la droite  $(Op)$  est la médiatrice du segment  $[xy]$ . Soit  $t$  l'intersection des droites  $(Op)$  et  $(xy)$ , voir la figure 5.10. Nous allons encore utiliser Pythagore, dans les triangles  $(Otx)$  et  $(ptx)$ , pour écrire  $xt^2$  de deux façons : d'une part  $xt^2 = Ox^2 - Ot^2$ , d'autre part  $xt^2 = px^2 - pt^2$  ; on obtient ainsi  $Ox^2 - Ot^2 = px^2 - pt^2$ . Les distances  $Ox$  et  $px$  valent respectivement  $r$  et  $r'$ , tandis que  $pt$  vaut  $Ot + \|\vec{v}\|$ . En effectuant ces substitutions, on déduit  $Ot = \frac{1}{2\|\vec{v}\|}(r'^2 - r^2 - v^2)$ . On remplace ensuite cette expression de  $Ot$  dans  $xt^2 = Ox^2 - Ot^2$ , pour obtenir

$$xt^2 = r^2 - \frac{1}{4v^2} (r'^2 - r^2 - v^2)^2. \quad (5.3)$$

Enfin, on peut injecter la borne inférieure de  $r'$  obtenue en (5.1), dans (5.3) ; ce qui donne

$$xt^2 < r^2 - \left( \sqrt{r^2 - v^2} - \sqrt{\frac{2r}{\|\vec{v}\|} + v^2} + \frac{\|\vec{v}\|}{2} - \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right)^2. \quad (5.4)$$

En remplaçant  $xt$  par  $xy/2$  et en effectuant un développement limité, on aboutit à

$$xy < 2^4 \sqrt{\frac{8}{\|\vec{v}\|}} r^{3/4} + \mathcal{O}(\sqrt{r}) \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty. \quad (5.5)$$

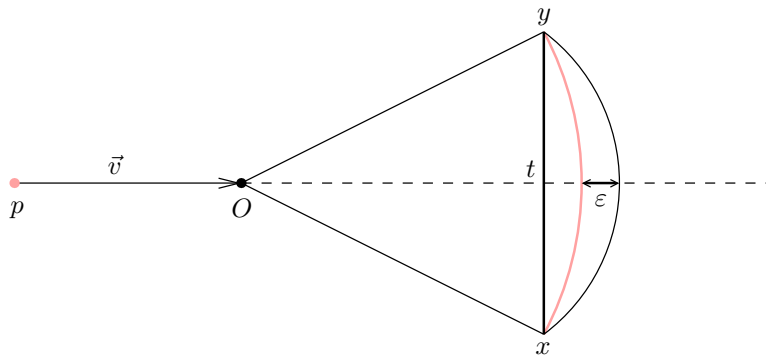


FIG. 5.10 – Sur l'axe  $O + \vec{v}\mathbb{R}_+$ , les frontières des boules  $B$  (en noir) et  $H_p(B)$  (en gris) sont espacées de  $\varepsilon(r) = r + \|\vec{v}\| - \mathcal{R}_p(B)$ .

On peut modifier l'algorithme `R_couv` afin qu'il ne parcoure que les points du générateur de  $B$  qui sont au plus à distance  $xt$  de la droite  $(Op)$ . L'inéquation (5.5) nous donne le nombre de ces points ; on obtient ainsi un algorithme dont la complexité est  $\mathcal{O}\left(\frac{r^{3/4}}{\sqrt[4]{\|\vec{v}\|}}\right)$ .

## 5.5 Les serrures maximales

Nous présentons dans ce paragraphe une seconde optimisation pour le calcul du rayon d'apparition. Elle découle du fait que pour calculer le rayon d'apparition de  $\vec{v}$ , il n'est pas nécessaire d'étudier toutes les serrures  $(R, \vec{v})$  pour lesquelles  $0 \leq R \leq R_{app}(\vec{v})$ .

Considérons deux serrures  $(R, \vec{v})$  et  $(R', \vec{v})$  ayant même rayon<sup>†</sup>, mais pour lesquelles  $B_{R'} \subsetneq B_R$ . Observons que s'il n'existe aucune clef pour la serrure  $(R', \vec{v})$ , alors il n'existe aucune clef pour  $(R, \vec{v})$ . Une serrure  $(R, \vec{v})$  est dite *maximale* si  $B_R$  est maximale dans  $H_{O-\vec{v}}(B_R)$ , autrement dit si  $B = I_O(H_{O-\vec{v}}(B_R))$ , voir la figure 5.11. Par l'observation précédente, il est donc suffisant de considérer uniquement les serrures maximales pour calculer le rayon d'apparition : celui-ci est donné par le rayon de la plus petite serrure maximale qui ne possède pas de clef.

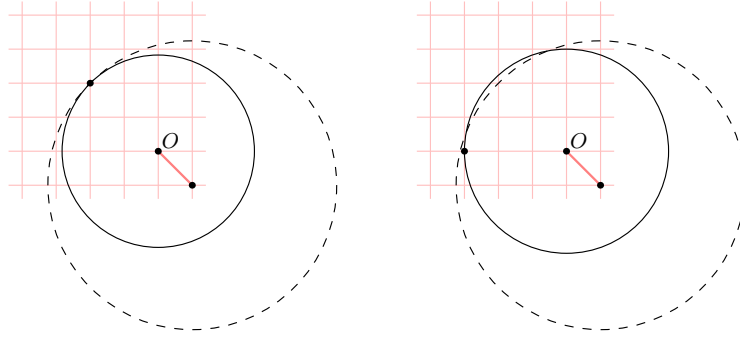


FIG. 5.11 – Pour  $\vec{v} = (-1, 1)$  : la serrure  $(\sqrt{8}, \vec{v})$  à gauche, et la serrure maximale correspondante  $(\sqrt{9}, \vec{v})$ , à droite. Leur rayon est  $\sqrt{3^2 + 3^2}$ .

Remarquons que pour  $d_4$  et  $d_8$ , toutes les serrures sont maximales. En effet pour ces distances on a toujours  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_R) = R + \|\vec{v}\|$ , et donc  $B_R \neq B_{R'}$  implique  $H_{O-\vec{v}}(B_R) \neq H_{O-\vec{v}}(B_{R'})$ .

L'algorithme `Rapp_2` est similaire à l'algorithme `Rapp` en ce qui concerne le calcul des inclusions en directions  $\text{pred}(\vec{v})$  et  $\text{succ}(\vec{v})$ , mais il n'explore que les serrures maximales, par rayons croissants. On rappelle la notation  $p = O + \vec{v}$ . La variable  $R_p$  représente le rayon des serrures maximales, elle est initialisée à  $\|\vec{v}\|$  (la serrure  $(0, \vec{v})$  est maximale). La fonction `R_int` $(R_p, \vec{v})$  calcule le rayon de  $I_O(\mathcal{B}(p, R_p))$ , tandis que `nextRp` $(R, \vec{v})$  calcule le rayon de la prochaine serrure maximale, sachant que  $(R, \vec{v})$  est maximale. Nous détaillons dans la suite ces deux fonctions.

La fonction `R_int` $(R, \vec{v})$  parcourt les points  $q_i$  qui sont voisins de  $B_R$ , voir la figure 5.12. Le rayon de la plus grande boule *ouverte* de centre  $O + \vec{v}$  incluse dans  $B_R$  est donnée par la valeur minimale des distances  $pq_i$  ; puisque  $d_e^2$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $\min\{pq_i\} - 1$  est un rayon de  $I_{O+\vec{v}}(B_R)$ . Par le lemme 4.3, il est suffisant de considérer les points  $q_i$  pour lesquels  $\overrightarrow{pq_i} \in G(\mathbb{Z}^2)$ . Les coordonnées du point  $q_i$  dans le repère de centre  $p$  sont notées  $(x, y)$  ; le premier point  $q_1$  à considérer a donc une ordonnée nulle, et son abscisse  $x$  est le plus petit entier vérifiant  $\|(x, 0) + \vec{v}\|^2 > R$ , autrement dit  $x = \lfloor \sqrt{R - v_y^2} - v_x \rfloor + 1$ .

Notons que cette fonction peut être écrite de manière similaire à `R_couv`, c'est-à-dire en utilisant uniquement des additions. Nous avons choisi ici l'écriture avec des normes par souci de clarté.

Détaillons maintenant le fonctionnement de `nextRp`. Pour toute boule  $B$  de centre  $O$ , on note  $Q(B) = \left\{ q \in G(\mathbb{Z}^2) \setminus B : (q_1, q_2 - 1) \in B \text{ ou } (q_2 = 0 \text{ et } (q_1 - 1, 0) \in B) \right\}$ . Ces points sont dessinés en noir sur la figure 5.13. En d'autres termes, les points de  $Q(B)$  sont les points les plus

<sup>†</sup>c'est-à-dire  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_R) = \mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_{R'})$

---

**Algorithme 5.4 : Rapp\_2**

---

**Entrée :** un vecteur visible  $\vec{v} = \overrightarrow{Op}$ .  
**Sortie :** le rayon d'apparition de  $\vec{v}$ .  
**si**  $\vec{v} = (1, 0)$  **alors retourner** 1 ; **si**  $\vec{v} = (1, 1)$  **alors retourner** 2 ;  
 $q \leftarrow \text{pred}(p)$  ;  $q' \leftarrow \text{succ}(p)$  ;  $R_p \leftarrow \|\vec{v}\|^2$  ;  
**boucle**  
     $R \leftarrow \text{R\_int}(R_p, \vec{v})$  ;  
     $R_q \leftarrow \text{R\_couv}(R, \overrightarrow{Oq})$  ;  
    **si**  $\text{est\_incluse}(R_q, R_p, \overrightarrow{Oq'}) = \text{faux}$  **alors**  
         $R_{q'} \leftarrow \text{R\_couv}(R, \overrightarrow{Oq'})$  ;  
        **si**  $\text{est\_incluse}(R_{q'}, R_p, \overrightarrow{Oq}) = \text{faux}$  **alors retourner**  $R_p$  ;  
     $R_p \leftarrow \text{next\_Rp}(R, \vec{v})$  ;

---



---

**Algorithme 5.5 : R\_int**

---

**Entrées :** un vecteur  $\vec{v}(v_x, v_y)$  et un entier  $R \geq \|\vec{v}\|^2$ .  
**Sortie :** un rayon de  $I_{O+\vec{v}}(B_R)$ .  
 $x \leftarrow \lfloor \sqrt{R - v_y^2} - v_x \rfloor + 1$  ;  $y \leftarrow 0$  ;  
 $R' \leftarrow R$  ;  
**tant que**  $x \geq y$  **faire**  
     $d' \leftarrow x^2 + y^2$  ;  
    **si**  $d' < R'$  **alors**  $R' \leftarrow d'$  ;  
     $y \leftarrow y + 1$  ;  $x \leftarrow x - 1$  ;  
     $d \leftarrow \|(x, y) + \vec{v}\|^2$  ;  
    **si**  $d \leq R$  **alors**  $x \leftarrow x + 1$  ;  
**retourner**  $R' - 1$  ;

---

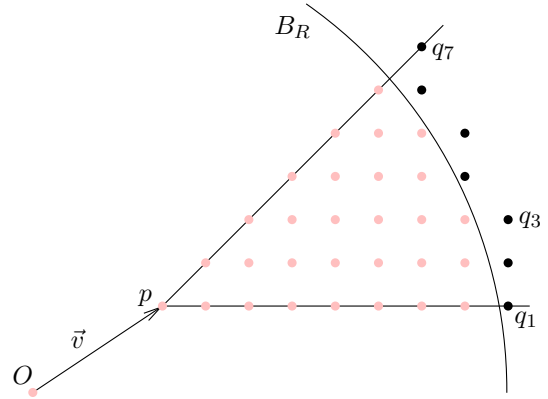


FIG. 5.12 – Les points  $q_1, \dots, q_7$  parcourus par l'algorithme  $\text{R\_int}$ , pour une boule  $B_R$  et un vecteur  $\vec{v}$ . La valeur minimale des  $pq_i - 1$  est un rayon de  $I_p(B_R)$ .

proches de  $O$  à l'extérieur de  $B$ , et donc il existe un point  $q \in Q(B)$  dont la distance à  $O$  est le rayon représentable immédiatement supérieur au rayon de  $B$ .

Soit  $(R, \vec{v})$  une serrure maximale — avec  $\vec{v} \in G(\mathbb{Z}^2)$  —, et  $R'$  le rayon représentable immédiatement supérieur à  $R$ . Par construction de  $Q(B_R)$ , on a  $G(B_{R'} \setminus B_R) \subseteq Q(B_R)$ . La serrure  $(R, \vec{v})$  est maximale donc  $H_{O-\vec{v}}(B_R)$  est strictement incluse dans  $H_{O-\vec{v}}(B_{R'})$ . Par conséquent tout point de  $B_{R'}$  qui maximise la distance à  $O - \vec{v}$  appartient à  $G(B_{R'} \setminus B_R)$ , et donc appartient à  $Q(B_R)$ . La fonction  $\text{nextRp}(R, \vec{v})$  parcourt les points de  $Q(B_R)$ , en commençant par le point  $(\lfloor \sqrt{R} \rfloor + 1, 0)$ . Les variables  $(x, y)$  représentent les coordonnées des points de  $Q(B_R)$ . La variable  $\text{nextR}$  est utilisée pour calculer le rayon représentable strictement supérieur à  $R$ .

Analysons la complexité du calcul de  $R_{app}(\vec{v})$  réalisé par  $\text{Rapp\_2}$  : nous utilisons le fait que l'algorithme énumère uniquement les boules  $B_R$  dont au moins un point réalisant la distance  $R$  à  $O$  est situé dans la zone de couverture définie au paragraphe 5.4, voir la figure 5.14.

On note  $F(R)$  la quantité de représentations d'un entier  $R$  comme somme de deux carrés, en comptant les permutations et changements de signe. La probabilité que le cercle de rayon eucli-

**Algorithme 5.6 : next\_Rp**

**Entrées :** un vecteur  $\vec{v}(v_x, v_y)$  et un entier  $R \geq 0$ , tels que la serrure  $(R, \vec{v})$  est maximale.

**Sortie :** le rayon représentable de la plus petite serrure qui succède à  $(R, \vec{v})$ .

$x \leftarrow \lfloor \sqrt{R} \rfloor ; y \leftarrow 0 ;$

$nextR \leftarrow (x + 1)^2 ;$

$nextRp \leftarrow \|(x + 1, y) + \vec{v}\|^2 ;$

**tant que**  $x \geq y$  **faire**

$d \leftarrow x^2 + y^2 ; d' \leftarrow \|(x, y) + \vec{v}\|^2 ;$

**si**  $d > R$  **alors**

**si**  $d < nextR$

$nextR \leftarrow d ; nextRp \leftarrow d' ;$

**sinon si**  $d = nextR$  **et**  $d' > nextRp$

$nextRp \leftarrow d' ;$

$x \leftarrow x - 1 ;$

$y \leftarrow y + 1 ;$

**retourner**  $nextRp ;$

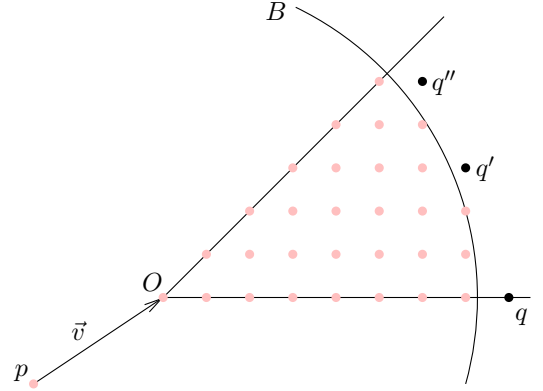


FIG. 5.13 –  $B$  est une boule de centre  $O$  et rayon  $R$ . Le point de  $G(\mathbb{Z}^2) \setminus B$  le plus proche de  $O$  est  $q$ ,  $q'$  ou  $q''$ . Si la serrure  $(R, \vec{v})$  est maximale alors le rayon de la serrure succédant à  $(R, \vec{v})$  est  $pq$ ,  $pq'$  ou  $pq''$ .

dien  $\sqrt{R}$  possède un point de  $\mathbb{Z}^2$  situé dans la zone de couverture est donc

$$\begin{aligned} \text{pr}(R) &= \frac{\text{largeur de la zone de couverture en } \sqrt{R}}{\text{périmètre du cercle de rayon } \sqrt{R}} \times F(R) = \frac{2 R^{3/8} \sqrt[4]{8/\|\vec{v}\|}}{2\pi\sqrt{R}} \times F(R) \\ &= \frac{\sqrt[4]{8/\|\vec{v}\|} F(R)}{\pi R^{1/8}}. \end{aligned}$$

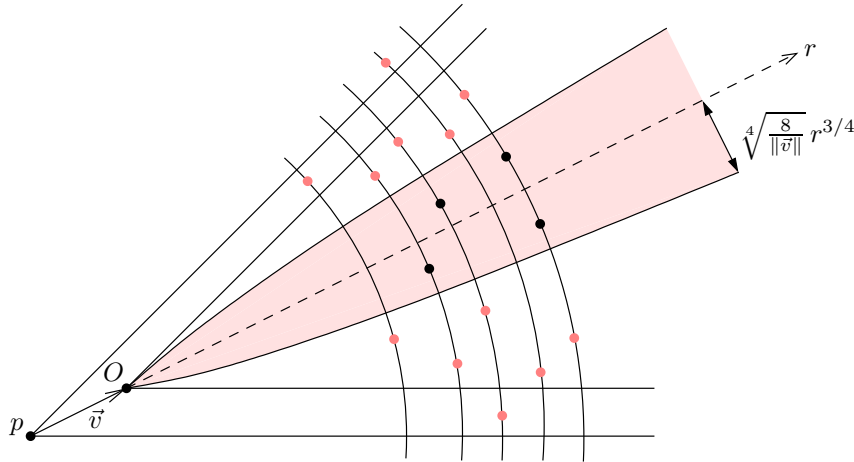


FIG. 5.14 – Les points de  $B_r$  qui maximisent la distance à  $p$  sont dans la zone de couverture (zone grisée).

Les fonctions  $R\_int$ ,  $est\_incluse$  et  $next\_Rp$  peuvent être optimisées de la même manière que  $R\_couv$ , c'est-à-dire en ne parcourant que la zone de couverture de la boule  $B_R$ . L'itération

de la boucle principale de `Rapp_2` pour la serrure  $(R, \vec{v})$  s'effectue donc en temps  $\mathcal{O}(R^{3/8})$ , et l'algorithme a donc une complexité globale

$$\mathcal{O}\left(\sum_{R=0}^{R_{app}(\vec{v})} R^{3/8} \text{pr}(R)\right) = \mathcal{O}\left(\sum_{R=0}^{R_{app}(\vec{v})} R^{1/4} F(R)\right).$$

Enfin, le théorème de Gauss nous indique que  $F(R)$  vaut en moyenne  $\pi$ , et on conclut que l'algorithme `Rapp_2` s'exécute en temps  $\mathcal{O}(R_{app}^{5/4}(\vec{v}))$ . Là encore, la complexité en espace est constante.

## 5.6 Un algorithme pour $\mathcal{T}(R)$

Nous proposons dans ce paragraphe un algorithme pour le calcul de  $\mathcal{T}(R)$  qui, contrairement à la méthode originelle [RT05], n'utilise ni DT, ni LUT. D'autre part les rayons de couverture ne sont pas calculés par des parcours de frontières de boules.

L'idée centrale est de représenter les vecteurs de  $G(\mathbb{Z}^2)$  par une liste chaînée, telle que chaque vecteur  $\vec{v}$  de la liste pointe sur un vecteur  $\text{next}(\vec{v})$  dont la norme lui est immédiatement supérieure, comme indiqué sur la figure 5.15. L'ordre dans la liste de deux vecteurs ayant la même

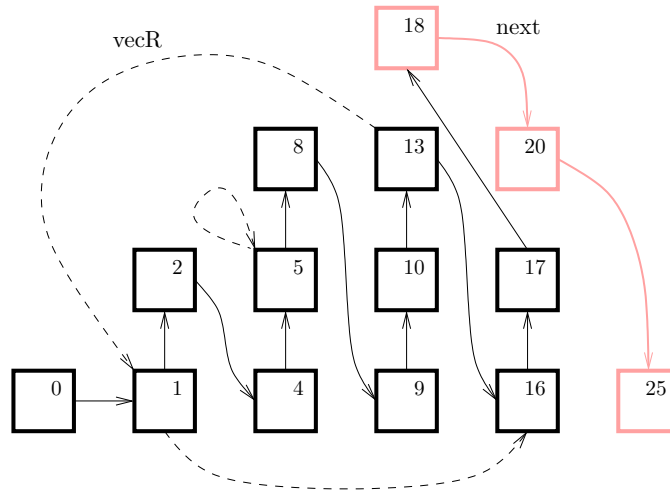


FIG. 5.15 – Chaînage des points à l'intérieur d'une boule  $B$  de rayon 17. Chaque point  $p$  a un pointeur  $\text{next}(p)$  vers un point dont la norme lui est supérieure (représenté par une flèche pleine). Les cases grisées sont les points de  $G(\mathbb{Z}^2)$  à l'extérieur de  $B$ , d'abscisse minimale sur chaque colonne avoisinant la frontière de  $B$  (ce sont les points de l'ensemble  $Q(B)$  défini au §5.5). Le premier point grisé de la liste fournit le rayon représentable de la plus petite boule strictement plus grande que  $B$ . De plus, chaque point visible  $p$  a un pointeur  $\text{vecR}(p)$  (flèche en pointillés) vers le premier point de la liste dont la norme est le rayon de  $I_p(B)$ . Seuls 3 pointeurs  $\text{vecR}$  sont dessinés.

norme — par exemple  $(5, 0)$  et  $(4, 3)$  — est choisi arbitrairement. Grâce à ce chaînage, il est simple de connaître le(s) nouveau(x) point(s) à considérer lorsque l'on passe d'une boule de rayon  $R$  à une boule de rayon immédiatement supérieur.

Appelé avec le paramètre  $R_{max}$ , l'algorithme `T_euclid2D` énumère les boules  $B_R$  pour tout  $R$  représentable compris entre 0 et  $R_{max}$ , par  $R$  croissants. Pour chaque boule  $B_R$ , l'algorithme



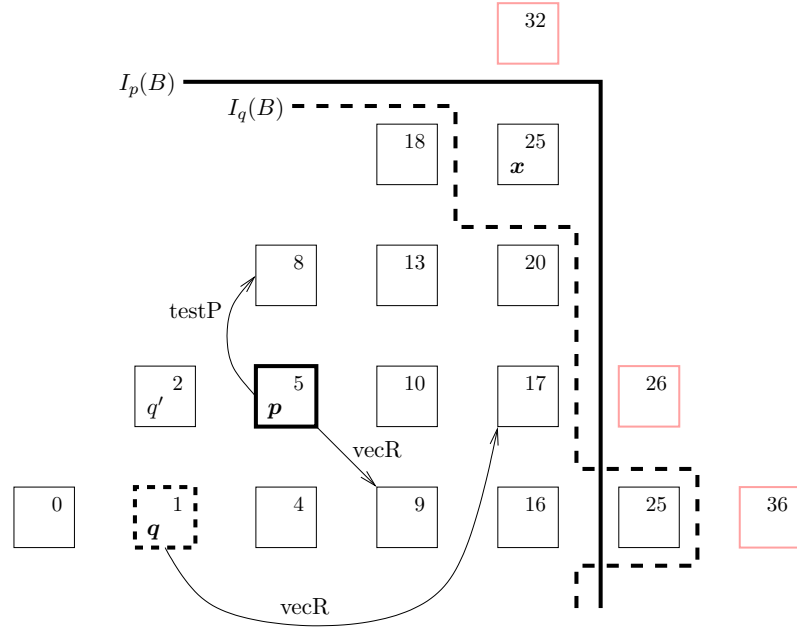


FIG. 5.16 – Configuration pour la boule ouverte  $B$  de rayon  $R = 26$  (cases noires).  $q$  est le prédécesseur de  $p(2, 1)$ .  $\text{testP}(p) = \vec{p}\vec{x}$  est le plus petit vecteur de  $G(\mathbb{Z}^2)$  tel que  $x \notin I_q(B)$ . Ici  $px$  est strictement plus grand que le rayon de la boule ouverte  $I_p(B)$  (de valeur  $\|\text{vecR}(p)\| = 9$ ) donc  $I_p(B) \not\subseteq I_q(B)$ .

cherche les configurations d'apparition de tout vecteur  $\vec{v}$  dont la norme est inférieure à  $R$ ; autrement dit il recherche, pour tout vecteur visible absent de  $T(R - 1)$ , si  $I_{O+\text{pred}(\vec{v})}(B_R)$  et  $I_{O+\text{succ}(\vec{v})}(B_R)$  contiennent  $I_{O+\vec{v}}(B_R)$ .

Afin de calculer ces inclusions, chaque vecteur visible  $\vec{v}$  possède de plus 3 pointeurs  $\text{vecR}(\vec{v})$ ,  $\text{testP}(\vec{v})$  et  $\text{testS}(\vec{v})$  :

- $\text{vecR}(\vec{v})$  est le premier vecteur de la liste chaînée dont la norme est égale au rayon de la boule ouverte  $I_{O+\vec{v}}(B_R)$ ;
- $\text{testP}(\vec{v})$  (resp.  $\text{testS}(\vec{v})$ ) est le premier vecteur  $\vec{z}$  de la liste chaînée pour lequel  $O + \vec{v} + \vec{z} \notin I_{O+\text{pred}(\vec{v})}(B_R)$  (resp.  $\notin I_{O+\text{succ}(\vec{v})}(B_R)$ ).

La propriété  $I_{O+\vec{v}}(B_R) \not\subseteq I_{O+\text{pred}(\vec{v})}(B_R)$  est donc équivalente à  $\|\text{testP}(\vec{v})\| \leq \|\text{vecR}(\vec{v})\|$ . De même,  $I_{O+\vec{v}}(B_R) \not\subseteq I_{O+\text{succ}(\vec{v})}(B_R) \Leftrightarrow \|\text{testS}(\vec{v})\| \leq \|\text{vecR}(\vec{v})\|$ . Les figures 5.15 et 5.16 présentent deux exemples de chaînages entre les vecteurs.

Nous donnons quelques détails sur l'algorithme  $T\_eucli2D$ . La variable  $\text{outV}$  pointe sur le premier vecteur de la liste chaînée à l'extérieur de  $B_R$ . De la ligne 5 à la ligne 7, on met à jour les vecteurs de la liste chaînée qui sont à l'extérieur de  $B_R$  (les points grisés sur les figures 5.15 et 5.16) : il est suffisant d'insérer le vecteur situé au dessus de  $\text{outV}$ , et le vecteur à droite de  $\text{outV}$  si son abscisse est nulle. Il est en effet suffisant que la liste chaînée possède les vecteurs de  $Q(B_R)$ , tel que défini au paragraphe 5.5. Lorsqu'un vecteur est inséré dans la liste, ses pointeurs  $\text{vecR}$ ,  $\text{testP}$  et  $\text{testS}$  sont initialisés à  $(1, 0)$ .

Pour chaque vecteur  $\vec{v}$  dans  $B_R$ , la mise à jour des pointeurs  $\text{vecR}$ ,  $\text{testP}$  et  $\text{testS}$  se fait aux lignes 9 – 16. Le test d'apparition de  $\vec{v}$  est réalisé à la ligne 17. Pour une boule donnée  $B_R$ , l'énumération des vecteurs (ligne 8) peut se faire en parcourant la liste chaînée, mais aussi en

---

**Algorithme 5.7 : T\_eucli2D**

---

**Entrée** : un entier positif  $R_{max}$ .

**Sortie** : le voisinage de test  $\mathcal{T}(R_{max})$ , avec les rayons d'apparition.

```

1  $T \leftarrow \{((1, 0), 1), ((1, 1), 2)\}$  ;
2  $outV \leftarrow Vecteur(2, 0)$  ;
3 tant que  $\|outV\|^2 \leq R_{max}$  faire
4    $R \leftarrow \|outV\|^2$  ;
5   tant que  $\|outV\|^2 = R$  faire
6      $insert\_next(outV)$  ;
7      $outV \leftarrow next(outV)$  ;
8   pour chaque vecteur visible  $v$  dans  $B_R$ , par norme croissante faire
9     tant que  $\|v + vecR(v)\|^2 \leq R$  faire
10       $vecR(v) \leftarrow next(vecR(v))$  ;           /* mise à jour de  $vecR(v)$  */
11     si  $v \notin T$  alors
12        $u \leftarrow pred(v)$  ;  $w \leftarrow succ(v)$  ;
13       tant que  $\|w + testP(v)\| < \|vecR(u)\|$  faire
14          $testP(v) \leftarrow next(testP(v))$  ;       /* mise à jour de  $testP(v)$ ... */
15       tant que  $\|u + testS(v)\| < \|vecR(w)\|$  faire
16          $testS(v) \leftarrow next(testS(v))$  ;       /* ...et de  $testS(v)$  */
17       si  $\|testP(v)\| \leq \|vecR(v)\|$  et  $\|testS(v)\| \leq \|vecR(v)\|$  alors
18          $T \leftarrow T \cup \{(v, R)\}$  ;           /* test d'apparition de  $v$  */
19 retourner  $T$  ;
```

---



---

**Algorithme 5.8 : insert\_next**

---

**Entrée** : un vecteur  $v$  de la liste chaînée.

**si**  $v_1 \neq v_2$  **alors** insérer  $(v_1, v_2 + 1)$  dans la liste chaînée ;

**si**  $v_2 = 0$  **alors** insérer  $(v_1 + 1, 0)$  dans la liste chaînée ;

---

suyant l'ordre lexicographique des coordonnées des vecteurs<sup>‡</sup> ; l'essentiel est que le prédécesseur et le successeur de  $\vec{v}$  soient parcourus avant  $\vec{v}$ .

Analysons maintenant la complexité de cet algorithme. Notons  $up(\vec{v}, R)$  le nombre d'instructions nécessaires pour mettre à jour les pointeurs  $vecR(\vec{v})$ ,  $testP(\vec{v})$  et  $testS(\vec{v})$  dans la boule de rayon  $R$ . Dans la boule de rayon  $R$ , le temps requis pour mettre à jour tous les pointeurs est donc de l'ordre de  $\sum_{\|\vec{v}\|^2=1}^R up(\vec{v}, R)$  ; la procédure `insert_next` est négligeable puisque l'insertion d'un vecteur dans la liste chaînée se fait après le noeud  $outV$ , et la recherche de sa position est réalisée en parcourant un nombre de noeuds inférieur au cardinal de  $Q(B_R)$ , c'est-à-dire au plus  $\sqrt{R}$ . La complexité globale de l'algorithme est ainsi de l'ordre de

$$\sum_{R=1}^{R_{max}} \sum_{\|\vec{v}\|^2=1}^R up(\vec{v}, R) \leq \sum_{R=1}^{R_{max}} \sum_{\|\vec{v}\|^2=1}^{R_{max}} up(\vec{v}, R) = \sum_{\|\vec{v}\|^2=1}^{R_{max}} \sum_{R=1}^{R_{max}} up(\vec{v}, R).$$

---

<sup>‡</sup>Ceci permet de stocker les vecteurs dans des tableaux.

Remarquons maintenant que pour un  $\vec{v}$  donné, la somme des  $up(\vec{v}, R)$  pour  $R$  de 1 à  $R_{max}$  est  $\mathcal{O}(R_{max})$ , car il y a environ  $R_{max}/2$  points dans le générateur de la boule de rayon euclidien au carré  $R_{max}$ . Par conséquent, l'algorithme `T_euclid2D` a pour complexité

$$\mathcal{O}\left(\sum_{\|\vec{v}\|^2=1}^{R_{max}} R_{max}\right) = \mathcal{O}(R_{max}^2).$$

D'autre part, il est clair que la complexité en espace est linéaire en le nombre de points entiers à l'intérieur de  $B_{R_{max}}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{O}(R_{max})$ .

## 5.7 Expérimentations

Nous illustrons les résultats des algorithmes `T_euclid2D` et `Rapp_2` sur la figure 5.17. Les points situés dans le coin inférieur gauche ont été calculés par l'algorithme `T_euclid2D` : ce sont les 540 vecteurs de  $\mathcal{T}(r = 8600)$ , nécessaires et suffisants pour détecter l'axe médian de toute forme contenue dans une image de taille  $17200 \times 17200$ . L'algorithme de Rémy et Thiel [RT05] avait permis de calculer  $\mathcal{T}(r = 4800)$ .

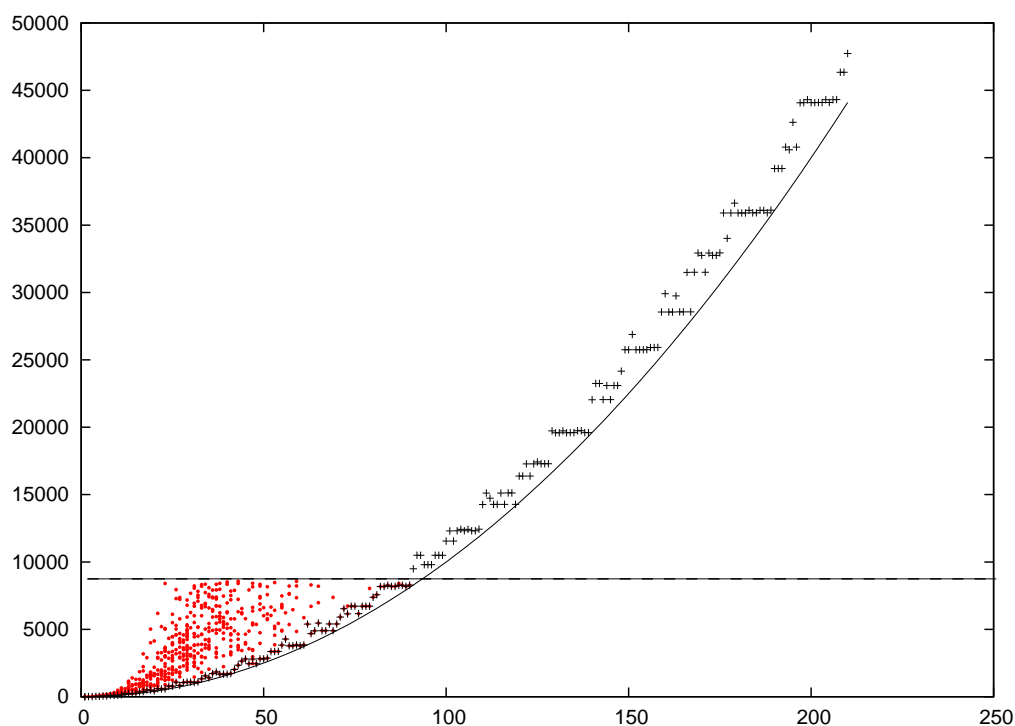


FIG. 5.17 – Rayons d'apparition (pour  $d_e$ ) de vecteurs visibles  $\vec{v} \in \mathbb{Z}^2$  en fonction de leur abscisse  $v_1$ . Les points (sous la ligne horizontale) représentent les 540 vecteurs de  $\mathcal{T}(r = 8600)$ , détectés par l'algorithme `T_euclid2D`; les croix représentent les vecteurs  $(x, 1)$  pour tous  $1 \leq x \leq 210$ , détectés par l'algorithme `Rapp_2`. Les rayons d'apparition détectés par les deux algorithmes sont au-dessus de la fonction  $y = x^2$ .

Nous remarquons que tout vecteur de  $\mathcal{T}(r = 8600)$  a un rayon d'apparition largement supérieur à sa norme. De plus, on observe que les vecteurs ayant pour ordonnée 1 ont, à norme égale,

des rayons d'apparition relativement petits. L'algorithme `Rapp_2` est très efficace (en temps comme en espace) pour calculer le rayon d'apparition d'un vecteur donné ; malheureusement on ne connaît pas l'ordre d'apparition des vecteurs de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathcal{T}$ , et il n'est donc a priori pas possible d'utiliser `Rapp_2` afin de déterminer  $\mathcal{T}(R)$ . Nous avons principalement utilisé l'algorithme `Rapp_2` pour calculer les rayons d'apparition de vecteurs d'ordonnée 1 : les croix sur la figure 5.17 illustrent les rayons d'apparition des vecteurs  $(x, 1)$ , pour tout  $x$  de 0 à 210. Les résultats nous permettent de formuler la conjecture suivante : pour tout vecteur visible  $\vec{v}$  de  $\mathbb{Z}^2$ , on a  $r_{app}(\vec{v}) \geq v_1^2$ . Cette propriété se révélerait très intéressante et aurait deux applications immédiates. D'une part elle permettrait de réduire significativement la complexité de l'algorithme de calcul de  $\mathcal{T}(R)$  : il serait en effet suffisant, dans l'algorithme `T_eucli2D`, de parcourir les vecteurs  $\vec{v}$  de  $B_R$  dont la norme au carré est inférieure à  $\sqrt{R}$ . D'autre part, elle autoriserait l'extraction de l'axe médian de toute forme sans avoir à précalculer  $\mathcal{T}(R)$ , car elle prouverait que l'ensemble des vecteurs dont la norme est inférieure à  $\sqrt{\text{rad}(\mathcal{S})}$  est un voisinage suffisant pour extraire l'AM de  $\mathcal{S}$ .

Nous soulignons un autre phénomène intéressant : un vecteur  $\vec{v}$  peut avoir un rayon d'apparition inférieur à celui de son prédécesseur ou de son successeur, ce qui n'est pas très intuitif sachant que ces deux vecteurs forment le trousseau minimal de  $\vec{v}$ . Toutefois, on observe qu'au moins un de ces deux vecteurs a un rayon d'apparition inférieur, en particulier celui ayant la plus petite norme. Nous proposons donc la conjecture suivante : si  $\vec{v}$  appartient à un certain  $\mathcal{T}(R)$ , alors le plus petit vecteur parmi  $\{\text{pred}(\vec{v}), \text{succ}(\vec{v})\}$  appartient à  $\mathcal{T}(R)$ . Ce résultat permettrait également de réduire la complexité de l'algorithme de calcul de  $\mathcal{T}(R)$ .

## 5.8 Vers la 3<sup>ème</sup> dimension

Dans cette section, nous donnons quelques pistes pour l'étude des trousseaux en dimension supérieure. Soit  $p$  un point visible de  $G(\mathbb{Z}^n)$ , et  $\mathcal{P}$  un plan (de dimension 2) qui possède  $O$ ,  $p$  et un point de  $\diamond p$ , voir la figure 5.18. Le plan  $\mathcal{P}$  possède 3 points de  $\mathbb{Z}^n$  donc  $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$  est un réseau  $L$  de points entiers, de dimension 2. Le point  $p$  est visible dans  $\mathbb{Z}^n$  donc il est également visible dans  $\mathbb{Z}^n \cap \mathcal{P}$  ; et il existe deux points  $q$  et  $q'$  tels que le parallélogramme  $(Oqpq')$  a pour aire le déterminant d'une base de  $L$  ; on appelle  $q$  et  $q'$  les *voisins* de  $p$  dans  $L$ . On peut également raisonner en termes de coordonnées : si on exprime la position des points  $p$ ,  $q$  et  $q'$  par rapport à  $O$  en utilisant une base du réseau, par exemple  $(\vec{i}, \vec{j})$  sur la figure 5.18, alors on peut utiliser l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver  $q$  et  $q'$ . Pour notre exemple, les coordonnées de  $p$ ,  $q$  et  $q'$  sont respectivement  $(4, 3)$ ,  $(1, 1)$  et  $(3, 2)$ .

Étant donné que  $L$  est un réseau de points de dimension 2, il existe une transformation affine pour laquelle  $L$  est l'image de  $\mathbb{Z}^2$ . Puisque toute transformation affine conserve les barycentres, l'argumentation développée au §5.1 est valable dans  $L$  : pour tout point  $t \in L$ , le triangle  $Opt$  contient soit  $q$ , soit  $q'$  (cf lemme 5.1). Le lemme 5.2 est également applicable ici, avec la particularité que les points  $x$  et  $z$  utilisés dans la preuve ne sont en général pas des points de  $L$ . On en conclut que tout point de  $L$  est  $p$ -dominé soit par  $q$ , soit par  $q'$ . Par conséquent, l'ensemble de tous les voisins de  $p$  qui sont dans  $\diamond p$  est un trousseau de  $p$ . Nous avons implémenté la recherche de ce trousseau, toutefois son cardinal est encore relativement grand, même en dimension 3. Nous observons (par des tests exhaustifs) qu'il existe des relations de  $p$ -domination entre des points qui appartiennent à différents réseaux  $L_i$  ; comprendre ces relations est une prochaine étape importante pour le calcul des voisinages de tests en dimension supérieure.

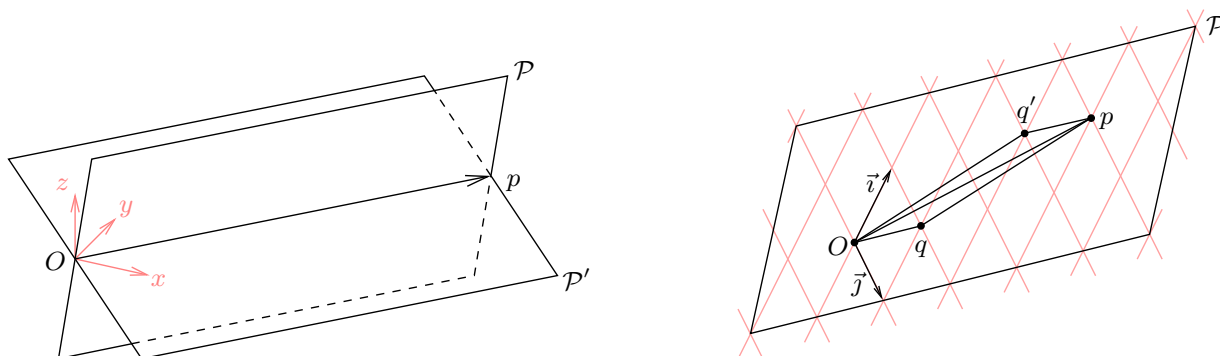


FIG. 5.18 – À gauche : deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  qui possèdent chacun  $O$ ,  $p$  et un point de  $\diamond p$ . À droite : dans le réseau  $L$  des points entiers de  $\mathcal{P}$ ,  $q$  et  $q'$  sont les voisins de  $p$ .

## 5.9 Conclusion

Nous avons établi dans ce chapitre un lien entre les suites de Farey et le trousseau des vecteurs visibles pour la distance euclidienne en dimension 2, ce qui nous a permis de proposer des algorithmes efficaces pour le calcul du voisinage  $\mathcal{T}(R)$  et des rayons d'apparition. L'exploitation de ces algorithmes nous a amené à soulever de nouveaux problèmes concernant la compréhension des voisinages de test. Nous avons ainsi proposé une conjecture sur une borne inférieure des rayons d'apparition en dimension 2, et soulevé le problème des relations de  $\vec{v}$ -domination en dimension supérieure à 3.



## Chapitre 6

# Distances et normes de chanfrein

Dans ce chapitre, nous abordons une famille de distance très utilisée en géométrie discrète, les distances de chanfrein. Leur popularité est due à leur grande variété, à la possibilité qu'elles offrent d'approximer finement la distance euclidienne, et au fait qu'elles sont des distances locales, permettant le calcul de la DT par l'algorithme simple de Rosenfeld et Pfaltz. Après un bref historique au §6.1, nous présentons l'algorithme de DT au §6.2. Puis, nous continuons au §6.3 les travaux de Rémy et Thiel concernant la caractérisation des *normes* de chanfrein : nous prouvons que leur condition suffisante de norme est également une condition nécessaire. Nous caractérisons ensuite l'intervalle de distance d'une norme de chanfrein au §6.4, et nous présentons la notion de masque de chanfrein minimal au §6.5. Finalement, nous étudions au §6.6 l'ensemble des valeurs atteintes par une distance de chanfrein donnée, en particulier dans le cas des normes ; et nous introduisons le problème arithmétique de Frobenius, qui se révélera utile pour l'étude des voisinages de test.

### 6.1 Historique

Montanari présente dans [Mon68] une famille de distances locales dans  $\mathbb{Z}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , qui inspireront les distances de chanfrein. Il définit, pour tout  $n > 0$ , un *masque*  $M_n$  qui est l'ensemble des vecteurs visibles de  $[-n, n]^2$ , pondérés par leur norme euclidienne (plus le masque  $M_0$  des 4-voisins), voir la figure 6.1. Le *graphe d'adjacence* associé à  $M_n$  est le graphe dont les

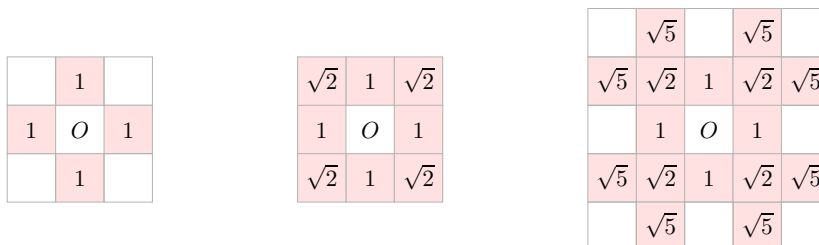


FIG. 6.1 – Masques de Montanari, de gauche à droite :  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$ .

sommets sont les points de  $\mathbb{Z}^2$ , et tel que deux sommets  $p$  et  $q$  sont reliés par une arête de poids  $d_e(p, q)$  si  $\vec{pq} \in M_n$ . La *distance de Montanari*  $d_{M_n}$  est la distance mesurée sur le graphe d'adjacence pondéré de  $M_n$ . Une des idées est de pouvoir approximer  $d_e$  aussi précisément que l'on souhaite en faisant varier  $n$ . Montanari montre que pour tout point  $p \in \mathbb{Z}^2$ , il existe un

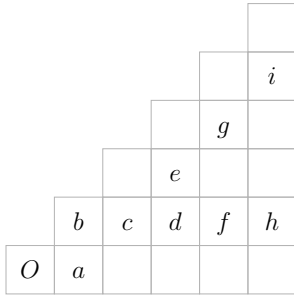


FIG. 6.2 – Notation usuelle des pondérations des masques en dimension 2.

55	50	47	44	43	40	43	44	47	50	55
50	44	39	36	35	32	35	36	39	44	50
47	39	33	28	27	24	27	28	33	39	47
44	36	28	22	19	16	19	22	28	36	44
43	35	27	19	11	8	11	19	27	35	43
40	32	24	16	8	O	8	16	24	32	40
43	35	27	19	11	8	11	19	27	35	43
44	36	28	22	19	16	19	22	28	36	44
47	39	33	28	27	24	27	28	33	39	47
50	44	39	36	35	32	35	36	39	44	50
55	50	47	44	43	40	43	44	47	50	55

FIG. 6.3 – Masque  $\mathcal{M} = \langle 8, 11, e28 \rangle$  (points grisés), et valeurs de distance à l’origine  $O$  pour  $d_{\mathcal{M}}$ .

chemin minimal qui n’utilise que deux pondérations du masque (ceci est lié au cônes d’influence, comme nous le verrons au §6.3), et il en déduit les formules analytiques de la distance.

Les distances de chanfrein, popularisées par Borgefors [Bor84][Bor86] généralisent les distances de Montanari :

- les vecteurs (déplacements) du masque sont des éléments de  $\mathbb{Z}_*^n$  ;
- les poids associés aux vecteurs sont des entiers strictement positifs.

Le masque de chanfrein est généralement noté  $\mathcal{M}$ . On adopte la convention naturelle [Thi01, §4.2] selon laquelle  $\mathcal{M}$  est central-symétrique et contient une base de  $\mathbb{Z}^n$ , afin que le masque induise une distance (symétrique) sur  $\mathbb{Z}^n$ , notée  $d_{\mathcal{M}}$ .

Une manière commode de noter les pondérations de chanfrein G-symétriques en 2D est d’attribuer une lettre à chaque vecteur visible (et sa pondération) de  $G(\mathbb{Z}^2)$ , par ordre lexicographique des coordonnées, comme illustré sur la figure 6.2. On a ainsi  $\vec{a} = (1, 0)$ ,  $\vec{b} = (1, 1)$ ,  $\vec{c} = (2, 1)$ ,  $\vec{d} = (3, 1)$ ,  $\vec{e} = (3, 2) \dots$ , et on note  $a, b, c, d, e \dots$ , leurs poids respectifs. Une pondération  $(\vec{v}, w)$  est encore notée  $(v_1, \dots, v_n; w)$ . Le masque  $\langle (1, 0; 8), (1, 1; 11), (3, 2; 28) \rangle$ , illustré sur la figure 6.3, peut s’écrire  $\langle a8, b11, e28 \rangle$ , ou simplement  $\langle 8, 11, e28 \rangle$ .

Une autre notation consiste à donner la « largeur » du masque : pour tout  $L$  impair supérieur à 3, un masque  $L \times L$  est un masque dont les déplacements appartiennent au carré centré en  $O$  et de côté  $L$ . Par exemple, les masques  $\langle a, b, c \rangle$  sont des masques  $5 \times 5$ .

Afin de minimiser l’erreur commise par rapport à  $d_e$ , Borgefors a recommandé  $\langle 3, 4 \rangle$  puis  $\langle 5, 7, 11 \rangle$  en 2D (cf figure 1.7), et  $\langle (0, 0, 1; 3), (0, 1, 1; 4), (1, 1, 1; 5) \rangle$  en 3D. Par exemple, utiliser le masque  $\langle 5, 7, 11 \rangle$  est équivalent à approcher  $\langle 1, \sqrt{2}, \sqrt{5} \rangle$  par  $\langle 1, 7/5, 11/5 \rangle$ . Par la suite, de nombreux travaux ont été dédiés à la recherche de masques de chanfrein qui minimisent l’erreur commise par rapport à  $d_e$ , voir par exemple [Ver91][Thi94][Bor96][BM98][Rem01][MF05].

## 6.2 Algorithme pour DT

Soit  $\mathcal{S}$  une forme de  $\mathbb{Z}^n$  contenue dans une image  $I$  (on étiquette les points de  $\mathcal{S}$  à 1, et les autres à 0). La transformation de distance, ou Distance Transformation de  $\mathcal{S}$  consiste à étiqueter, en tout point  $p$  de  $I$ , la distance de  $p$  au plus proche point de  $\bar{\mathcal{S}}$  (le complémentaire de  $\mathcal{S}$  dans



$\mathbb{Z}^n$ ). Pour toute distance de chanfrein, la transformation de distance d'une forme  $\mathcal{S}$  peut être effectuée par l'algorithme de Rosenfeld et Pfaltz. Cet algorithme très simple a été introduit pour  $d_4$  et  $d_8$  dans le plan  $\mathbb{Z}^2$  dans [RP66] ; il a été généralisé pour les distances de Montanari dans [Mon68], puis aux distances de chanfrein dans [Bor84] et [Bor86]. Nous en redonnons le principe, valable pour tout masque et en toute dimension.

L'algorithme se compose de deux passes séquentielles sur l'image, appelées balayage avant et balayage arrière. On choisit arbitrairement un sens de balayage avant en fixant un ordre lexicographique sur les coordonnées, par exemple pour  $x_1$  croissants, puis  $x_2$  croissants, etc. Puis, étant donné un masque de chanfrein  $\mathcal{M}$  (central-symétrique), le demi masque  $\mathcal{M}^h$  est l'ensemble des pondérations de  $\mathcal{M}$  placés avant son centre dans le sens du balayage avant. L'exécution de l'algorithme DT\_chanfrein est présenté sur la figure 6.4 pour le masque  $\langle 3, 4 \rangle$ .

---

**Algorithme 6.1 : DT\_chanfrein**


---

**Entrée :** une image  $I$  de dimensions  $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$  contenant une forme  $\mathcal{S}$ .

**Sortie :** la transformée de distance de  $\mathcal{S}$ .

```

pour chaque  $x_1$  de 1 à  $L_1$ , ...,  $x_n$  de 1 à  $L_n$  faire           /* balayage avant */
┌
│ si  $I[x_1, \dots, x_n] \neq 0$  alors
│ ┌
│ │  $I[x_1, \dots, x_n] \leftarrow \min_{(\vec{v}, w) \in \mathcal{M}^h} \{ I[(x_1, \dots, x_n) + \vec{v}] + w \}$  ;
│ │
│ └
└
pour chaque  $x_1$  de  $L_1$  à 1, ...,  $x_n$  de  $L_n$  à 1 faire       /* balayage arrière */
┌
│ si  $I[x_1, \dots, x_n] \neq 0$  alors
│ ┌
│ │  $val \leftarrow \min_{(\vec{v}, w) \in \mathcal{M}^h} \{ I[(x_1, \dots, x_n) - \vec{v}] + w \}$  ;
│ │
│ │  $I[x_1, \dots, x_n] \leftarrow \min\{ val, I[x_1, \dots, x_n] \}$  ;
│ └
└

```

---

Si  $N = L_1.L_2 \dots L_n$  est le nombre de points de l'image, l'algorithme s'exécute en temps  $\mathcal{O}(m.N)$ , où  $m$  est le nombre de pondérations de  $\mathcal{M}$ .

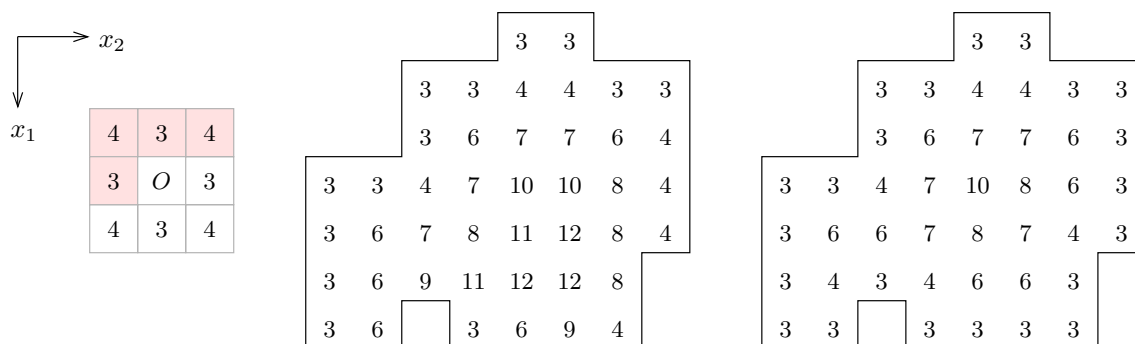


FIG. 6.4 – De gauche à droite : demi-masque  $\mathcal{M}^h$  du masque  $\mathcal{M} = \langle 3, 4 \rangle$  ; image  $I$  après le balayage avant ; image  $I$  après le balayage arrière (i.e., la DT).

### 6.3 Caractérisation des normes de chanfrein

De nombreux travaux ont été consacrés à l'optimisation des masques de chanfrein, mais peu d'auteurs se sont intéressés aux propriétés des distances de chanfrein. Borgfors introduit dans [Bor86] des contraintes dites de « régularité » sur les poids des pondérations permettant d'obtenir d'une part des propriétés sur les plus courts chemins, d'autre part des formules pour le calcul

de distances induites par certains petits masques. Cette notion de régularité est approfondie par Kiselman dans [Kis96]. Cependant la méthode de Borgfors n'est pas formalisée et difficilement généralisable à des masques de plus grande taille. Thiel étudie les distances de chanfrein en dimension 2 dans [Thi94, chapitre 3] puis en dimension  $n$  dans [Thi01], et établit des formules de calcul de distance basées sur des *déplacements élémentaires* dans des cônes engendrés par les différentes pondérations, appelés cônes d'influence. Nous savons que tout masque de chanfrein induit une distance [Ver91, page 20]; une question naturelle est de déterminer si un masque de chanfrein donné  $\mathcal{M}$  induit une *norme*, c'est-à-dire si la distance  $d_{\mathcal{M}}$  est homogène. Rémy et Thiel répondent en partie à cette question en donnant une condition *suffisante* de norme, respectivement dans l'espace  $\mathbb{Z}^3$  [Rem01], et dans  $\mathbb{Z}^n$  [Thi01]. Ils laissent ouvert le problème de la détermination des conditions nécessaires. Nous détaillons leur raisonnement au §6.3.1, puis prouvons que leur condition est également *nécessaire* pour obtenir une norme au §6.3.2. Très récemment dans [NÉ09], Normand et Évenou établissent une condition nécessaire et suffisante de norme, en utilisant une nouvelle approche fondée sur des « H-représentations » des facettes des boules de chanfrein. Nous reviendrons sur leur condition à la fin du §6.3.2.

### 6.3.1 Condition suffisante de norme

Nous reprenons dans cette section l'argumentation et en partie les notations de [Thi01, chapitre 4]. La méthode d'analyse de condition de norme consiste à plonger le masque dans  $\mathbb{R}^n$ , afin d'y exploiter la notion de convexité des boules de norme. La *boule rationnelle* d'un masque  $\mathcal{M}$ , notée  $B_{\mathcal{M}}$ , est l'enveloppe convexe (dans  $\mathbb{R}^n$ ) des déplacements de  $\mathcal{M}$  divisés par leurs poids :

$$B_{\mathcal{M}} = \text{conv} \left\{ O + \frac{\vec{v}_i}{w_i} : (\vec{v}_i, w_i) \in \mathcal{M} \right\}. \quad (6.1)$$

Un exemple de boule rationnelle d'un masque est présenté sur la figure 6.5. Thiel prouve dans

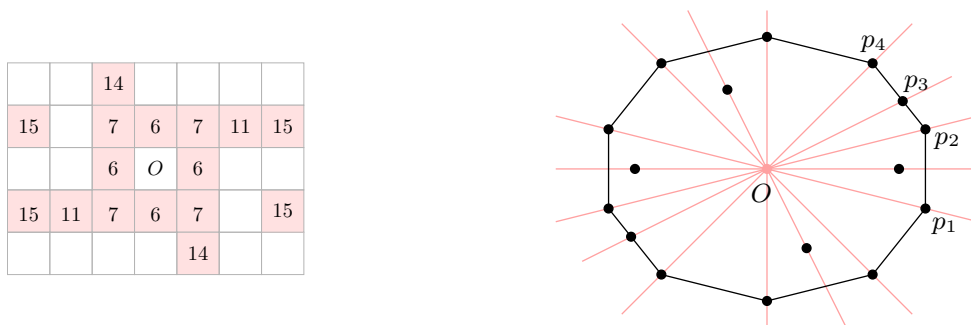


FIG. 6.5 – Un masque de chanfrein  $\mathcal{M} = \{(\vec{v}_i, w_i)\}$  et sa boule rationnelle  $B_{\mathcal{M}}$ . Les points gras représentent les points  $O + \vec{v}_i/w_i$ .

un premier temps que dans  $\mathbb{R}^n$  (et plus généralement dans tout espace vectoriel), tout masque de chanfrein induit une norme. De plus, la norme induite par  $\mathcal{M}$  est la jauge du polytope  $B_{\mathcal{M}}$  : la distance du point  $O$  à tout point  $q$  est le plus petit facteur d'étirement  $\lambda$  tel que le polytope  $\lambda.B_{\mathcal{M}}$  possède  $q$ . Pour une discussion détaillée sur les jauges, voir [Egg58].

Afin de distinguer les cônes discrets (de  $\mathbb{Z}^n$ ) des cônes réels, nous employons la notation  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \vec{v}_1\mathbb{R}_+ + \dots + \vec{v}_n\mathbb{R}_+$ . Soient  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  des vecteurs de  $\mathcal{M}$ ; le cône réel  $O + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  est un *cône d'influence* de  $\mathcal{M}$  s'il contient exactement une facette de  $B_{\mathcal{M}}$ , autrement dit s'il existe une facette de  $B_{\mathcal{M}}$  dont les points extrêmes sont  $O + \vec{v}_1/w_1, \dots, O + \vec{v}_k/w_k$ .

Maintenant, soit  $F$  une facette de  $B_{\mathcal{M}}$ ;  $F$  est un polytope de dimension  $n - 1$  ayant au moins  $n$  sommets. Une *sous-facette*  $S$  de  $F$  est un  $n - 1$  simplexe inclus dans  $F$  dont les sommets correspondent à des pondérations de  $\mathcal{M}$  qui appartiennent à la frontière de  $B_{\mathcal{M}}$ . Soit  $C$  le cône d'influence qui intersecte la facette  $F$ ; on appelle *sous-cône* de  $C$ , tout cône de sommet  $O$  qui intersecte exactement une sous-facette de  $F$ . Par exemple, sur la figure 6.5,  $[p_1p_2]$  est une facette de  $B_{\mathcal{M}}$ , et  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\overrightarrow{Op_1}, \overrightarrow{Op_2})$  est le cône d'influence associé (c'est également le seul sous-cône). Dans le cône d'influence  $C = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\overrightarrow{Op_2}, \overrightarrow{Op_4})$ , les sous-cônes sont  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\overrightarrow{Op_2}, \overrightarrow{Op_3})$ ,  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\overrightarrow{Op_3}, \overrightarrow{Op_4})$  et  $C$  car  $[p_2p_3]$ ,  $[p_3p_4]$  et  $[p_2p_4]$  sont les sous-facette de  $[p_2p_4]$ .

Thiel montre que pour tout point  $q$  d'un sous-cône  $O + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ , il existe un chemin minimal de  $O$  à  $q$  composé uniquement des déplacements  $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ , et le gradient de distance dans le sous-cône est le vecteur normal à la facette intersectée. En notant

$$\Delta_{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}} = \begin{vmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,n} \end{vmatrix} \quad (6.2)$$

le déterminant de la matrice formée par les vecteurs  $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$  du sous-cône, il établit la formule directe de distance à tout point  $q$  du sous-cône :

$$d_{\mathcal{M}}(O, q) = \frac{-1}{\Delta_{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}}} \begin{vmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} & q_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,n} & q_n \\ w_1 & \cdots & w_n & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.3)$$

On note  $d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}$  la distance induite par le masque  $\mathcal{M}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Notons que pour tout masque  $\mathcal{M}$  et tout point  $q \in \mathbb{Z}^n$ , on a  $d_{\mathcal{M}}(O, q) \geq d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$ ; en effet  $d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}$  autorise les combinaisons linéaires à coefficients positifs réels des pondérations de  $\mathcal{M}$ , tandis que  $d_{\mathcal{M}}$  est restreinte aux combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{N}$ . Puisque pour tout  $\mathcal{M}$ , la distance  $d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}$  est homogène dans  $\mathbb{R}^n$ , une condition suffisante pour que  $d_{\mathcal{M}}$  soit homogène dans  $\mathbb{Z}^n$  est que pour tout point entier  $q$ , on ait  $d_{\mathcal{M}}(O, q) = d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$ . Cette propriété est vraie si pour tout point  $q$  entier,  $\overrightarrow{Oq}$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire positive entière des vecteurs d'un sous-cône qui contient  $q$ , autrement dit si tout point  $q$  appartient à un sous-cône dont la base engendre le réseau  $\mathbb{Z}^n$ . On obtient ainsi la formulation [Thi01, théorème 4.4] :  $\mathcal{M}$  induit une norme si tout cône d'influence de  $B_{\mathcal{M}}$  possède une décomposition dans  $\mathcal{M}$  en sous-cônes unimodulaires\*. Par exemple, le masque présenté sur la figure 6.6 induit bien une norme : il possède 4 cônes d'influence  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{a}, \vec{b})$  et  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{c}, -\vec{a})$  (plus leurs symétriques par rapport à  $O$ ), qui sont tous unimodulaires. De même, tout masque de Montanari induit une norme :

- le poids de chaque vecteur  $\vec{v}$  du masque  $M_n$  est la norme euclidienne de  $\vec{v}$  donc les  $\frac{\vec{v}_i}{w_i}$  sont les sommets de  $B_{M_n}$  ;
- les déplacements du générateur de  $M_n$  sont les vecteurs visibles de la suite de Farey  $F_n$ , et tout couple de vecteurs consécutifs de  $F_n$  est une base unimodulaire de  $\mathbb{Z}^2$  (cf §2.1.2).

La figure 6.7 illustre la jauge de plusieurs normes de chanfrein couramment utilisées.

### 6.3.2 Condition nécessaire de norme

Dans cette section, nous montrons que la condition de Rémy et Thiel est *nécessaire* pour obtenir une norme, fournissant ainsi une caractérisation des normes de chanfrein.

\*un sous-cône est unimodulaire si le déterminant de sa base vaut  $\pm 1$ , voir §2.3.

23	21	19	17	15	13	11	9	7
18	16	14	12	10	8	6	4	2
13	11	9	7	5	3	1	3	5
8	6	4	2	$O$	2	4	6	8
5	3	1	3	5	7	9	11	13
2	4	6	8	10	12	14	16	18
7	9	11	13	15	17	19	21	23

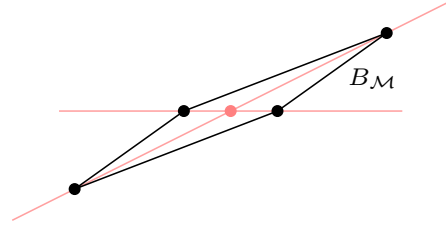


FIG. 6.6 – Le masque  $\mathcal{M} = \langle (1, 0; 2), (-1, 0; 2), (2, 1; 1), (-2, -1; 1) \rangle$  induit une norme car ses 4 cônes d’influence sont unimodulaires.

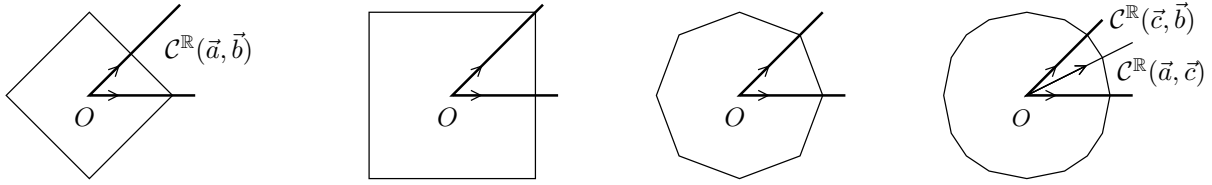


FIG. 6.7 – Jauges et cônes d’influence pour (de gauche à droite)  $d_4$ ,  $d_8$ ,  $d_{\langle 3,4 \rangle}$ ,  $d_{\langle 5,7,11 \rangle}$ .

Supposons qu’il existe un cône d’influence  $C = O + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  de  $B_{\mathcal{M}}$  qui ne possède pas de décomposition en sous-cônes unimodulaires. Il existe alors un point  $q \neq O$  entier dans le cône  $C$ , tel que pour tout sous-cône  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  de  $C$ ,  $q$  n’appartient pas au cône discret  $O + \mathcal{C}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ . Notre preuve s’effectue en deux étapes :

- (i) nous établissons que  $d_{\mathcal{M}}(O, q) > d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$  ;
- (ii) nous montrons que pour tout sous-cône d’influence  $O + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  qui possède  $q$ , il existe un multiple du point  $q$ , noté  $q' = O + \lambda \vec{Oq}$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{N}$ , tel que  $q'$  appartient au cône discret  $O + \mathcal{C}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ , voir la figure 6.8.

On pourra ensuite déduire les éléments suivants : d’après (ii),  $\vec{Oq'}$  est atteint par une combinaison linéaire positive des  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ , et donc  $d_{\mathcal{M}}(O, q') = d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q')$ . De plus la distance  $d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}$  est homogène donc  $d_{\mathcal{M}}(O, q') = d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q') = \lambda \cdot d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$ . La propriété (i) nous permet de déduire  $\lambda \cdot d_{\mathcal{M}}(O, q) > d_{\mathcal{M}}(O, q')$ , ce qui viole l’homogénéité de  $d_{\mathcal{M}}$  sur la droite  $(Oq)$ .

**Preuve de (i).** Le point  $q$  est dans le cône d’influence  $C = O + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  donc il existe des réels positifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  non tous nuls tels que  $\vec{Oq} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$ . En notant  $w_1, \dots, w_k$  les poids respectifs de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ , on a  $d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k$ , et on peut donc écrire

$$\frac{\vec{Oq}}{d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)} = \frac{\alpha_1 w_1 \left(\frac{\vec{v}_1}{w_1}\right) + \dots + \alpha_k w_k \left(\frac{\vec{v}_k}{w_k}\right)}{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k},$$

ce qui implique que le vecteur  $\vec{Oq}/d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$  est un barycentre à coefficients positifs des vecteurs  $\vec{v}_1/w_1, \dots, \vec{v}_k/w_k$  ; par conséquent  $O + \vec{Oq}/d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$  appartient à la facette de  $B_{\mathcal{M}}$  intersectée par  $C$ , notée  $F$ . Un exemple est présenté sur la figure 6.9.

D’autre part, puisque  $q$  n’appartient à aucun sous-cône discret de  $C$ , il n’existe aucun  $\mathcal{M}$ -chemin minimal de  $O$  à  $q$  qui utilise uniquement les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ . Un  $\mathcal{M}$ -chemin

minimal de  $O$  à  $q$  est de la forme

$$\vec{Oq} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k + \lambda'_1 \vec{z}_1 + \cdots + \lambda'_\ell \vec{z}_\ell,$$

où les  $\vec{z}_i$  sont dans  $\mathcal{M} \setminus C$ , les  $\lambda_i$  et  $\lambda'_i$  sont des entiers positifs, et au moins un des  $\lambda'_i$  est non nul. En notant  $w'_1, \dots, w'_\ell$  les poids respectifs de  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_\ell$ , on peut écrire

$$\frac{\vec{Oq}}{d_{\mathcal{M}}(O, q)} = \frac{\lambda_1 w_1 \left(\frac{\vec{v}_1}{w_1}\right) + \cdots + \lambda_k w_k \left(\frac{\vec{v}_k}{w_k}\right) + \lambda'_1 w'_1 \left(\frac{\vec{z}_1}{w'_1}\right) + \cdots + \lambda'_\ell w'_\ell \left(\frac{\vec{z}_\ell}{w'_\ell}\right)}{\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k + \lambda'_1 w'_1 + \cdots + \lambda'_\ell w'_\ell},$$

ce qui implique que le vecteur  $\vec{Oq}/d_{\mathcal{M}}(O, q)$  est un barycentre à coefficients positifs des vecteurs  $\vec{v}_1/w_1, \dots, \vec{v}_k/w_k, \vec{z}_1/w'_1, \dots, \vec{z}_\ell/w'_\ell$ . Or, les  $O + \vec{z}_i/w'_i$  sont dans  $B_{\mathcal{M}}$  mais pas dans  $F$ , de plus il existe au moins un coefficient  $\lambda'_i$  non nul, et enfin  $F$  est une facette du convexe  $B_{\mathcal{M}}$ ; par conséquent  $O + \vec{Oq}/d_{\mathcal{M}}(O, q)$  appartient à  $B_{\mathcal{M}} \setminus F$ . On en déduit que  $O + \vec{Oq}/d_{\mathcal{M}}(O, q)$  est strictement plus proche de  $O$  que  $O + \vec{Oq}/d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$ , et donc  $d_{\mathcal{M}}(O, q) > d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$ .  $\square$

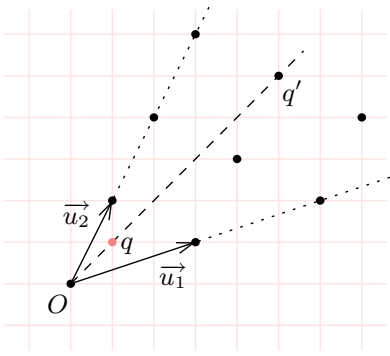


FIG. 6.8 – Les points noirs sont les points du cône discret  $\mathcal{C}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ . Tout point entier  $q$  de  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  possède un multiple  $q'$  dans  $\mathcal{C}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ .

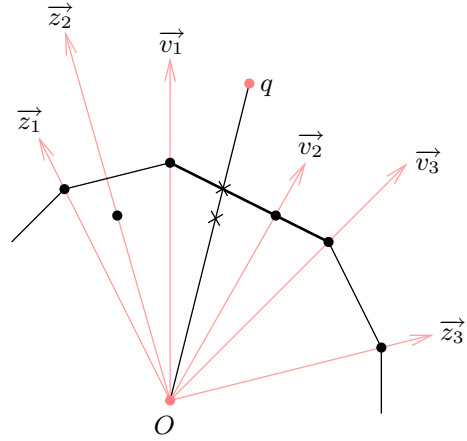


FIG. 6.9 –  $F$  (en trait fort) est la facette de  $B_{\mathcal{M}}$  intersectée par le cône d'influence  $C$  qui possède  $q$ . Les points noirs représentent les  $\vec{v}_i/w_i$  et les  $\vec{z}_i/w'_i$ . Le point  $q/d_{\mathcal{M}}^{\mathbb{R}}(O, q)$  (croix du dessus) appartient à  $B_{\mathcal{M}}$ , tandis que  $q/d_{\mathcal{M}}(O, q)$  (croix du dessous) est dans  $B_{\mathcal{M}} \setminus F$ .

**Preuve de (ii).** On note  $M$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ . Le point  $q$  est dans le sous-cône  $O + \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  donc on peut écrire

$$M \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

où les  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont tous dans  $\mathbb{R}_+$  (cette écriture est unique,  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ ). Or  $M$  est une matrice d'entiers non nulle et les  $q_1, \dots, q_n$  sont tous entiers ( $q$  est un point entier), donc les  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont tous dans  $\mathbb{Q}$ , de plus ils sont positifs. Soit  $\lambda$  le plus petit commun multiple des dénominateurs des  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . On a  $\forall i, \lambda \alpha_i \in \mathbb{N}$ , et par conséquent  $\vec{Oq}' = \lambda \vec{Oq} \in \mathcal{C}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ .  $\square$

Nous obtenons ainsi une caractérisation des normes de chanfrein :

**Théorème 6.1** *Un masque de chanfrein  $\mathcal{M}$  induit une norme si et seulement si tout cône d'influence de sa boule rationnelle  $B_{\mathcal{M}}$  possède une décomposition en sous-cônes unimodulaires.*

Appliquons cette condition sur le masque  $\mathcal{M} = \langle 8, 11, e 28 \rangle$  présenté sur la figure 6.3 :

- tous les  $\frac{\vec{v}_i}{w_i}$  sont des sommets de  $B_{\mathcal{M}}$  ;
- la base  $(\vec{e}, \vec{b})$  est unimodulaire, mais pas la base  $(\vec{a}, \vec{e})$ .

On en déduit que  $d_{\mathcal{M}}$  n'est pas homogène. La violation de l'homogénéité s'effectue dans le cône  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{a}, \vec{e})$  : le point  $q(2, 1)$  est à distance 19 de  $O$  (chemin minimal  $\vec{a} + \vec{b}$ ) tandis que  $q'(4, 2)$  est à distance 36 de  $O$  (chemin minimal  $2\vec{a} + \vec{e}$ ).

La condition de norme énoncée par Normand et Évenou dans [NÉ09] est légèrement différente : ils cherchent tout d'abord une décomposition unimodulaire *quelconque* de la boule rationnelle, c'est-à-dire qui n'utilise pas nécessairement uniquement des vecteurs du masque. Ils montrent que  $\mathcal{M}$  induit une norme si et seulement si pour chaque vecteur  $\vec{u}$  intervenant dans cette décomposition, on a  $d_{\mathcal{M}}(O, O + \vec{u}) = \vec{F}_{\vec{u}} \cdot \vec{u}$ , où  $\vec{F}_{\vec{u}}$  est le vecteur gradient associé à la facette de  $B_{\mathcal{M}}$  intersectée par  $\vec{u}$ .

## 6.4 Intervalle pour une distance de chanfrein homogène

Nous avons vu qu'un des atouts des normes de chanfrein est que l'on connaît les formules de distances directes dans chaque cône d'influence. Une autre caractéristique de ces normes est que les intervalles de distance sont faciles à déterminer. On fixe  $\mathcal{M}$  un masque qui induit une norme ; et pour tous points  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{Z}^n$ , on note  $C_x^y$  le cône d'influence de  $d_{\mathcal{M}}$  centré en  $x$  et qui contient  $y$ . Soient  $p$  et  $q$  deux points de  $\mathbb{Z}^n$  ; étant donné que tout chemin minimal de  $p$  à  $q$  est une combinaison linéaire positive des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  de  $\mathcal{M}$  qui engendrent  $C_p^q$ , l'intervalle  $I(p, q)$  est inclus dans  $C_p^q$ . Symétriquement, tout chemin minimal de  $q$  à  $p$  est une combinaison linéaire positive des vecteurs  $-\vec{v}_1, \dots, -\vec{v}_k$  (car  $\mathcal{M}$  est central-symétrique). On en déduit que l'intervalle  $I(p, q)$  est inclus dans  $C_p^q \cap C_q^p$ . De plus le cône  $C_p^q = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  possède une décomposition en sous-cônes unimodulaires, donc tout point entier  $z \in C_p^q \cap C_q^p$  appartient à un chemin minimal qui lie  $p$  à  $q$ . On en conclut que l'intervalle de distance  $I(p, q)$  est exactement  $\mathbb{Z}^n \cap C_p^q \cap C_q^p$ . Un intervalle  $I(p, q)$  est illustré sur la figure 6.10.

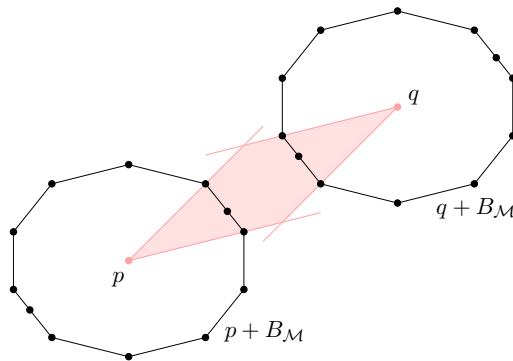


FIG. 6.10 – Pour une distance de chanfrein homogène, l'intervalle de distance  $I(p, q)$  est l'ensemble des points entiers de  $C_p^q \cap C_q^p$  (zone grisée).

## 6.5 Masques minimaux

Soit  $\mathcal{M}$  un masque de chanfrein et  $(\vec{v}, w)$  une pondération de  $\mathcal{M}$ . On dit que la pondération  $(\vec{v}, w)$  est *active* dans  $\mathcal{M}$  si et seulement si  $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus \{(\vec{v}, w)\}$  n'induit pas la distance  $d_{\mathcal{M}}$ . Sans perte de généralité, on peut restreindre notre étude aux masques dont toutes les pondérations sont actives : par définition, un masque de chanfrein est *minimal* si et seulement si toutes ses pondérations sont actives. Par exemple, considérons le masque défini sur la figure 6.5. La pondération  $(-1, 2; 14)$  n'est pas active car il existe un chemin minimal de  $O$  à  $(-1, 2)$  dont le coût est  $6+7=13$ . Par contre, la pondération  $(1, 0; 6)$  est active, même si le point  $(1/6, 0)$  est strictement à l'intérieur de  $B_{\mathcal{M}}$ . Toutes les autres pondérations du masque sont actives.

De manière générale, la pondération  $(\vec{v}, w)$  est active dans  $\mathcal{M}$  si et seulement si il n'existe pas de  $\mathcal{M}'$ -chemin de  $O$  à  $O + \vec{v}$  dont le coût est inférieur à  $w$ . Dans les chapitres suivants, on considérera uniquement les masques de chanfrein minimaux.

Remarquons que si  $\mathcal{M}$  est minimal et induit une norme, alors  $\mathcal{M}$  contient uniquement des déplacements *visibles*. En effet, supposons que  $\mathcal{M}$  possède deux pondérations  $(\vec{v}, w)$  et  $(\lambda\vec{v}, w')$ , avec  $\lambda$  entier supérieur à 2. La pondération  $(\vec{v}, w)$  est active, donc par minimalité de  $\mathcal{M}$  on doit avoir  $w' < \lambda w$ , ce qui viole l'homogénéité entre  $d_{\mathcal{M}}(O, O + \vec{v})$  et  $d_{\mathcal{M}}(O, O + \lambda\vec{v})$ .

## 6.6 Entiers représentables et problème de Frobenius

Soit  $\mathcal{M}$  un masque de chanfrein dont les poids des pondérations sont  $w_1, \dots, w_m$ . Par définition de  $d_{\mathcal{M}}$ , toute valeur de distance atteinte par  $d_{\mathcal{M}}$  est une combinaison linéaire positive des  $w_1, \dots, w_m$  :

$$\text{Im}(d_{\mathcal{M}}) \subseteq w_1\mathbb{N} + \dots + w_m\mathbb{N}. \quad (6.5)$$

Étant donnés  $m$  entiers positifs  $a_1, \dots, a_m$ , on dit qu'un entier  $x$  est  $(a_1, \dots, a_m)$ -représentable si  $x \in a_1\mathbb{N} + \dots + a_m\mathbb{N}$ . Toute valeur de distance pour  $d_{\mathcal{M}}$  est  $(w_1, \dots, w_m)$ -représentable, mais la réciproque est en générale fausse.

Si on suppose que  $\mathcal{M}$  induit une norme, il est simple de déterminer l'ensemble  $\text{Im}(d_{\mathcal{M}})$  : dans chaque sous-cône d'influence  $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ , l'ensemble de toutes les valeurs de distance à  $O$  est  $w'_1\mathbb{N} + \dots + w'_n\mathbb{N}$ , où  $w'_1, \dots, w'_n$  sont les poids des  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ . Par exemple pour le masque  $\langle 8, 11, 18 \rangle$  illustré sur la figure 6.11, les valeurs prises par  $d_{\mathcal{M}}$  sont  $8\mathbb{N} + 18\mathbb{N}$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $11\mathbb{N} + 18\mathbb{N}$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{b}, \vec{c})$ . Sur cet exemple on a ainsi  $\text{Im}(d_{\mathcal{M}}) = \{8\mathbb{N} + 18\mathbb{N}\} \cup \{11\mathbb{N} + 18\mathbb{N}\}$ . Pour un masque  $\mathcal{M} = \langle a, b \rangle$  induisant une norme, on a un seul cône d'influence  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{b})$  dans le générateur, et donc  $\text{Im}(d_{\mathcal{M}}) = a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$ .

Lorsque nous étudions les inclusions de boules de chanfrein, nous avons besoin de connaître les valeurs de distances atteintes dans les différents cônes d'influence des boules, en particulier la plus grande valeur atteinte. Étant donnés  $m + 1$  entiers positifs  $x, a_1, \dots, a_m$ , on note  $[x]_{a_1, \dots, a_m}$  le plus grand entier  $(a_1, \dots, a_m)$ -représentable inférieur ou égal à  $x$  :

$$[x]_{a_1, \dots, a_m} = \max\{y \in a_1\mathbb{N} + \dots + a_m\mathbb{N} : y \leq x\}. \quad (6.6)$$

Notons qu'un entier  $x$  est  $(a_1, \dots, a_m)$ -représentable si et seulement si  $[x]_{a_1, \dots, a_m} = x$ . Par exemple pour le masque  $\langle 8, 11, 18 \rangle$  (figure 6.11), les plus grandes valeurs de distance dans la boule de rayon 50 sont  $[50]_{8, 18} = 50$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $[50]_{11, 18} = 47$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{b}, \vec{c})$ . Pour un  $k$  donné, l'ensemble  $\{[x]_{a_1, \dots, a_m}\}_{0 \leq x \leq k}$  peut être calculé en temps  $\mathcal{O}(k.m)$ . L'algorithme `entiers_rep` calcule cet ensemble dans le cas  $m = 2$  ; il est facilement généralisable à un  $m > 2$  quelconque. Cet algorithme réalise un parcours linéaire d'un tableau de taille  $k$ , en utilisant la

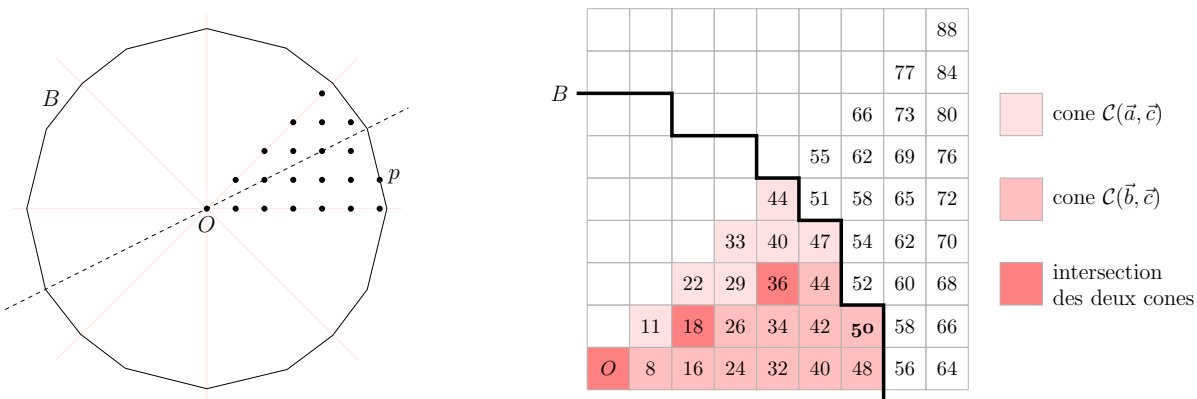


FIG. 6.11 – Une boule  $B$  de rayon  $Op = 50$  pour le masque  $\langle 8, 11, 18 \rangle$  (qui induit une norme). Le générateur de  $B$  est dessiné à gauche par des points, à droite par des cases grisées. 50 est  $(8, 18)$ -représentable :  $50 = 4 \times 8 + 18$ . La ligne pointillée représente l'axe  $O + \mathbb{R}\vec{c}$ , qui sépare le générateur en deux cônes d'influence.

propriété que si un entier  $x$  est  $(a, b)$ -représentable, alors  $x + a$  et  $x + b$  sont également  $(a, b)$ -représentables.

---

**Algorithme 6.2 : entiers\_rep**

---

**Entrées :** deux entiers positifs  $a$  et  $b$  (avec  $a \leq b$ ), un entier positif  $k$ .

**Sortie :** un tableau  $t$  tel que  $t[x] = [x]_{a,b}$  pour tout  $0 \leq x \leq k$ .

allouer un tableau  $t$  de  $k + b + 1$  entiers initialisés à 0 ;

**pour**  $x \leftarrow 0$  **à**  $k$  **faire**

si $t[x] = x$ <b>alors</b>	/* $x$ est $(a, b)$ -représentable */
$t[x + a] \leftarrow x + a$ ;	
$t[x + b] \leftarrow x + b$ ;	
$rep \leftarrow x$ ;	/* MAJ du plus grand entier représentable connu */
<b>sinon</b>	
$t[x] \leftarrow rep$ ;	

**retourner**  $t$  ;

---

Une question naturelle est de demander si dans un cône d'influence  $C$  donné, il existe un entier  $\Omega(C)$  à partir duquel tous les entiers sont représentables. Ce problème arithmétique est connu sous le nom de *problème de Frobenius*, ou *coin exchange problem* (problème de la monnaie) :

**Définition 6.1 (Problème de Frobenius)** *Étant donné  $m$  entiers positifs  $a_1, \dots, a_m$ , quel est le plus grand entier non  $(a_1, \dots, a_m)$ -représentable ?*

Nous énonçons quelques résultats liés au problème de Frobenius ; pour une étude complète de ce problème, se référer à [Alf05]. Le problème de Frobenius a une solution si et seulement si les  $a_1, \dots, a_m$  sont premiers entre eux. La solution est appelée *nombre de Frobenius*, et elle est notée  $g(a_1, \dots, a_m)$ . Dans le cas  $m = 2$ , si  $\text{pgcd}(a, b) = 1$  alors on a la formule  $g(a, b) = ab - a - b$  (Sylvester, 1884). En revanche, dans le cas général où  $m$  est un entier fixé supérieur à 3, il n'existe pas de formule close pour  $g(a_1, \dots, a_m)$  ; il existe toutefois des algorithmes très rapides



pour le calculer.

Reprenons l'exemple du masque  $\langle 8, 11, 18 \rangle$  de la figure 6.11. Les entiers 11 et 18 sont premiers entre eux donc dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{b}, \vec{c})$ , tout entier strictement supérieur à  $g(11, 18) = 11 \times 18 - 11 - 18 = 169$  est représentable. En revanche, on a  $\text{pgcd}(8, 18) = 2$ , donc le problème de Frobenius n'a pas de solution dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  : seuls les entiers pairs sont représentables. Afin de décrire les propriétés des entiers représentables dans ce type de cône, nous généralisons la notion de nombre de Frobenius à un ensemble quelconque d'entiers positifs :

**Définition 6.2 (Nombre de Frobenius généralisé)** Soient  $a_1, \dots, a_m$  des entiers positifs, dont on note  $p$  le PGCD. On appelle nombre de Frobenius généralisé de  $a_1, \dots, a_m$ , noté  $g'(a_1, \dots, a_m)$ , le plus grand multiple de  $p$  qui n'est pas  $(a_1, \dots, a_m)$ -représentable.

Puisque  $\frac{a_1}{p}, \dots, \frac{a_m}{p}$  sont premiers entre eux, le nombre de Frobenius généralisé est toujours défini, et on a

$$g'(a_1, \dots, a_m) = p \cdot g\left(\frac{a_1}{p}, \dots, \frac{a_m}{p}\right). \quad (6.7)$$

Dans le cas où  $m = 2$ , en notant  $p = \text{pgcd}(a, b)$ , on déduit de la formule de Sylvester que

$$g'(a, b) = p \cdot g\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}\right) = \frac{ab}{p} - a - b. \quad (6.8)$$

Par exemple, pour  $a = 9$  et  $b = 15$ , on a  $\text{pgcd}(a, b) = 3$  et  $g'(a, b) = 3 \times g(3, 5) = 21$ . Tous les entiers strictement supérieurs à  $g(3, 5) = 7$  sont  $(3, 5)$ -représentables, et tous les entiers multiples de 3 strictement supérieurs à  $g'(9, 15) = 21$  sont  $(9, 15)$ -représentables :

$$\begin{aligned} \left\{ [x]_{9,15} \right\}_{x \in \mathbb{N}} &= 9\mathbb{N} + 15\mathbb{N} = \{0, 9, 15, 18, 24, 27, 30, 33, \dots\} \\ &= 3 \times (3\mathbb{N} + 5\mathbb{N}) = 3 \times \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, \dots\}. \end{aligned}$$

Revenons sur l'exemple du masque  $\langle 8, 11, 18 \rangle$  : dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$ , tout nombre pair strictement supérieur à  $g'(8, 18) = 46$  est  $(8, 18)$ -représentable.

## 6.7 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre la définition des distances de chanfrein ainsi que le principe de l'algorithme de DT de Rosenfeld et Pfaltz. Les distances de chanfrein sont très variées ; nous avons choisi de nous concentrer sur les masque de chanfrein qui induisent une norme, car ces masques ont une propriété importante pour l'étude des voisinages de test : elles impliquent l'existence de formules directes de distance dans chaque cône d'influence.

Nous avons donc commencé par caractériser les masques qui induisent une norme, en fournissant la réciproque du théorème de Rémy et Thiel : un masque induit une norme si et seulement si chaque cône d'influence de sa boule rationnelle possède une décomposition en sous-cônes unimodulaires. Puis, nous avons relevé d'autres propriétés de ces masques : nous avons caractérisé les intervalles de distance et établi un lien entre les valeurs prises par la distance, la notion d'entier représentable et le problème de Frobenius.

Ces propriétés seront utilisées dans les chapitres 7 et 8 pour l'étude des voisinages de test des normes de chanfrein.



# Chapitre 7

## Propriétés de $\mathcal{T}(R)$ pour les normes de chanfrein

Dans ce chapitre, nous entamons l'étude des voisinages de tests pour les normes de chanfrein. Nous présentons au §7.1 des propriétés générales concernant les inclusions de boules de normes, en tenant compte d'une part des G-symétries, d'autre part des valeurs de distance atteintes dans les cônes d'influence. Nous en déduisons au §7.2 un premier résultat sur les voisinages de test des normes induites des petits masques  $3 \times \dots \times 3$  en dimension  $n$  : les déplacements de  $\mathcal{M}$  forment un voisinage minimum.

### 7.1 Couvrir une boule de chanfrein

#### 7.1.1 G-symétries

Dans ce paragraphe, nous adaptons les résultats établis pour la distance euclidienne au §4.1 au cas plus général des normes G-symétriques.

**Lemme 7.1** *Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{Z}^n$ , et  $\|\cdot\|$  une norme G-symétrique. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas G-adjacents alors  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .*

**Preuve.** Nous écrivons la preuve dans le cas  $n = 2$ . Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs d'un même G-cône  $C$ . Nous devons montrer que pour tout  $\sigma \in \Sigma^2$ , on a  $\|\vec{u} + \sigma(\vec{v})\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ . Soient  $x = O + \vec{u}$ ,  $p = x + \vec{v}$ , et  $p_1, \dots, p_7$  les images de  $p$  par les symétries  $\sigma_i \in \Sigma^2 \setminus \{\text{Id}\}$ , voir la figure 7.1. En d'autres termes,  $\{p, p_1, \dots, p_7\} = \{O + \sigma(\vec{u} + \vec{v}), \sigma \in \Sigma^2\}$ . Enfin, on note  $E$  l'enveloppe convexe des points  $p, p_1, \dots, p_7$ . Remarquons maintenant que pour tout  $\sigma \in \Sigma^2$ , le point  $z = x + \sigma(\vec{v})$  appartient à  $E$ . Deux tels points  $z$  appartiennent à la frontière de  $E$  : les points  $q$  et  $q'$  pour lesquels  $\vec{xq} = \sigma_1(\vec{xp})$  et  $\vec{xq'} = \sigma_2(\vec{xp})$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant les G-symétries dont les axes « encadrent »  $C$ . D'après les symétries,  $q$  appartient au segment  $[pp_7]$  donc  $\vec{Oq} = \lambda\vec{Op} + (1 - \lambda)\vec{Op_7}$  pour un certain  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Par convexité de la norme, on déduit que  $\|\vec{Oq}\| \leq \lambda\|\vec{Op}\| + (1 - \lambda)\|\vec{Op_7}\|$ . De plus, par définition de  $p_7$ , on a  $Op = Op_7$ , par conséquent  $\|\vec{Oq}\| \leq \|\vec{Op}\|$ . On peut appliquer la même argumentation concernant le point  $q' \in [pp_1]$ .  $\square$

Notons que la G-symétrie n'est pas ici une condition suffisante (l'homogénéité est nécessaire) : le lemme 7.1 n'est pas vérifié pour toute distance G-symétrique, comme illustré sur la figure 7.2.

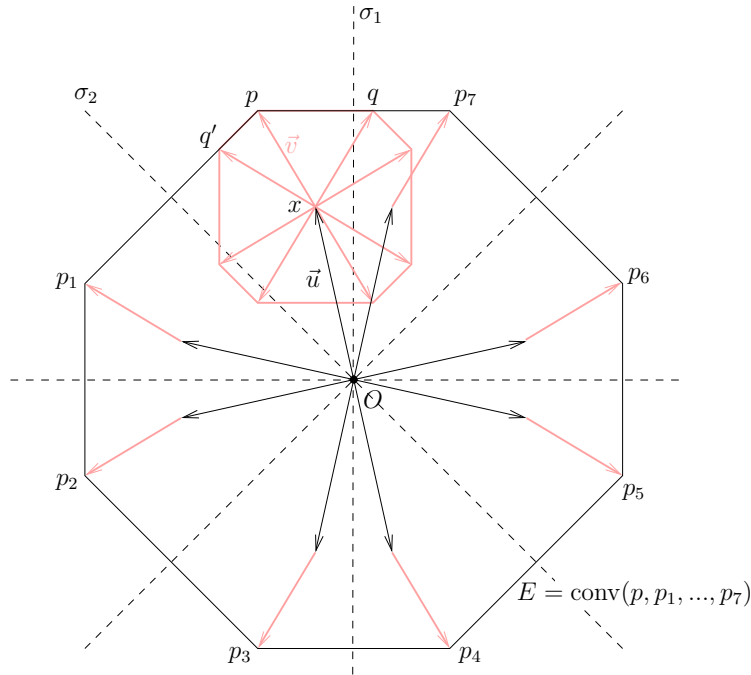


FIG. 7.1 – Les 8 G-cônes de  $\mathbb{Z}^2$  (délimités par les lignes pointillées) ; deux vecteurs G-adjacents  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Les images de  $\vec{u}$  par les  $\sigma_i \in \Sigma^2$  sont les vecteurs noirs, les images de  $\vec{v}$  par les  $\sigma_i \in \Sigma^2$  sont les vecteurs grisés. Les points  $\{x + \sigma_i(\vec{v})\}$  appartiennent à l’enveloppe convexe des  $O + \sigma(\vec{u} + \vec{v})$ .

Comparé avec le cas particulier de la distance euclidienne où on a une inégalité stricte dans le lemme 4.1, nous obtenons, dans le cas général des normes G-symétriques, une version « relâchée » du lemme 4.3, dans le sens où il est possible de voir des points  $q$  de  $B$  qui maximisent la distance à  $O - \vec{v}$  tels que  $\vec{O}q$  et  $\vec{v}$  ne sont pas G-adjacents, comme l’illustre la figure 3.4 pour l’exemple de  $d_4$  et  $d_8$ . Géométriquement parlant, ceci est possible lorsqu’une facette de  $B_{\mathcal{M}}$  est orthogonale à un des axes de G-symétrie. Toutefois, dans le cas général des normes G-symétriques, il est encore suffisant de considérer un seul G-cône de  $B$  lorsqu’on calcule le rayon de couverture de  $B$  dans une direction donnée :

**Lemme 7.2 (Couverture du générateur)** Soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $G(\mathbb{Z}^n)$ ,  $\|\cdot\|$  une norme G-symétrique, et  $B$  une boule de centre  $O$ . Il existe au moins un point  $p$  de  $G(B)$  tel que  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B) = \|\vec{v} + \vec{O}p\|$ .

**Preuve.** Soit  $x$  un point de  $B$  qui maximise la distance à  $O - \vec{v}$ , et soit  $\vec{u} = \vec{O}x$  : on a  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B) = \|\vec{v} + \vec{u}\|$ . La boule  $B$  est G-symétrique donc le point  $p = O + \vec{u}$  appartient à  $B$ . De plus,  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  sont G-adjacents (dans le générateur de  $\mathbb{Z}^n$ ), donc le lemme 7.1 nous donne  $\|\vec{v} + \vec{u}\| \geq \|\vec{v} + \vec{u}\|$ . Par conséquent,  $p$  est un point de  $G(B)$  qui maximise la distance à  $O - \vec{v}$ .  $\square$

Comme pour le lemme 7.1, la G-symétrie n’est pas suffisante, et l’hypothèse d’homogénéité est nécessaire : le lemme 7.2 s’applique à toute boule de la distance définie à la figure 7.2, mais pas à la distance induite par le masque de chanfrein  $\langle (\vec{a}, 2), (2\vec{a}, 3) \rangle$ , illustré sur la figure 7.3.

En conséquence du lemme 7.2, le corollaire 4.4 est vérifié pour toute norme G-symétrique :

2	3	3	4	4
2	3	3	4	4
1	2	2	3	3
1	2	2	3	3
O	1	1	2	2

FIG. 7.2 – Les valeurs indiquent la distance à  $O$  pour le masque de chanfrein  $G$ -symétrique  $\langle (\vec{a}, 1), (2\vec{a}, 1) \rangle$ . Les vecteurs  $\vec{u}(1, 0)$  et  $\vec{v}(0, 1)$  ne sont pas  $G$ -adjacents mais  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 2 > \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 1$ . De même pour les vecteurs  $\vec{u}(3, 2)$  et  $\vec{v}(0, 1)$ .

	6	8	9	11	12
	5	7	8	10	11
	3	5	6	8	9
	2	4	5	7	8
$p$	O	2	3	5	6

FIG. 7.3 – Considérons la distance induite par le masque de chanfrein  $G$ -symétrique  $\langle (\vec{a}, 2), (2\vec{a}, 3) \rangle$ . Dans la boule de centre  $O$  et rayon 2, seul le point  $(0, 1)$  maximise la distance à  $p(-1, 0)$ .

**Corollaire 7.3** Soient  $\vec{v}$  un vecteur de  $G(\mathbb{Z}^n)$ , et  $B, B'$  deux boules d'une norme  $G$ -symétrique, de centres respectifs  $O$  et  $O - \vec{v}$ . Si  $G(B) \subseteq B'$  alors  $B \subseteq B'$ .

### 7.1.2 Rayons représentables

Les inclusions de boules de normes de chanfrein présentent d'autre part des propriétés liées à la notion d'entier représentable (cf §6.6) :

**Lemme 7.4 (Rayon représenté)** Soit  $\mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  un cône d'influence d'une norme de chanfrein, les poids des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  étant respectivement  $w_1, \dots, w_k$ . Si  $r$  est un entier  $(w_1, \dots, w_k)$ -représentable alors pour tout vecteur  $\vec{v}$  du cône  $\mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ , on a  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_r) = r + \|\vec{v}\|$ .

**Preuve.** On note  $p = O - \vec{v}$ . L'entier  $r$  est  $(w_1, \dots, w_k)$ -représentable donc il existe un point  $q$  appartenant au cône  $O + \mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  et tel que  $Oq = r$ , voir la figure 7.4 à gauche. De plus,  $O$  appartient au cône  $p + \mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ ; par conséquent  $O$  appartient à l'intervalle  $I(p, q)$  (voir §6.4), et donc  $pq = pO + Oq = \|\vec{v}\| + r$ . Puisque  $q \in H_p(B_r)$ , on doit avoir  $\mathcal{R}_p(B_r) \geq pq$ . Or on sait par le lemme 3.1 que  $\mathcal{R}_p(B_r) \leq \|\vec{v}\| + r$ . On en conclut l'égalité  $\mathcal{R}_p(B_r) = r + \|\vec{v}\|$ .  $\square$

On déduit de ce lemme que dans le cas des normes qui n'ont qu'un seul cône d'influence dans le générateur, l'égalité  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B_r) = r + \|\vec{v}\|$  est vérifiée pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{Z}^n$  et pour tout  $r$  représentable. C'est le cas des normes  $\ell_1$  et  $\ell_\infty$ , ainsi que des normes engendrées par des masques  $\langle a, b \rangle$ .

**Lemme 7.5 (Couverture de cône)** Soient  $\mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  un cône d'influence d'une norme de chanfrein, et  $B$  une boule de centre  $O$ . Pour tout vecteur  $\vec{v}$  du cône  $\mathcal{C}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ , on a :

$$B \cap \mathcal{C}(O, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = H_{O-\vec{v}}(B) \cap \mathcal{C}(O, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k).$$

En d'autres termes,  $B$  et  $H_{O-\vec{v}}(B)$  coïncident dans tout cône d'influence qui possède  $\vec{v}$ .

**Preuve.** Les arguments de la preuve sont similaires à ceux utilisés dans le lemme précédent. On note  $r = \text{rad}(B)$  et  $p = O - \vec{v}$ . Par définition on a  $B \subseteq H_p(B)$ . Considérons

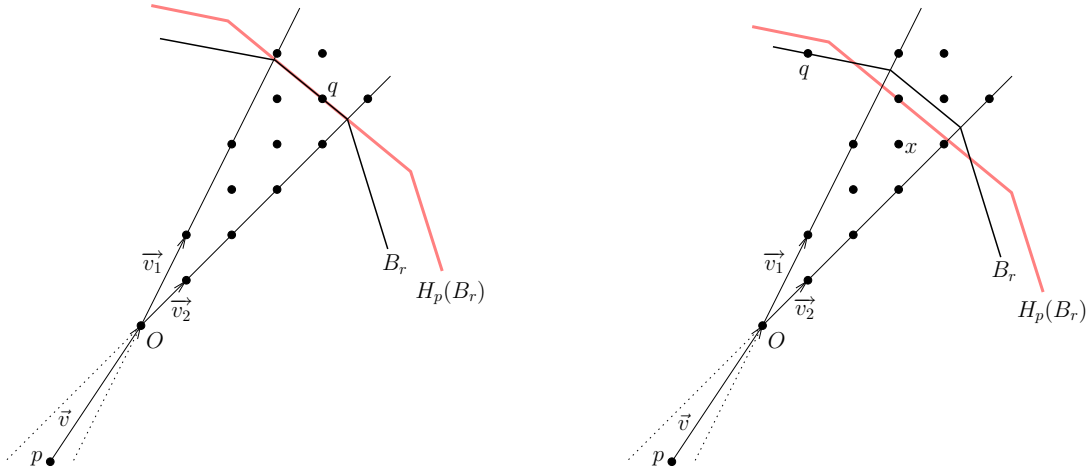


FIG. 7.4 – Couverture d’une boule  $B_r$  de rayon représentable  $r = d(O, q)$  en direction  $\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est un vecteur du cône d’influence  $\mathcal{C}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ . À gauche :  $r$  est  $(w_1, w_2)$ -représentable donc il existe un chemin minimal de  $p$  à  $q$  qui passe par  $O$ , et donc  $\mathcal{R}_p(B_r) = r + \|\vec{v}\|$ . À droite :  $r$  n’est pas  $(w_1, w_2)$ -représentable donc  $\mathcal{R}_p(B_r) < r + \|\vec{v}\|$ . Dans les deux cas,  $B_r$  et  $H_{O-\vec{v}}(B_r)$  coïncident dans le cône  $O + \mathcal{C}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ .

maintenant un point  $x \in H_p(B) \cap \mathcal{C}(O, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ ; nous voulons montrer que  $x \in B$  (voir la figure 7.4). Le point  $O$  appartient au cône  $\mathcal{C}(p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  et le point  $x$  appartient au cône  $\mathcal{C}(O, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ , donc  $O$  appartient à l’intervalle  $I(p, x)$ . Nous avons ainsi

$$px = pO + Ox = \|\vec{v}\| + Ox. \quad (7.1)$$

Le point  $x$  appartient à  $H_p(B)$ , donc  $px \leq \mathcal{R}_p(B)$ . On déduit de (7.1) que  $\|\vec{v}\| + Ox \leq \mathcal{R}_p(B)$ . D’autre part, le lemme 3.1 nous donne  $\mathcal{R}_p(B) \leq r + \|\vec{v}\|$ . En combinant ces deux dernières inéquations, on aboutit à  $Ox + \|\vec{v}\| \leq r + \|\vec{v}\|$ , c’est-à-dire  $Ox \leq r$ .  $\square$

## 7.2 Voisinage $\mathcal{T}$ pour masques $3^n$

Dans ce paragraphe nous abordons le voisinage minimum pour les normes de chanfrein les plus simples, celles qui n’ont qu’un seul cône d’influence dans le générateur  $G(\mathbb{Z}^n)$ . Il est facile de vérifier que ces normes sont les normes induites des masques  $3 \times 3 \times \dots \times 3$ , autrement dit des masques dont les déplacements sont inclus dans  $\mathcal{B}_{d_\infty}(O, 1)$ , généralisation du 8-voisinage en dimension  $n$ . En effet :

- les vecteurs du générateur du voisinage  $3^n$  sont situés sur les axes de G-symétrie :  $\{(1, 0, 0, \dots, 0), (1, 1, 0, \dots, 0), \dots, (1, 1, 1, \dots, 1)\}$  ;
- toute pondération active non incluse dans le voisinage  $3^n$  (et dont le déplacement n’est pas multiple\* d’un vecteur du voisinage  $3^n$ ) n’appartient pas à un axe de G-symétrie, et provoque donc l’apparition d’un nouveau cône d’influence dans  $G(\mathbb{Z}^n)$ .

Pour toutes ces normes, nous avons les relations de domination suivantes :

**Lemme 7.6** Soit  $\mathcal{M}$  un masque de chanfrein  $3^n$  induisant une norme. Pour tous  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $G(\mathbb{Z}_*^n)$ , on a  $\vec{u} \succ \vec{u} + \vec{v}$ .

\*un masque minimal de norme ne contient que des pondérations visibles, voir §6.5

**Preuve.** Soit  $r$  un entier représentable pour la norme  $3^n$  considérée. Puisqu'il n'y a qu'un seul cône d'influence dans  $G(\mathbb{Z}^n)$ , les conditions du lemme 7.4 sont vérifiées pour tout  $\vec{v} \in G(\mathbb{Z}^n)$ . On a donc toujours

$$\mathcal{R}_{O-\vec{u}}(B_r) = r + \|\vec{u}\| \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{O-\vec{u}-\vec{v}}(B_r) = r + \|\vec{u} + \vec{v}\|. \quad (7.2)$$

D'autre part,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  appartiennent à un même cône d'influence, ce qui implique que  $O + \vec{u}$  appartient à  $I(O, O + \vec{u} + \vec{v})$ , et donc  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ . En combinant cette dernière équation avec (7.2), on peut écrire  $\mathcal{R}_{O-\vec{u}-\vec{v}}(B_r) = \mathcal{R}_{O-\vec{u}}(B_r) + \|\vec{v}\|$ . Finalement, le lemme 3.1 implique  $H_{O-\vec{u}}(b) \subset H_{O-\vec{u}-\vec{v}}(B)$ .  $\square$

Nous illustrons cette propriété en dimension 2 sur la figure 7.5, où l'on voit les boules imbriquées  $B$ ,  $H_{O-\vec{u}}(B)$  et  $H_{O-\vec{u}-\vec{v}}(B)$ .

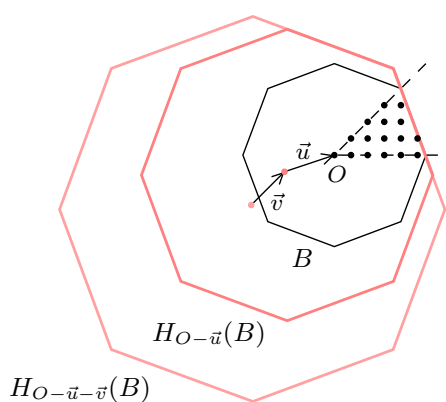


FIG. 7.5 – Pour tout masque  $\langle a, b \rangle$  de norme et pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in G(\mathbb{Z}^2)$ ,  $\vec{u}$  domine  $\vec{u} + \vec{v}$ .

Puisque tout vecteur de  $\mathbb{Z}^n$  peut s'écrire comme combinaison linéaire positive des vecteurs du voisinage  $3^n$ , cela implique le résultat suivant :

**Théorème 7.1** *Pour tout masque de chanfrein  $3^n$  induisant une norme et pour tout  $R \geq 0$ , le voisinage  $3^n$  est un  $R$ -voisinage.*

## 7.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre plusieurs propriétés des inclusions de boules de normes de chanfrein, qui nous ont permis d'établir un premier résultat sur la composition des voisinages de test pour les « petits » masques  $3 \times 3$ . Ces propriétés, associées à d'autres outils arithmétiques liés aux normes de chanfrein, vont nous permettre de poursuivre, au prochain chapitre, l'étude de  $\mathcal{T}(R)$  pour les masques de plus grande taille.





## Chapitre 8

# Étude de $\mathcal{T}(R)$ pour les normes de chanfrein $5 \times 5$

Nous nous intéressons dans ce chapitre au voisinage de test pour les masques  $5 \times 5$  minimaux et G-symétriques qui induisent une norme. Étant donné un masque de chanfrein  $\mathcal{M}$  et un entier positif  $R$ , on note  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(R)$  le  $R$ -voisinage minimum pour  $d_{\mathcal{M}}$ , et  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  la limite de  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(R)$  quand  $R \rightarrow +\infty$ . Nous commençons par quelques propriétés utiles de  $d_{\mathcal{M}}$  au §8.1 : nous donnons les conditions de norme et de minimalité d'un masque  $5 \times 5$ , ainsi que les déplacements élémentaires dans chaque cône d'influence. Nous montrons également que les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  ont pour rayons d'apparitions respectifs  $a$  et  $b$ . Nous établissons ensuite au §8.2 les relations de domination entre les vecteurs du générateur, desquelles on déduit que l'ensemble des déplacements du masque est un  $R$ -voisinage. Enfin, nous caractérisons l'apparition de  $\vec{c}$  dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  au §8.3. Nous concluons au §8.4 en donnant plusieurs observations et idées pour une approche des masques  $7 \times 7$ . Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [HT09a].

### 8.1 Propriétés élémentaires des masques $5 \times 5$

Appliquons à un masque  $\mathcal{M}$  donné, de taille  $5 \times 5$ , les conditions de norme et de minimalité présentées aux §6.3 et §6.5. Notons tout d'abord que puisque tout masque minimal qui induit une norme ne possède que des déplacements visibles,  $\mathcal{M}$  est un masque  $\langle a, b, c \rangle$ .

La pondération  $(\vec{c}, c)$  est active si et seulement si il n'existe pas de chemin minimal de  $O$  à  $O + \vec{c}$  formé des vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , autrement dit si et seulement si  $c < a + b$ . Le point  $\vec{c}/c$  doit donc être un sommet de  $B_{\mathcal{M}}$ . Ensuite, pour respecter les conditions de norme, les cônes  $\mathcal{C}((2, 1), (-2, 1))$  et  $\mathcal{C}((2, 1), (1, 2))$  doivent être décomposables en sous-cônes unimodulaires, autrement dit  $\vec{a}/a$  et  $\vec{b}/b$  doivent appartenir à la frontière\* de  $B_{\mathcal{M}}$ . Ces conditions se traduisent par  $c \leq 2a$  dans le cône  $\mathcal{C}((2, 1), (-2, 1))$ , et  $3b \leq 2c$  dans le cône  $\mathcal{C}((2, 1), (1, 2))$ .

Un masque minimal  $\mathcal{M} = \langle a, b, c \rangle$  induit donc une norme si et seulement si

$$c \leq 2a \quad ; \quad 3b \leq 2c \quad ; \quad c < a + b . \tag{8.1}$$

Concernant  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , nous nous intéressons tout d'abord à l'apparition des vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . Il est facile de vérifier que ces deux vecteurs ont pour rayons d'apparition respectifs  $a$  et  $b$ . Étant donné que pour tout masque minimal  $\langle a, b, c \rangle$  induisant une norme, nous avons les inégalités strictes  $a < b < c$ , la boule de rayon  $a$  n'a qu'une géométrie possible (figure 8.1, gauche). De

---

\*Il n'est pas nécessaire que  $\vec{a}/a$  et  $\vec{b}/b$  soient des sommets de  $B_{\mathcal{M}}$ .



FIG. 8.1 – Boules  $B_a$  (à gauche) et  $B_b$  (à droite). Les valeurs indiquent la distance au centre  $O$ .

même, nous avons les inégalités strictes  $b < c$  et  $b < 2a$ , et donc la boule de rayon  $b$  n'a qu'une géométrie possible (figure 8.1, droite).

Il est clair que  $\mathcal{T}(0) = \emptyset$ .  $B_a$  est la plus petite boule de centre  $O$  et de rayon non nul, donc aucune autre boule différente de  $B_a$  et de rayon non nul ne peut être incluse dans  $B_a$ . Le point  $p(1, 0)$  n'appartient pas à l'axe médian de  $B_a$ , par conséquent  $\vec{a}$  a pour rayon d'apparition  $\text{rad}(B_a) = a$ . Ensuite,  $B_b$  est la plus petite boule de centre  $O$  et de rayon strictement supérieur à  $a$ . La seule boule de rayon non nul strictement incluse dans  $B_b$  est  $B_a$ ; or la boule  $B_a$  ne possède pas le point  $q(1, 1)$ . On en déduit que  $\vec{b}$  a pour rayon d'apparition  $\text{rad}(B_b) = b$ .

Notons qu'en appliquant ce raisonnement sur les masques  $\langle a, b \rangle$ , on arrive à la même conclusion sur les rayons d'apparition de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , ce qui prouve (via le lemme 7.1) que pour tout masque minimal de norme  $\langle a, b \rangle$ , on a  $\mathcal{T}_{\langle a, b \rangle} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ .

Dans ce chapitre, nous ferons souvent appel à la notion de déplacement élémentaire. Le déplacement élémentaire  $\delta_x$  (resp.  $\delta_y$ ) dans un cône d'influence  $C$  est la différence de valeur de distance à l'origine entre deux points  $p$  et  $p + (1, 0)$  de  $C$  (resp.  $p$  et  $p + (0, 1)$ ). Thiéll montre que les déplacements élémentaires sont constants dans chaque cône d'influence [Thi01]; on obtient les formules  $\delta_x = a$ ,  $\delta_y = c - 2a$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$ , et  $\delta_x = c - b$ ,  $\delta_y = 2b - c$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ . Par exemple pour le masque  $\langle 5, 7, 11 \rangle$  (voir la figure 8.2, à droite),  $\delta_x = 5$ ,  $\delta_y = 1$  dans  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $\delta_x = 4$ ,  $\delta_y = 3$  dans  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ .

## 8.2 $\mathcal{T}_{\langle a, b, c \rangle}$ est borné

On vient de montrer que les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  appartiennent toujours à  $\mathcal{T}_{\langle a, b, c \rangle}$ ; nous allons maintenant voir pourquoi seuls les vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  y appartiennent. Pour cela, nous établissons dans cette section les relations de domination entre les vecteurs de  $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^2)$ . Nous commençons au §8.2.1 par étudier les rayons de couverture d'une boule donnée en direction  $\vec{a}\mathbb{N}$  et  $\vec{b}\mathbb{N}$ ; nous en déduisons au §8.2.2 les relations de domination sur les axes  $\vec{a}\mathbb{N}$  et  $\vec{b}\mathbb{N}$ . Enfin, nous mettons en évidence, au §8.2.3, un ensemble de relations de domination faisant intervenir le vecteur  $\vec{c}$ .

### 8.2.1 Construction par récurrence des boules $H_{O-k\vec{a}}(B)$

Dans ce paragraphe,  $B$  est une boule de centre  $O$  et de rayon  $r$  fixé. Nous nous intéressons ici à établir une formule permettant de calculer pour tout entier positif  $k$ , le rayon de la plus petite boule contenant  $B$  et centrée en  $O - k\vec{a}$  (ou  $O - k\vec{b}$ ). Étant donné un vecteur  $\vec{v} \in \mathcal{G}(\mathbb{Z}^n)$ , on note  $\mathcal{R}_{\vec{v}} = \mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B)$ , et donc

$$\mathcal{R}_{\vec{v}} = \max_{p \in B} \left\{ d(O - \vec{v}, p) \right\}.$$

Étant donné que nous considérons des normes, on peut écrire de manière équivalente

$$\mathcal{R}_{\vec{v}} = \max_{\vec{u} \in \mathbb{Z}^2, \|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \|\vec{u} + \vec{v}\| \right\}. \quad (8.2)$$

Notons qu'il est suffisant (par le lemme 7.2), dans le cas des masques G-symétriques, de considérer  $p \in G(B)$ , c'est-à-dire  $\vec{u} \in G(\mathbb{Z}^2)$ , dans l'équation (8.2) :

$$\mathcal{R}_{\vec{v}} = \max_{\vec{u} \in G(\mathbb{Z}^2), \|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \|\vec{u} + \vec{v}\| \right\}. \quad (8.3)$$

Un exemple est présenté sur la figure 8.2. Prenons maintenant le cas où  $\vec{v} = \vec{a}$ . Nous décomposons

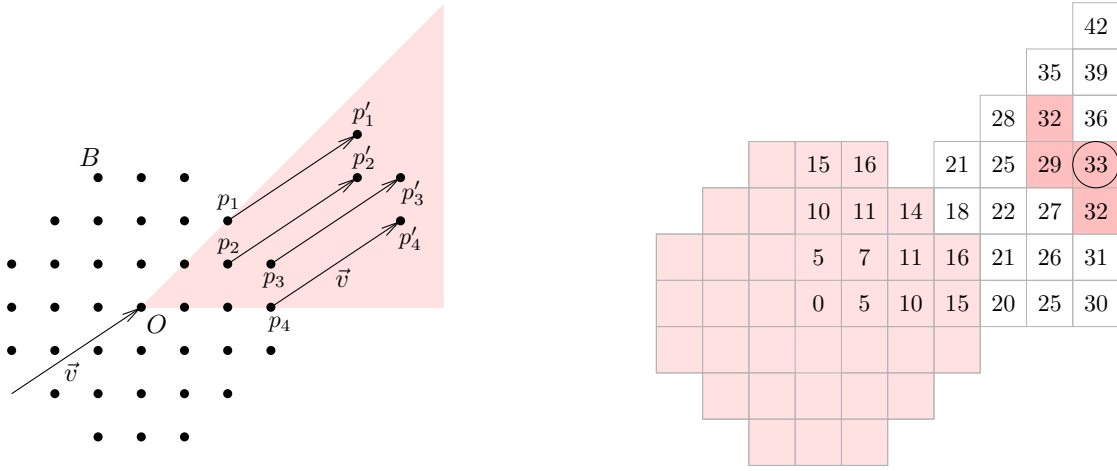


FIG. 8.2 – Couverture d'une boule  $B$  de rayon 16 pour la norme  $\|\cdot\|_{\langle 5,7,11 \rangle}$ , en direction  $\vec{v} = (3, 2)$ . Le rayon de  $H_{O-\vec{v}}(B)$  est donné par la valeur maximale des distances  $Op'_i$ . Dans cet exemple  $\mathcal{R}_{O-\vec{v}}(B) = Op'_3 = 33$ .

l'équation (8.3) selon que  $\vec{u}$  appartient ou non au cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  :

$$\mathcal{R}_{\vec{a}} = \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \left\{ \|\vec{u} + \vec{a}\| \right\}, \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b}), \vec{u} \notin \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \left\{ \|\vec{u} + \vec{a}\| \right\} \right\}. \quad (8.4)$$

- Si  $\vec{u}$  appartient au cône d'influence  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$ , alors  $\vec{u} + \vec{a}$  appartient également au cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$ , et comme le déplacement élémentaire  $\delta_x$  a pour valeur  $a$  dans ce cône, on a  $\|\vec{u} + \vec{a}\| = \|\vec{u}\| + a$ .
- Si  $\vec{u}$  n'appartient pas au cône d'influence  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{u} + \vec{a}$  appartiennent tous deux au cône  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$  (le vecteur  $\vec{u} + \vec{a}$  appartient éventuellement simultanément aux deux cônes d'influence), et comme le déplacement élémentaire  $\delta_x$  a pour valeur  $c - b$  dans ce cône, on a  $\|\vec{u} + \vec{a}\| = \|\vec{u}\| + c - b$ .

On peut ainsi déduire de (8.4) que

$$\mathcal{R}_{\vec{a}} = \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \left\{ \|\vec{u}\| \right\} + a, \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b}), \vec{u} \notin \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \left\{ \|\vec{u}\| \right\} + c - b \right\}. \quad (8.5)$$

L'intersection des cônes  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$  est l'ensemble  $\vec{c}\mathbb{N}$ . L'équation (8.5) peut donc s'écrire

$$\mathcal{R}_{\vec{a}} = \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \left\{ \|\vec{u}\| \right\} + a, \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b}), \vec{u} \notin \vec{c}\mathbb{N}} \left\{ \|\vec{u}\| \right\} + c - b \right\}. \quad (8.6)$$

On a nécessairement  $\|\vec{u}\| + a > \|\vec{u}\| + c - b$  (car  $a > c - b$  pour tout masque minimal  $\langle a, b, c \rangle$  induisant une norme). Étant donné que le terme  $\|\vec{u}\| + a$  pour  $\vec{u} \in \vec{c}\mathbb{N}$  apparaît déjà dans le deuxième max, on peut indifféremment considérer  $\vec{u} \in \vec{c}\mathbb{N}$  dans le troisième max de l'équation (8.6) :

$$\mathcal{R}_{\vec{a}} = \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \{\|\vec{u}\|\} + a, \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})} \{\|\vec{u}\|\} + c - b \right\}. \quad (8.7)$$

La norme d'un vecteur  $\vec{u}$  appartenant au cône d'influence  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  est toujours une combinaison linéaire positive de  $a$  et de  $c$ , par conséquent

$$\max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c}), \|\vec{u}\| \leq r} \{\|\vec{u}\|\} = \max_{t \in a\mathbb{N} + c\mathbb{N}, t \leq r} \{t\} = [r]_{a,c}.$$

De même, dans le cône d'influence  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ , on peut écrire

$$\max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b}), \|\vec{u}\| \leq r} \{\|\vec{u}\|\} = \max_{t \in b\mathbb{N} + c\mathbb{N}, t \leq r} \{t\} = [r]_{b,c}.$$

On peut ainsi réécrire (8.7) afin d'exprimer  $\mathcal{R}_{\vec{a}}$  en utilisant uniquement la notion d'entiers représentables :

$$\mathcal{R}_{\vec{a}} = \max \left\{ [r]_{a,c} + a, [r]_{b,c} + c - b \right\}. \quad (8.8)$$

On souhaite maintenant calculer  $\mathcal{R}_{2\vec{a}}$  :

$$\mathcal{R}_{2\vec{a}} = \max_{\vec{u} \in \mathbb{Z}^2, \|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \|\vec{u} + 2\vec{a}\|, \|\vec{u} + \vec{a} + \vec{a}\| \right\}. \quad (8.9)$$

De la même manière, on décompose (8.9) selon que  $\vec{u} + \vec{a}$  appartient ou non au cône d'influence  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2\vec{a}} &= \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} + \vec{a} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \{\|\vec{u} + \vec{a}\| + a\}, \max_{\vec{u} + \vec{a} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b}), \vec{u} + \vec{a} \notin \vec{c}\mathbb{N}} \{\|\vec{u} + \vec{a}\| + c - b\} \right\} \\ &= \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} + \vec{a} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} + a, \max_{\vec{u} + \vec{a} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b}), \vec{u} + \vec{a} \notin \vec{c}\mathbb{N}} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} + c - b \right\}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Et ici encore, on peut intégrer le cas  $\vec{u} + \vec{a} \in \vec{c}\mathbb{N}$  dans le troisième max (car  $a > c - b$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2\vec{a}} &= \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} + \vec{a} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} + a, \max_{\vec{u} + \vec{a} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} + c - b \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{\|\vec{u}\| \leq r, \vec{u} + \vec{a} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} + a, \max_{\|\vec{u}\| \leq r, \vec{u} + \vec{a} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} + c - b \right\}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Puis, en utilisant la notation d'entier représentable inférieur, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2\vec{a}} &= \max \left\{ \max_{\|\vec{u}\| \leq r, \vec{u} + \vec{a} \in a\mathbb{N} + c\mathbb{N}} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} + a, \max_{\|\vec{u}\| \leq r, \vec{u} + \vec{a} \in b\mathbb{N} + c\mathbb{N}} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} + c - b \right\} \\ &= \max \left\{ \left[ \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} \right]_{a,c} + a, \left[ \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \{\|\vec{u} + \vec{a}\|\} \right]_{b,c} + c - b \right\}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Finalement, par définition de  $\mathcal{R}_{\vec{v}}$  (8.2), on en déduit

$$\mathcal{R}_{2\vec{a}} = \max \left\{ [\mathcal{R}_{\vec{a}}]_{a,c} + a, [\mathcal{R}_{\vec{a}}]_{b,c} + c - b \right\}. \quad (8.13)$$

On peut de cette manière construire par récurrence la suite  $\mathcal{R}_{k\vec{a}}$  :

$$\mathcal{R}_{(k+1)\vec{a}} = \max\{ [\mathcal{R}_{k\vec{a}}]_{a,c} + a, [\mathcal{R}_{k\vec{a}}]_{b,c} + c - b \}. \quad (8.14)$$

Pour calculer la suite  $\mathcal{R}_{k\vec{b}}$ , on reprend l'équation (8.3) en remplaçant  $\vec{v}$  par  $\vec{b}$ , puis on décompose selon que  $\vec{u}$  appartient ou non au cône  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$  :

$$\mathcal{R}_{\vec{b}} = \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})} \{ \|\vec{u} + \vec{b}\| \}, \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c}), \vec{u} \notin \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})} \{ \|\vec{u} + \vec{b}\| \} \right\}. \quad (8.15)$$

Dans les cônes d'influence  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ , les déplacements  $\delta_x + \delta_y$  valent respectivement  $c - a$  et  $b$ . De manière analogue à (8.7), on peut ainsi écrire

$$\mathcal{R}_{\vec{b}} = \max_{\|\vec{u}\| \leq r} \left\{ \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})} \{ \|\vec{u}\| \} + b, \max_{\vec{u} \in \mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})} \{ \|\vec{u}\| \} + c - a \right\}. \quad (8.16)$$

Puis on remplace chaque  $\max\{\|\vec{u}\|\}$  par son expression arithmétique correspondante ; on obtient alors

$$\mathcal{R}_{\vec{b}} = \max\{ [r]_{a,c} + c - a, [r]_{b,c} + b \}. \quad (8.17)$$

Par un raisonnement similaire à celui vu pour la suite  $\mathcal{R}_{k\vec{a}}$ , en distinguant les deux cas  $\vec{u} + \vec{b} \in \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$  et  $\vec{u} + \vec{b} \notin \mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ , on peut déduire récursivement les termes de la suite  $\mathcal{R}_{k\vec{b}}$  :

$$\mathcal{R}_{(k+1)\vec{b}} = \max\{ [\mathcal{R}_{k\vec{b}}]_{a,c} + c - a, [\mathcal{R}_{k\vec{b}}]_{b,c} + b \}. \quad (8.18)$$

Un exemple de construction récursive de la suite  $\mathcal{R}_{k\vec{b}}$  est donnée sur la figure 8.3, pour une boule  $B$  de rayon 46 en norme  $\|\cdot\|_{(9,12,19)}$ . L'entier 46 est (9, 19)-représentable mais n'est pas (12, 19)-représentable. Par (8.17) et (8.18), il est suffisant de considérer l'information propagée par les valeurs maximales représentables dans chacun des deux cônes d'influence. Dans le cône  $\mathcal{C}(O, \vec{a}, \vec{c})$ , cette valeur est  $[46]_{9,19} = 46$  ; tandis que dans le cône  $\mathcal{C}(O, \vec{c}, \vec{b})$  cette valeur est  $[46]_{12,19} = 43$ .

### 8.2.2 Domination sur les axes $\vec{a}\mathbb{N}$ et $\vec{b}\mathbb{N}$

Nous montrons ici la domination du vecteur  $k\vec{a}$  sur le vecteur  $(k+1)\vec{a}$ , pour tout  $k \geq 1$ . Un résultat similaire est obtenu sur l'axe  $\vec{b}\mathbb{N}$ . Ce résultat nous permet d'affirmer, via le lemme 3.5, que ni les multiples de  $\vec{a}$  ni les multiples de  $\vec{b}$  n'apparaissent dans  $\mathcal{T}$ .

#### Lemme 8.1 (Domination sur l'axe $\vec{a}\mathbb{N}$ )

$$\forall k \in \mathbb{N}_*, k\vec{a} \succ (k+1)\vec{a}.$$

**Preuve.** Soit  $B$  une boule de centre  $O$  et de rayon  $r$ ,  $r$  étant  $(a, c)$ -représentable ou  $(b, c)$ -représentable. Soit  $k \in \mathbb{N}_*$ , on pose  $O' = O - k\vec{a}$ ,  $O'' = O - (k+1)\vec{a} = O' - \vec{a}$  (voir la figure 8.4),  $B' = H_{O'}(B)$  et  $B'' = H_{O''}(B)$ . Enfin, on note  $r' = \mathcal{R}_{O'}(B)$  et  $r'' = \mathcal{R}_{O''}(B)$ . L'objectif est de montrer que  $B' \subseteq B''$  : soit  $q$  un point appartenant à la boule  $B'$ , on va montrer que  $q \in B''$ , i.e.,  $O''q \leq r''$ . Étant donné que  $\vec{a} \in \mathbb{G}(\mathbb{Z}^2)$ , le corollaire 7.3 nous indique que si tout point de  $\mathbb{G}_{O'}(B')$  appartient à  $B''$  alors  $B' \subseteq B''$ . Il est donc suffisant de considérer  $q \in \mathbb{G}_{O'}(B')$ , c'est-à-dire  $q \in B' \cap \mathcal{C}(O', \vec{a}, \vec{b})$ . On sait par la construction présentée au §8.2.1 que

$$r'' = \max\{ [r']_{a,c} + a, [r']_{b,c} + c - b \}. \quad (8.19)$$

Évaluons  $O''q$  sachant que  $\overrightarrow{O''q} = \overrightarrow{O'q} + \vec{a}$ . Deux cas de figure se présentent :

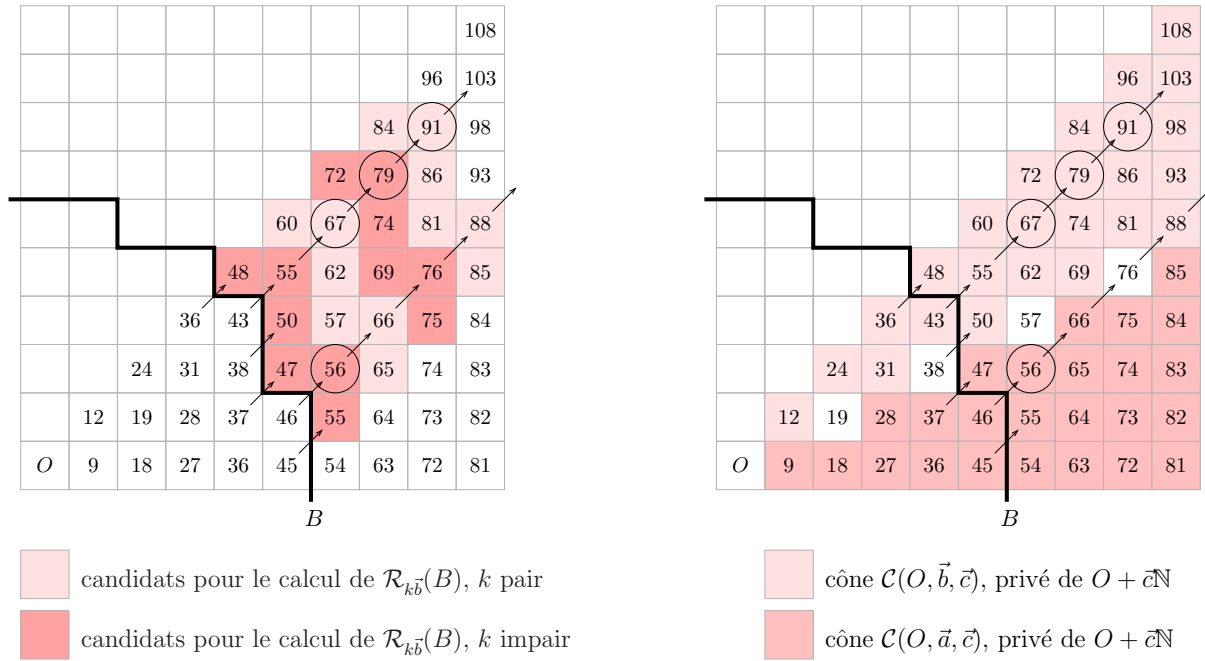


FIG. 8.3 – Étant donnée une boule  $B$  de rayon 46 en norme  $\|\cdot\|_{\langle 9,12,19 \rangle}$  (délimitée en gras), construction des rayons  $\mathcal{R}_{k\vec{b}}$  (valeurs cerclées) par récurrence :  $\mathcal{R}_{\vec{b}} = 56$ ,  $\mathcal{R}_{2\vec{b}} = 67$ ,  $\mathcal{R}_{3\vec{b}} = 79$ , etc. À gauche : visualisation des étapes de la récurrence. À droite : visualisation des deux cônes d'influence du générateur.

- Si  $q \in \mathcal{C}(O', \vec{a}, \vec{c})$  : alors  $O''q = O'q + a$  (déplacement élémentaire  $\delta_x = a$  dans le cône d'influence  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$ ), et aussi  $O'q \in a\mathbb{N} + c\mathbb{N}$ . De plus on a  $O'q \leq r'$  (car  $q \in B'$ ), donc

$$O''q \leq [r']_{a,c} + a. \quad (8.20)$$

Les équations (8.19) et (8.20) donnent  $O''q \leq r''$ .

- Si  $q \notin \mathcal{C}(O', \vec{a}, \vec{c})$  : alors  $O'q$  et  $O'q + \vec{a}$  appartiennent tous deux au cône  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ , et donc  $O''q = O'q + c - b$  (déplacement élémentaire  $\delta_x = c - b$  dans le cône d'influence  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ ), et  $O'q \in b\mathbb{N} + c\mathbb{N}$ . Puisque  $O'q \leq r'$ , on en déduit

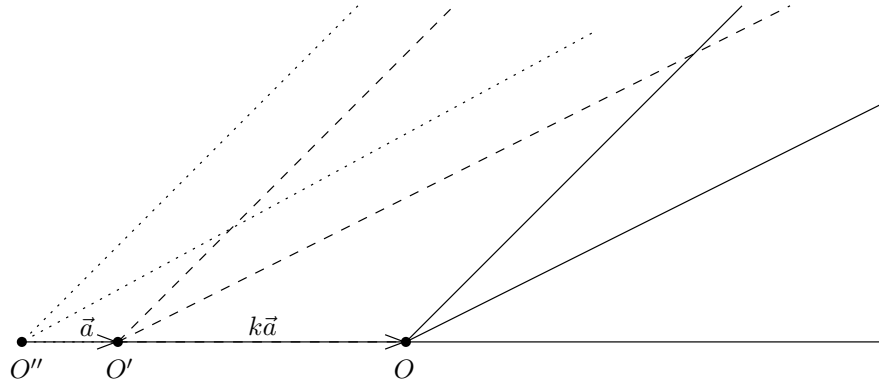
$$O''q \leq [r']_{b,c} + c - b. \quad (8.21)$$

Là encore, les équations (8.19) et (8.21) donnent  $O''q \leq r''$ . □

Par symétrie des rôles, on peut réécrire la preuve du lemme précédent en intervertissant les couples  $(\vec{a}, a)$  et  $(\vec{b}, b)$ . Les déplacements élémentaires à considérer sont  $\delta_x + \delta_y = b$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$  pour le premier cas de figure, et  $\delta_x + \delta_y = c - a$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  pour le second cas. On obtient alors :

**Lemme 8.2 (Domination sur l'axe  $\vec{b}\mathbb{N}$ )**

$$\forall k \in \mathbb{N}_*, k\vec{b} \succ (k+1)\vec{b}.$$

FIG. 8.4 – Cônes d'influence centrés en  $O$ ,  $O' = O - k\vec{a}$  et  $O'' = O - (k+1)\vec{a}$ .

### 8.2.3 Domination par déplacement de vecteur $\vec{c}$

Nous nous intéressons finalement au cas d'un vecteur quelconque du générateur. Le lemme suivant va nous permettre d'affirmer que tout vecteur de  $G(\mathbb{Z}^2)$  autre que  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  est dominé soit par un multiple de  $\vec{a}$ , soit par un multiple de  $\vec{b}$ .

Pour cela nous allons utiliser ici une caractéristique importante des masques  $\langle a, b, c \rangle$  : pour tout point  $p$  du générateur  $G(\mathbb{Z}^n)$  et qui n'appartient ni à l'axe  $O + \vec{a}\mathbb{N}$ , ni à l'axe  $O + \vec{b}\mathbb{N}$ , tout chemin minimal de  $O$  à  $p$  possède au moins une fois le vecteur  $\vec{c}$ .

#### Lemme 8.3

$$\forall \vec{v} \in G(\mathbb{Z}_*^2), \vec{v} \succ \vec{v} + \vec{c}.$$

**Preuve.** Soit  $B$  une boule de centre  $O$ , et  $r = \text{rad}(B)$ . On note  $O' = O - \vec{v}$ ,  $O'' = O - \vec{v} - \vec{c}$ ,  $r' = \mathcal{R}_{O'}(B)$ ,  $r'' = \mathcal{R}_{O''}(B)$ ,  $B' = H_{O'}(B)$  et  $B'' = H_{O''}(B)$ . L'objectif est de montrer que  $B' \subseteq B''$ . Soit  $p$  un point de  $G(B)$  qui maximise la distance à  $O'$  (voir la figure 8.5). Le vecteur  $\vec{v}$  appartient à  $G(\mathbb{Z}_*^2)$ , donc par le lemme 7.2 on a  $O'p = r'$ .

Nous observons que tout chemin minimal de  $O''$  à  $p$  possède au moins une fois le vecteur  $\vec{c}$ ; en effet ce chemin est de la forme  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{c}$  ou  $\alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ , mais ne peut être composé uniquement du vecteur  $\vec{a}$ , ni composé uniquement du vecteur  $\vec{b}$ . De ce fait, il existe un chemin minimal de  $O''$  à  $p$  passant par  $O'$ , et donc

$$O''p = O''O' + O'p = c + r'. \quad (8.22)$$

Par définition, le point  $p$  appartient à  $B$ , et appartient donc aussi à  $B''$ , par conséquent

$$O''p \leq r''. \quad (8.23)$$

Les équations (8.22) et (8.23) nous donnent  $c + r' \leq r''$ , or on sait (via le lemme 3.1) que  $\mathcal{R}_{O''}(B') \leq r' + c$ ; ce qui implique que  $\mathcal{R}_{O''}(B') \leq r''$ , et ainsi  $H_{O''}(B') \subseteq B''$ . Or par définition  $B' \subseteq H_{O''}(B')$ , et donc  $B' \subseteq B''$ .  $\square$

Ces relations de domination vont nous permettre d'établir que  $\mathcal{T}_{(a,b,c)}$  est borné et contient au plus 3 vecteurs. Soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $G(\mathbb{Z}_*^2)$ . Si  $\vec{v}$  est un multiple de  $\vec{c}$ , alors nous savons (paragraphe précédent) que  $\vec{v}$  est dominé par  $\vec{c}$ . Sinon, nous avons deux cas de figure :

- soit  $\vec{v}$  appartient au cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$ , auquel cas on peut écrire  $\vec{v} = k\vec{a} + l\vec{c}$ , avec  $k, l \in \mathbb{N}_*$ . Par le lemme 8.3, on a  $k\vec{a} \succ \vec{v}$ ; puis par le lemme 8.1 on obtient  $\vec{a} \succ \vec{v}$ .

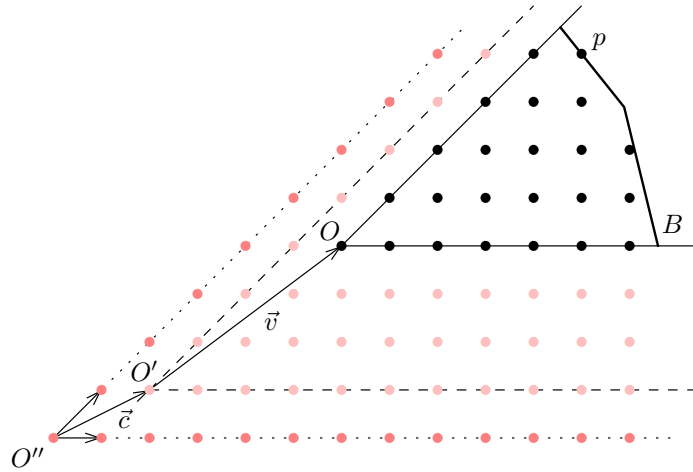


FIG. 8.5 – Une occurrence de  $\vec{c}$  dans tout chemin minimal reliant  $O''$  à  $p$ .

– soit  $\vec{v}$  appartient au cône  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ , auquel cas on peut écrire  $\vec{v} = k\vec{b} + l\vec{c}$ , avec  $k, l \in \mathbb{N}_*$ . Par le lemme 8.3, on a  $k\vec{b} \succcurlyeq \vec{v}$ ; puis par le lemme 8.2 on obtient  $\vec{b} \succcurlyeq \vec{v}$ .

On peut donc formuler le résultat suivant :

**Théorème 8.1** *Pour tout masque  $\mathcal{M} = \langle a, b, c \rangle$  induisant une norme, nous avons*

$$\{\vec{a}, \vec{b}\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \subseteq \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}.$$

On a vu au paragraphe 8.1 que les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  appartiennent toujours à  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , de plus leurs rayons d'apparition sont respectivement  $a$  et  $b$ . Le cas du vecteur  $\vec{c}$  est plus délicat : nous allons voir que ce vecteur n'appartient pas nécessairement à  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ . Dans la section suivante, nous fournissons un critère arithmétique pour décider si  $\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , et un algorithme rapide pour calculer son éventuel rayon d'apparition.

### 8.3 Rayon d'apparition de $\vec{c}$

Afin de prévoir l'apparition du vecteur  $\vec{c}$  dans le cas des masques  $\langle a, b, c \rangle$ , nous tirons parti du fait que le générateur ne contient que deux cônes d'influence  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ , et  $\vec{c}$  appartient à la fois à ces deux cônes. Soit  $r$  un entier  $d_{\mathcal{M}}$ -représentable ;  $r$  est soit  $(a, c)$ -représentable, soit  $(b, c)$ -représentable. Nous avons les deux propriétés suivantes :

- la plus petite boule contenant  $B_r$  en direction  $\vec{c}$  a pour rayon  $r + c$  (corollaire du lemme 7.4).
- les boules  $B_r$  et  $H_{O-\vec{c}}(B_r)$  coïncident dans  $G(\mathbb{Z}^n)$  (corollaire du lemme 7.5).

Nous illustrons tout d'abord l'exemple de l'apparition du vecteur  $\vec{c}$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\langle 5, 7, 11 \rangle}$  sur la figure 8.6.  $B$  est la boule de centre  $O$  et de rayon 35. Sur la figure de gauche apparaît le calcul de  $\mathcal{R}_{O-\vec{a}}(B)$  : il existe un point de  $B$  dans le cône  $\mathcal{C}(O, \vec{a}, \vec{c})$  à distance 35 de  $O$  (35 est  $(5, 11)$ -représentable). Le rayon de  $H_{O-\vec{a}}(B)$  est donc  $35 + 5 = 40$ . Or, il existe un point  $p$  dans le cône  $\mathcal{C}(O, \vec{c}, \vec{b})$  à distance 40 de  $O$ , donc le point  $q = p - \vec{a}$  (point cerclé) appartient à  $H_{O-\vec{a}}(B)$ . De plus  $q$  n'est pas dans  $B$  ; étant donné que  $B$  et  $H_{O-\vec{c}}(B)$  coïncident dans  $G(\mathbb{Z}^n)$ , le point  $q$  n'appartient pas à  $H_{O-\vec{c}}(B)$ .

De même sur la figure de droite pour la couverture en direction  $\vec{b}$  : le point  $q'$  cerclé appartient



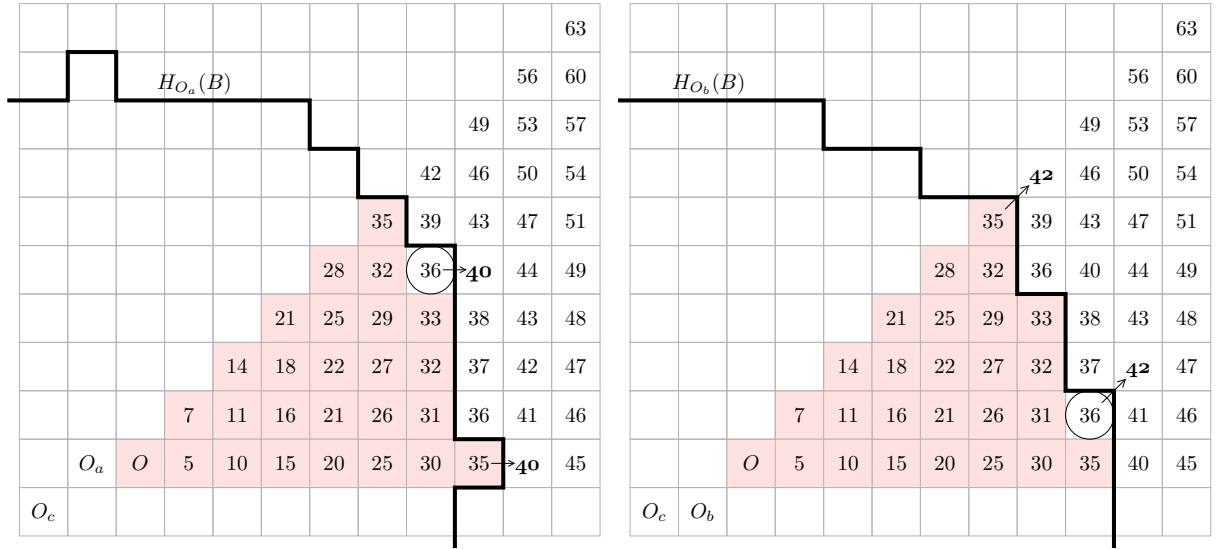


FIG. 8.6 – Apparition du vecteur  $\vec{c}$  pour le masque  $\langle 5, 7, 11 \rangle$ . Une boule  $B$  de centre  $O$  et de rayon 35 (dont le générateur est dessiné par des points grisés), les points  $O_a = O - \vec{a}$ ,  $O_b = O - \vec{b}$  et  $O_c = O - \vec{c}$ . On rappelle les déplacements élémentaires  $\delta_x = a = 5$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $\delta'_x = c - b = 4$  dans  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ ;  $\delta_{x+y} = c - a = 6$  dans le cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $\delta'_{x+y} = b = 7$  dans  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ . À gauche : le point cerclé appartient à  $H_{O-\vec{a}}(B)$  mais pas à  $B$  ; à droite : le point cerclé appartient à  $H_{O-\vec{b}}(B)$  mais pas à  $B$ .

bien à  $H_{O-\vec{b}}(B)$ , mais pas à  $B$ . Pour cette boule  $B$  de rayon 35, les deux boules  $H_{O-\vec{a}}(B)$  et  $H_{O-\vec{b}}(B)$  ne sont pas contenues dans  $H_{O-\vec{c}}(B)$ . La serrure  $(35, \vec{c})$  est la plus petite serrure n'ayant pas de clef, ce qui implique que le rayon d'apparition de  $\vec{c}$  est le rayon de cette serrure, i.e.,  $\mathcal{R}_{O-\vec{c}}(B) = 35 + c = 46$ .

Dans les paragraphes suivants, nous mettons en équation ce phénomène.

### 8.3.1 Lien avec les entiers représentables

Par souci de lisibilité, on notera dans ce paragraphe  $H_a(B) = H_{O-\vec{a}}(B)$ ,  $H_b(B) = H_{O-\vec{b}}(B)$  et  $H_c(B) = H_{O-\vec{c}}(B)$ . On notera également  $O_a = O - \vec{a}$ ,  $O_b = O - \vec{b}$  et  $O_c = O - \vec{c}$ . De même, on écrira  $\mathcal{R}_a(B) = \mathcal{R}_{O-\vec{a}}(B)$ , etc.

Sachant que  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont les seuls vecteurs susceptibles d'appartenir à  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , nous devons avoir  $\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  si et seulement si il existe une serrure de paramètre  $\vec{c}$  n'ayant aucune clef centrée en  $O - \vec{a}$  ou  $O - \vec{b}$ , autrement dit si et seulement si il existe une boule  $B_r$  réalisant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) & \text{(i)} \\ H_b(B_r) \not\subseteq H_c(B_r). & \text{(ii)} \end{cases} \quad (8.24)$$

Si  $r$  est le plus petit rayon satisfaisant ce système (sous réserve d'existence d'un tel  $r$ ), alors  $R_{app}(\vec{c}) = \mathcal{R}_c(B) = r + c$  :

$$R_{app}(\vec{c}) = \min \left\{ r \in \mathbb{N} : H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) \text{ et } H_b(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) \right\} + c. \quad (8.25)$$

Partant de (8.25), nous commençons par étudier l'ensemble  $\{r \in \mathbb{N} : H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r)\}$  : cela revient à déterminer pour quels  $r \in \mathbb{N}$  il existe un point  $q$  dans  $H_a(B_r) \setminus H_c(B_r)$ . Il est suffisant de chercher un tel point  $q$  dans le cône  $\mathcal{C}(O_a, \vec{a}, \vec{b})$  : en effet  $O_a - O_c = \vec{b} \in \mathcal{G}(\mathbb{Z}^2)$  et donc par le lemme 7.2,  $H_a(B_r) \subseteq H_c(B_r)$  si et seulement si  $H_a(B_r) \cap \mathcal{C}(O_a, \vec{a}, \vec{b}) \subseteq H_c(B_r)$ . De plus, un tel point  $q$  ne peut être situé dans le cône  $\mathcal{C}(O, \vec{a}, \vec{c})$ , car le lemme 7.5 stipule que  $H_a(B_r) \cap \mathcal{C}(O, \vec{a}, \vec{c}) = H_c(B_r) \cap \mathcal{C}(O, \vec{a}, \vec{c}) = B_r \cap \mathcal{C}(O, \vec{a}, \vec{c})$ . Nous déduisons des deux observations précédentes qu'il est suffisant de chercher ce point  $q$  dans le cône  $\mathcal{C}(O_a, \vec{c}, \vec{b})$ ; voir la figure 8.7. Nous avons donc

$$H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) \Leftrightarrow \exists q \in \mathcal{C}(O_a, \vec{c}, \vec{b}) : \begin{cases} q \in H_a(B_r) \\ q \notin H_c(B_r) \end{cases};$$

autrement dit :

$$H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) \Leftrightarrow \exists q \in \mathcal{C}(O_a, \vec{c}, \vec{b}) : \begin{cases} O_a q \leq \mathcal{R}_a(B_r) & (\alpha) \\ O_c q > \mathcal{R}_c(B_r) & (\beta) \end{cases} \quad (8.26)$$

Supposons qu'un tel point  $q$  existe (arbitrairement choisi), et définissons  $p = q + \vec{a}$ . Ce point  $p$  appartient donc au cône  $\mathcal{C}(O, \vec{c}, \vec{b})$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{O_a O}$  et  $\overrightarrow{q p}$  sont égaux; puisque toute distance de chanfrein est invariante par translation, l'inéquation (8.26.α) est équivalente à

$$O p \leq \mathcal{R}_a(B_r). \quad (8.27)$$

En ce qui concerne l'inéquation (8.26.β) : on sait que  $r$  est soit  $(a, c)$ -représentable, soit  $(b, c)$ -représentable; et de plus  $\vec{c}$  appartient à la fois au cône  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et au cône  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ . Par le lemme 7.4, on a donc

$$\mathcal{R}_c(B_r) = r + c. \quad (8.28)$$

On peut de plus écrire

$$\overrightarrow{O_c q} = \overrightarrow{O_c O_a} + \overrightarrow{O_a q} = \vec{b} + \overrightarrow{O p}. \quad (8.29)$$

Or le vecteur  $\overrightarrow{O p} = \overrightarrow{O_a q}$  appartient au cône  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ , de même que le vecteur  $\vec{b}$ ; on peut donc déduire de (8.29) que

$$O_c q = b + O p. \quad (8.30)$$

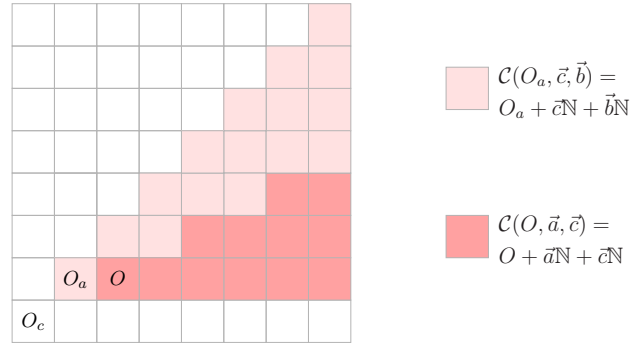
Si on considère (8.27), (8.28) et (8.30), on peut réécrire la proposition (8.26) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) &\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{C}(O, \vec{c}, \vec{b}) : \begin{cases} O p \leq \mathcal{R}_a(B_r) \\ b + O p > r + c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{C}(O, \vec{c}, \vec{b}) : r + c - b < O p \leq \mathcal{R}_a(B_r). \end{aligned} \quad (8.31)$$

De plus, on sait que  $\mathcal{R}_a(B_r) = \max\{[r]_{a,c} + a, [r]_{b,c} + c - b\}$  (voir le paragraphe 8.2.1). L'inéquation (8.31) ne peut être satisfaite si  $\mathcal{R}_a(B_r) = [r]_{b,c} + c - b$ , puisque  $[r]_{b,c} \leq r$ . Géométriquement parlant, un tel point  $p$  ne peut exister que si au moins un point de  $B$  qui maximise la distance à  $O_a$  est situé dans le cône  $\mathcal{C}(O, \vec{a}, \vec{c})$ . On peut ainsi réécrire (8.31) comme

$$H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) \Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{C}(O, \vec{c}, \vec{b}) : r + c - b < O p \leq [r]_{a,c} + a. \quad (8.32)$$

Pour tout point  $p$  du cône d'influence  $\mathcal{C}(O, \vec{c}, \vec{b})$ , la distance  $O p$  s'exprime par une combinaison linéaire positive des valeurs  $b$  et  $c$ . Donc, l'inéquation dans (8.32) a une solution si et seulement


 FIG. 8.7 – Les cônes  $\mathcal{C}(O_a, \vec{c}, \vec{b})$  et  $\mathcal{C}(O, \vec{a}, \vec{c})$  forment une partition de  $G_{O_a}(\mathbb{Z}^2)$ .

si le plus grand entier  $(b, c)$ -représentable inférieur à  $[r]_{a,c} + a$  est strictement plus grand que  $r + c - b$  :

$$H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) \Leftrightarrow r + c - b < \left[ [r]_{a,c} + a \right]_{b,c}. \quad (8.33)$$

Nous avons ainsi exprimé l'ensemble  $\{r \in \mathbb{N} : H_a(B_r) \not\subseteq H_c(B_r)\}$  de manière arithmétique, en faisant intervenir la notion d'entiers représentables.

Reprenons maintenant l'équation (8.25). On peut raisonner de manière analogue sur l'ensemble  $\{r \in \mathbb{N} : H_b(B_r) \not\subseteq H_c(B_r)\}$ , par symétrie des rôles entre les couples  $(\vec{a}, a)$  et  $(\vec{b}, b)$  : on cherche un point  $q$  dans  $H_b(B_r) \setminus H_c(B_r)$ , qu'il est suffisant de chercher dans le cône  $\mathcal{C}(O_b, \vec{a}, \vec{c})$ . S'il existe on définit  $p = q + \vec{b}$ ; on observe que  $\mathcal{R}_b(B)$  doit être égal à  $[r]_{b,c} + b$ , pour aboutir à l'équivalence

$$H_b(B_r) \not\subseteq H_c(B_r) \Leftrightarrow r + c - a < \left[ [r]_{b,c} + b \right]_{a,c}. \quad (8.34)$$

En utilisant (8.33) et (8.34), on peut réécrire (8.25) en utilisant uniquement des expressions arithmétiques :

$$R_{app}(\vec{c}) = \min \left\{ r \in \mathbb{N} : \begin{cases} r < \left[ [r]_{a,c} + a \right]_{b,c} + b - c \\ r < \left[ [r]_{b,c} + b \right]_{a,c} + a - c \end{cases} \right\} + c. \quad (8.35)$$

Le système (8.35) est le point de départ de tous les résultats du reste de ce chapitre. Nous en déduisons au §8.3.2 un critère arithmétique permettant de déterminer si  $\vec{c}$  appartient à  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , puis au §8.3.3 une borne sur son rayon d'apparition. Enfin, il nous permet d'écrire au §8.3.4 un algorithme simple permettant de calculer le rayon d'apparition du vecteur  $\vec{c}$ , pour tout masque minimal  $\mathcal{M} = \langle a, b, c \rangle$  induisant une norme.

### 8.3.2 Un critère arithmétique

On peut dans un premier temps comprendre ce qui se passe dans le cas simple des normes pour lesquelles il existe un entier à partir duquel tous les rayons sont représentables, c'est-à-dire lorsque les entiers  $a, c$  et les entiers  $b, c$  sont premiers entre eux :

**Lemme 8.4** *Soit  $\mathcal{M} = \langle a, b, c \rangle$  un masque minimal induisant une norme, et pour lequel  $\text{pgcd}(a, c) = \text{pgcd}(b, c) = 1$ . Alors  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  et  $R_{app}(\vec{c}) \leq bc - b + 1$ .*

**Preuve.** On rappelle que  $g(b, c)$  est le nombre de Frobenius de  $b$  et  $c$ , voir §6.6. Nous allons montrer que pour toute boule  $B$  de centre  $O$  et de rayon  $r > g(b, c)$ , on a  $H_{O-\vec{a}}(B) \not\subseteq H_{O-\vec{c}}(B)$  et  $H_{O-\vec{b}}(B) \not\subseteq H_{O-\vec{c}}(B)$ . Il suffit pour cela d'observer que les membres droits des équivalences (8.33) et (8.34) sont vérifiés lorsque le rayon de la boule  $B_r$  excède simultanément les nombres de Frobenius des deux cônes d'influence du générateur, c'est-à-dire lorsque  $r = g(b, c) + 1$  :

- comme  $b > a$  on a  $g(b, c) > g(a, c)$  et donc  $r > g(a, c)$ , et par définition du nombre de Frobenius on peut écrire  $[r]_{b,c} = [r]_{a,c} = r$  ;
- on peut alors écrire  $\left[ [r]_{a,c} + a \right]_{b,c} = [r+a]_{b,c} = r+a$  et  $\left[ [r]_{b,c} + b \right]_{a,c} = [r+b]_{a,c} = r+b$  ;
- on vérifie finalement que  $r+c-b < r+a$  (et  $r+c-a < r+b$ ) car pour tout masque minimal induisant une norme, on a  $c < a+b$ .

D'après cette observation, on déduit de l'équation (8.35) que le rayon d'apparition du vecteur  $\vec{c}$  existe et qu'il est inférieur à  $r+c = g(b, c) + 1 + c = bc - b + 1$ .  $\square$

Avant de procéder au cas général, nous introduisons un lemme préliminaire :

**Lemme 8.5** *Soient  $a, c$  deux entiers positifs et  $p = \text{pgcd}(a, c)$ . Pour tout  $x \geq g'(a, c) + p$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $[x + kp]_{a,c} = [x]_{a,c} + kp$ .*

**Preuve.** On rappelle que  $g'(a, c)$  est le nombre de Frobenius généralisé de  $a$  et  $c$ , voir §6.6. Soit  $x \geq g'(a, c) + p$ , on note respectivement  $\alpha$  et  $\beta$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $x$  par  $p$  :  $x = \alpha p + \beta$ . Étant donné que tout entier multiple de  $p$  strictement supérieur à  $g'(a, c)$  est  $(a, c)$ -représentable, et qu'aucun entier non multiple de  $p$  n'est  $(a, c)$ -représentable, on a  $[x]_{a,c} = \alpha p$ . D'autre part, on peut écrire  $[x + kp]_{a,c} = [(\alpha + k)p + \beta]_{a,c}$ . Le reste de la division euclidienne de  $x+p$  par  $p$  est  $\beta$ , on a donc  $[(\alpha + k)p + \beta]_{a,c} = (\alpha + k)p$ , et donc  $[x + kp]_{a,c} = \alpha p + kp = [x]_{a,c} + kp$ .  $\square$

**Théorème 8.2 (Critère d'apparition de  $\vec{c}$ )** *Pour tout masque de chanfrein minimal  $\mathcal{M} = \langle a, b, c \rangle$  induisant une norme, on a :*

$$\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \text{pgcd}(a, c) + \text{pgcd}(b, c) \leq 2(a + b - c) .$$

**Preuve.** Le système (8.35) peut être réécrit selon la formulation de (8.32) :

$$\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N} : \begin{cases} \exists \alpha \in b\mathbb{N} + c\mathbb{N} : r + c - b < \alpha \leq [r]_{a,c} + a \\ \exists \beta \in a\mathbb{N} + c\mathbb{N} : r + c - a < \beta \leq [r]_{b,c} + b . \end{cases} \quad (8.36)$$

Si (8.36) est satisfait pour un certain  $r$ , alors (8.36) est aussi satisfait pour  $r+c$ , car par définition de l'opérateur  $[.]$  on a  $[r]_{a,c} + c \leq [r+c]_{a,c}$  (et  $[r]_{b,c} + c \leq [r+c]_{b,c}$ ). Ceci indique que le membre droit de l'équivalence (8.36) admet une solution si et seulement si il admet une solution arbitrairement grande. L'intérêt de pouvoir se restreindre à un  $r$  arbitrairement grand réside dans le fait que pour tout  $r > g'(a_1, a_2)$ , on a (cf §6.6) une bonne connaissance des valeurs  $[r]_{a_1, a_2}$ . Soient  $p = \text{pgcd}(a, c)$ ,  $q = \text{pgcd}(b, c)$  et  $\Omega = \max\{g'(a, c) + p, g'(b, c) + q\}$ . On peut donc écrire

$$\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \exists r > \Omega : \begin{cases} \exists \alpha \in b\mathbb{N} + c\mathbb{N} : r + c - b < \alpha \leq [r]_{a,c} + a \\ \exists \beta \in a\mathbb{N} + c\mathbb{N} : r + c - a < \beta \leq [r]_{b,c} + b . \end{cases} \quad (8.37)$$

Par définition de  $g'$ , tout entier  $x$  multiple de  $q$  et supérieur à  $g'(b, c) + q$  est  $(b, c)$ -représentable, donc  $x > \Omega$  implique que le plus petit entier  $(b, c)$ -représentable strictement supérieur à  $x$  est  $[x]_{b,c} + q$ . De même,  $x > g'(a, c) + p$  implique que le plus petit entier  $(a, c)$ -représentable strictement supérieur à  $x$  est  $[r]_{a,c} + p$ . En prenant  $x = r + c - b$ , nous pouvons ainsi reformuler (8.37) :

$$\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \exists r > \Omega : \begin{cases} [r + c - b]_{b,c} + q \leq [r]_{a,c} + a \\ [r + c - a]_{a,c} + p \leq [r]_{b,c} + b. \end{cases} \quad (8.38)$$

Sachant que  $r > \Omega$  et que  $c - b$  (resp.  $c - a$ ) est un multiple de  $q$  (resp. de  $p$ ), nous avons par le lemme 8.5 :  $[r + c - b]_{b,c} = [r]_{b,c} + c - b$  (resp.  $[r + c - a]_{a,c} = [r]_{a,c} + c - a$ ). Par conséquent,

$$\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \exists r > \Omega : \begin{cases} [r]_{b,c} + q \leq [r]_{a,c} + a + b - c \\ [r]_{a,c} + p \leq [r]_{b,c} + a + b - c. \end{cases} \quad (8.39)$$

En notant  $\Delta = a + b - c$ , nous obtenons<sup>†</sup>

$$\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \exists r > \Omega : q - \Delta \leq [r]_{a,c} - [r]_{b,c} \leq \Delta - p. \quad (8.40)$$

Avec ces notations, le théorème que l'on souhaite prouver peut s'énoncer  $\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow p + q \leq 2\Delta$ . Il est évident d'après (8.40) que  $\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  implique  $q - \Delta \leq \Delta - p$ , c'est-à-dire  $p + q \leq 2\Delta$ . Il reste donc à montrer la réciproque, c'est-à-dire que si l'intervalle  $[q - \Delta, \Delta - p]$  n'est pas vide, alors il existe un entier  $r$  pour lequel  $[r]_{a,c} - [r]_{b,c}$  appartient à cet intervalle. Le lemme suivant donne un ensemble de valeurs réalisables par  $[r]_{a,c} - [r]_{b,c}$  :

**Lemme 8.6** *Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers strictement positifs. On note  $p = \text{pgcd}(a, c)$  et  $q = \text{pgcd}(b, c)$ . Si  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, alors pour tout entier  $x$  dans l'intervalle  $[1 - p, q - 1]$ , il existe un entier  $r$  arbitrairement grand vérifiant  $[r]_{a,c} - [r]_{b,c} = x$ .*

**Preuve.** Dans un premier temps, nous établissons la preuve pour  $x \in [0, q - 1]$ . Les entiers  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, nous savons donc par le théorème de Bezout qu'il existe deux entiers positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha p - \beta q = x$ . De plus,  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être choisis arbitrairement grands. Nous choisissons un tel couple  $(\alpha, \beta)$  vérifiant  $\beta q > \max\{g'(a, c), g'(b, c)\}$ . Puis nous prenons  $r = \alpha p$ . Étant donné que  $r$  est un multiple de  $p$  strictement plus grand que  $g'(a, c)$ , on a  $[r]_{a,c} = r$ . D'autre part,  $0 \leq x \leq q - 1$  permet d'écrire  $r = \beta q + x \in [\beta q, (\beta + 1)q[$ , et comme  $\beta q > g'(b, c)$ , on a  $[r]_{b,c} = \beta q$ . Par conséquent,  $[r]_{a,c} - [r]_{b,c} = \alpha p - \beta q = x$ .

La preuve pour  $x \in [1 - p, 0]$  est obtenue de manière analogue, par symétrie des rôles entre les couples  $(a, p)$  et  $(b, q)$ .  $\square$

Le tableau suivant illustre les valeurs prises par  $[r]_{a,c} - [r]_{b,c}$  pour  $a = 26, b = 35, c = 56$  ( $\langle 26, 35, 56 \rangle$  est un masque minimal induisant une norme). Pour cet exemple on a  $p = \text{pgcd}(26, 56) = 2$  et  $q = \text{pgcd}(35, 56) = 7$ ,  $g'(26, 56) = 646$  et  $g'(35, 56) = 189$ . À partir de 648, tous les multiples de 2 sont  $(26, 56)$ -représentables et tous les multiples de 7 sont  $(35, 56)$ -représentables. Toutes les valeurs entières dans  $[1 - p, q - 1] = [-1, 6]$  sont atteintes par  $[r]_{26,56} - [r]_{35,56}$  entre  $r = 651$  et  $r = 664$ . Puis  $[r]_{26,56} - [r]_{35,56}$  est périodique, de période  $pq = 14$ .

<sup>†</sup>On peut voir  $\Delta$  comme la différence entre les déplacements élémentaires  $\delta_x$  des cônes  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{c})$  et  $\mathcal{C}(\vec{c}, \vec{b})$ .

$r$	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	
$r \in 26\mathbb{N} + 56\mathbb{N}?$		*	*		*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
$r \in 35\mathbb{N} + 56\mathbb{N}?$					*								*							*			
$[r]_{26,56} - [r]_{35,56}$						-1	1	1	3	3	5	5	0	0	2	2	4	4	6	...			

Grâce à ce résultat, nous pouvons terminer la preuve du théorème : pour cela il suffit d'observer que les intervalles  $[q - \Delta, \Delta - p]$  et  $[1 - p, q - 1]$  ont toujours une intersection non vide. Ceci est dû au fait que tout masque minimal  $\langle a, b, c \rangle$  induisant une norme vérifie l'inéquation  $c < a + b$ , autrement dit  $\Delta \geq 1$ . On a donc  $1 - p \leq \Delta - p$  et  $q - \Delta \leq q - 1$ , ce qui nous assure que  $[q - \Delta, \Delta - p] \cap [1 - p, q - 1] \neq \emptyset$ . Par exemple,  $x = \max\{1 - p, q - \Delta\}$  (ou  $x = \min\{q - 1, \Delta - p\}$ ) appartient simultanément à ces deux intervalles.  $\square$

Reprenons l'exemple du masque  $\langle 26, 35, 56 \rangle$  : on a  $\Delta = 26 + 35 - 56 = 5$ , et donc  $[q - \Delta, \Delta - p] = [2, 3]$ . Or 2 (resp. 3) est réalisable par  $[r]_{26,56} - [r]_{26,56}$ , par exemple pour le rayon  $r = 660$  (resp.  $r = 654$ ). Pour ces deux rayons, on a donc une configuration d'apparition du vecteur  $\vec{c}$ .

### 8.3.3 Une borne pour l'apparition de $\vec{c}$

**Théorème 8.3** Soit  $\mathcal{M} = \langle a, b, c \rangle$  un masque minimal induisant une norme, et notons  $p = \text{pgcd}(a, c)$  et  $q = \text{pgcd}(b, c)$ . Si  $\vec{c} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  alors

$$R_{app}(\vec{c}) < \max\{g'(a, c) + p, g'(b, c) + q\} + c + pq \leq bc.$$

**Preuve.** D'après l'équation (8.35), nous cherchons à majorer le plus petit  $r$  satisfaisant

$$\begin{cases} r - b + c < \left[ [r]_{a,c} + a \right]_{b,c} & (i) \\ r - a + c < \left[ [r]_{b,c} + b \right]_{a,c} & (ii) \end{cases} \quad (8.41)$$

Nous avons vu au début de la preuve du théorème 8.2 que si ce système admet une solution, alors il admet une solution arbitrairement grande. Soit  $\Omega = \max\{g'(a, c) + p, g'(b, c) + q\}$ , nous allons maintenant montrer que si ce système est satisfait pour un certain  $r \geq \Omega$ , alors il est également satisfait pour tout  $r - kpq$  tel que  $k \in \mathbb{N}$  et  $r - kpq \geq \Omega$ . En effet, étant donné que  $kpq$  est à la fois multiple de  $p$  et de  $q$ , on peut utiliser le lemme 8.5 afin d'écrire (concernant l'inéquation (i)) :

$$r - kpq \geq \Omega \Rightarrow \left[ [r - kpq]_{a,c} + a \right]_{b,c} = \left[ [r]_{a,c} + a - kpq \right]_{b,c}.$$

Puis en remarquant qu'on a toujours  $[r]_{a,c} + a \geq r$ , on peut une fois de plus appliquer le lemme 8.5 :

$$r - kpq \geq \Omega \Rightarrow \left[ [r]_{a,c} + a - kpq \right]_{b,c} = \left[ [r]_{a,c} + a \right]_{b,c} - kpq.$$

Sous l'hypothèse  $r - kpq \geq \Omega$ , l'inéquation (i) est donc équivalente à

$$(r - kpq) - b + c < \left[ [r - kpq]_{a,c} + a \right]_{b,c}.$$

On peut appliquer le même raisonnement sur (ii), par symétrie des rôles entre  $a$  et  $b$ , ce qui termine la preuve qu'un tel  $r - kpq$  satisfait le système (8.41). Il reste à dire que le

plus petit  $r - kpq \geq \Omega$  se situe dans l'intervalle d'entiers  $[\Omega, \Omega + pq - 1]$ . Puis on ajoute le terme  $c$  de l'équation (8.35) pour obtenir la borne  $R_{app}(\vec{c}) \leq \Omega + c + pq - 1$ .

En développant les termes  $g'(a, c)$  et  $g'(b, c)$ , on obtient

$$R_{app}(\vec{c}) < \max\left\{\frac{ac}{p} - a - c + p, \frac{bc}{q} - b - c + q\right\} + c + pq,$$

$$R_{app}(\vec{c}) < \max\left\{\frac{ac}{p} - a + p(q + 1), \frac{bc}{q} - b + q(p + 1)\right\}.$$

On considère ensuite le terme  $\frac{ac}{p} - a + p(q + 1)$  comme une fonction continue  $f$  sur la variable  $p$ , pour  $p$  variant de 1 à  $a$ ; de même on considère  $h(q) = \frac{bc}{q} - b + q(p + 1)$ , pour tout  $q$  dans l'intervalle  $[1, b]$ . Étudions tout d'abord les variations de  $f$  dans l'intervalle  $[1, a]$  :  $\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{ac}{p^2} + q + 1 = \frac{p^2(q+1) - ac}{p^2}$ , qui s'annule pour  $p_0 = \sqrt{\frac{ac}{q+1}}$ . Cette valeur  $p_0$  est toujours supérieure à 1 mais peut être inférieure ou supérieure à  $a$ . On a deux cas de figure :

- si  $p_0 \geq a$ , alors  $f$  est décroissante de 1 à  $a$  et  $\forall p \in [1, a], f(p) \leq f(1)$ .
- si  $p_0 < a$ , alors  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $[1, p_0]$  puis croissante sur  $[p_0, a]$ . On a alors  $\forall p \in [1, a], f(p) \leq \max\{f(1), f(a)\}$ .

On peut majorer facilement  $f(1)$  et  $f(a)$  :  $f(1) = ac - a + q + 1 \leq ac - a + b + 1$ , or une condition de norme précise que  $3b \leq 2c$ , donc  $ac - a + b + 1 \leq c(a + 2/3) - a + 1 < bc - a + 1 < bc$ ; et  $f(a) = aq + c$ , par une autre condition de norme  $2a \leq c$ , on en déduit  $aq + c \leq c(q/2 + 1) \leq c(b/2 + 1)$ . Étant donné que tout masque minimal  $\langle a, b, c \rangle$  induisant une norme vérifie  $b \geq 4$ , on a  $b/2 + 1 < b$ , et donc  $f(a) < bc$ .

On obtient la même borne supérieure pour la fonction  $h(q)$  : par symétrie des rôles dans les couples  $(a, b)$  et  $(p, q)$ , on obtient que  $\frac{\partial h}{\partial q}$  s'annule pour  $q_0 = \sqrt{\frac{bc}{p+1}}$ , toujours supérieur à 1. Les deux cas de figure sont :

- si  $q_0 \geq b$ , alors  $h$  est décroissante de 1 à  $b$  et  $\forall q \in [1, b], h(q) \leq h(1)$ .
- si  $q_0 < b$ , alors  $h$  est décroissante sur l'intervalle  $[1, q_0]$  puis croissante sur  $[q_0, b]$ . On a alors  $\forall q \in [1, b], h(q) \leq \max\{h(1), h(b)\}$ .

Enfin, on majore  $h(1)$  et  $h(b)$  :  $h(1) = bc - b + p + 1 \leq bc - b + a + 1 \leq bc$ ; et  $h(b) = bp + c$ , on applique la condition de norme  $3b \leq 2c$  pour écrire  $h(b) \leq c(2p/3 + 1) \leq c(2b/3 + 1)$ . Finalement, étant donné que tout masque minimal  $\langle a, b, c \rangle$  induisant une norme vérifie  $b \geq 4$ , on a  $2b/3 + 1 < b$ , et donc  $h(b) < bc$ .  $\square$

### 8.3.4 Un algorithme pour $R_{app}(\vec{c})$

L'algorithme `Rapp_c` permet de calculer le rayon d'apparition du vecteur  $\vec{c}$  dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , pour tout masque de chanfrein 2D minimal donné  $\mathcal{M} = \langle a, b, c \rangle$  induisant une norme. La présence de  $\vec{c}$  dans le voisinage de test (ligne 1) est déterminée grâce au théorème 8.2. Si  $\vec{c}$  appartient à  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , son rayon d'apparition est donné par l'équation (8.35), testé à la ligne 9. L'exécution de cet algorithme est illustré pour le masque  $\langle 5, 7, 11 \rangle$  sur la figure 8.8.

Les appels `entiers_rep(a, c, max)` et `entiers_rep(b, c, max)` s'exécutent en temps  $\mathcal{O}(max)$  =  $\mathcal{O}(bc)$ , voir page 72. La boucle principale (lignes 8 à 13) effectue un test arithmétique pour chaque rayon  $r$ , de  $r = 0$  à  $r = R_{app}(\vec{c}) - c < bc - c$  (la borne provient du théorème 8.3). L'algorithme `Rapp_c` a donc une complexité globale  $\mathcal{O}(bc)$ .

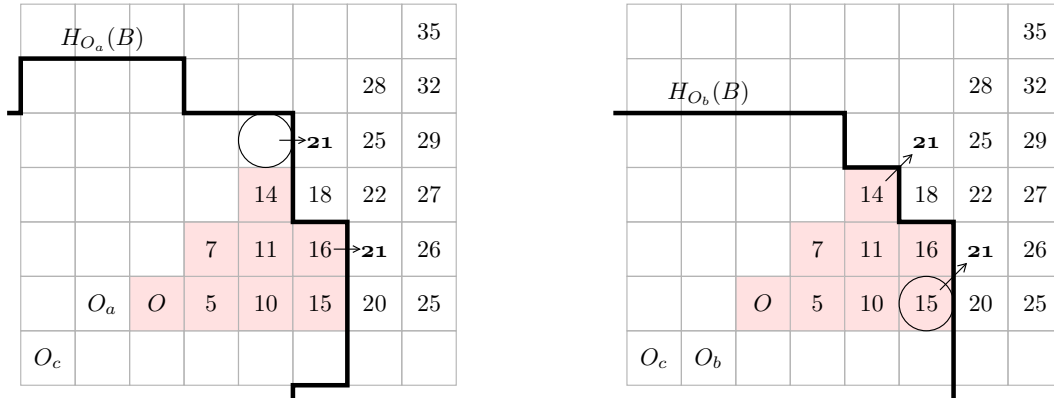


FIG. 8.8 – Configuration pour le masque  $\langle 5, 7, 11 \rangle$  et un rayon quelconque  $r = 16$ .  $B$  est la boule de centre  $O$  et de rayon 16, dont le générateur est dessiné gris. À gauche : le point cerclé  $q$  est à distance  $\llbracket [r]_{a,c} + a \rrbracket_{b,c} + b = 21 + 7 = 28$  du point  $O_c$ . Étant donné que  $28 > \mathcal{R}_c(B) = r + c = 27$ , le point  $q$  n'appartient pas à  $H_c(B)$ . À droite : le point cerclé  $q'$  est à distance  $\llbracket [r]_{b,c} + b \rrbracket_{a,c} + a = 21 + 5 = 26$  de  $O_c$ . Puisque  $26 \leq \mathcal{R}_c(B) = 27$ , le point  $q'$  appartient à  $H_c(B)$ . Cette configuration ne permet donc pas l'apparition du vecteur  $\vec{c}$ .

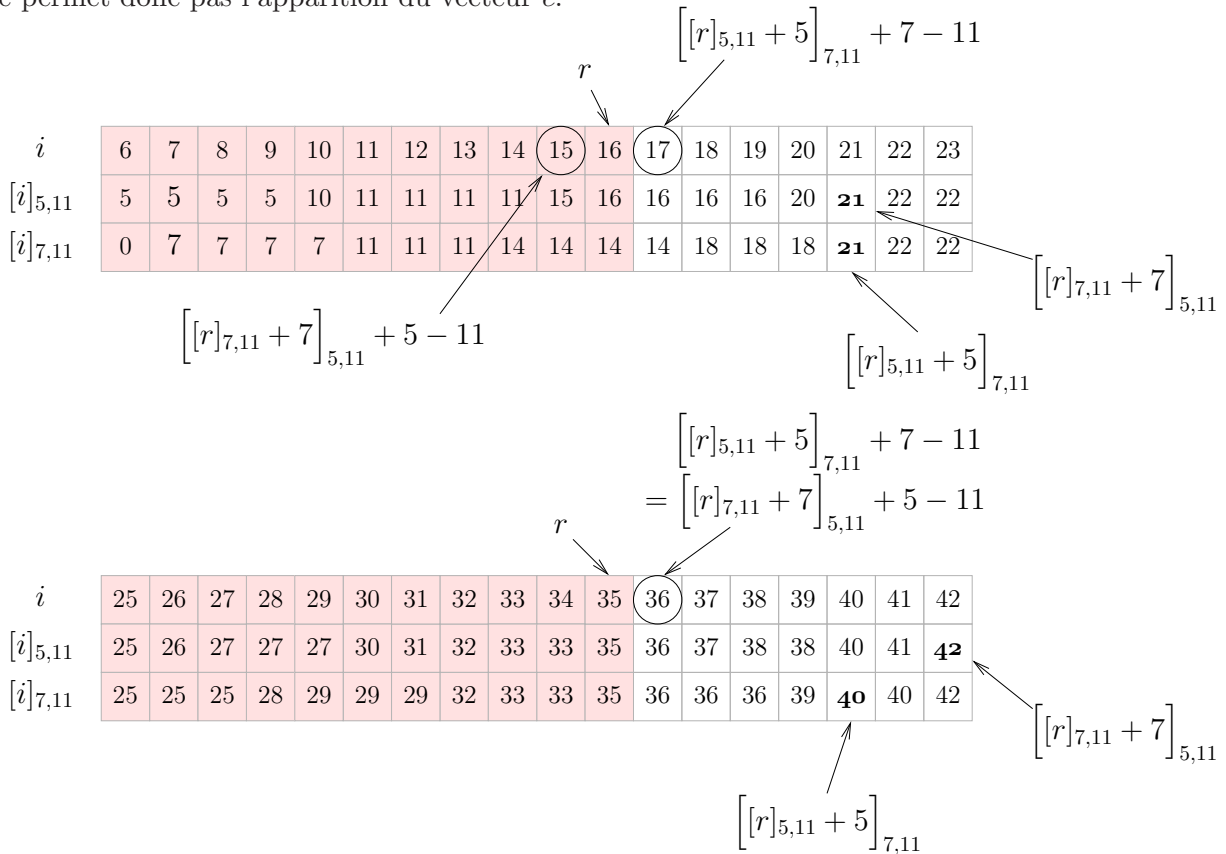


FIG. 8.9 – Exécution de l'algorithme **Rapp\_c** pour le masque  $\langle 5, 7, 11 \rangle$ . Les tableaux  $T_{ac}[\cdot]$  et  $T_{bc}[\cdot]$  contiennent respectivement les valeurs de  $[\cdot]_{5,11}$  et  $[\cdot]_{7,11}$ . En haut : pour un rayon quelconque ( $r = 16$ , configuration illustrée sur la figure 8.8). En bas : lorsqu'il détecte la configuration de la figure 8.6, c'est-à-dire pour l'apparition de  $\vec{c}$  dans  $\mathcal{T}$  (les conventions graphiques sont identiques).



**Algorithme 8.1 : Rapp\_c****Entrée** : Un masque 2D minimal  $\mathcal{M} = \langle a, b, c \rangle$  induisant une norme.**Sortie** : Le rayon d'apparition de  $\vec{c}$  dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ .**si**  $\text{pgcd}(a, c) + \text{pgcd}(b, c) > 2(a + b - c)$  **alors**| **retourner**  $+\infty$  ;**sinon**|  $max \leftarrow b * c$  ;| /\* une borne supérieure de  $R_{app}(\vec{c})$  \*/|  $T_{ac} \leftarrow \text{entiers\_rep}(a, c, max)$  ;|  $T_{bc} \leftarrow \text{entiers\_rep}(b, c, max)$  ;|  $r \leftarrow 0$  ;**boucle**| **si**  $T_{bc}[T_{ac}[r] + a] + b - c > r$  **et**  $T_{ac}[T_{bc}[r] + b] + a - c > r$  **alors**| | **retourner**  $r + c$  ;| /\* test d'apparition de  $\vec{c}$  \*/|  $r \leftarrow r + 1$  ;

## 8.4 Conclusion et approche des masques $7 \times 7$

Nous récapitulons les résultats de ce chapitre en résumant les étapes du choix du voisinage de test nécessaire pour extraire l'axe médian d'une forme  $\mathcal{S}$ , étant donné un masque minimal  $5 \times 5$  qui induit une norme. Premièrement, on détermine si  $\vec{c}$  appartient à  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , en considérant l'inéquation  $\text{pgcd}(a, c) + \text{pgcd}(b, c) \leq 2(a + b - c)$ . Si l'inéquation n'est pas satisfaite, alors on prend  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  comme voisinage de test. Dans le cas contraire, il faut déterminer si  $\vec{c}$  doit être utilisé dans le voisinage : si la plus grande valeur lue sur la DT de  $\mathcal{S}$  est inférieure au rayon d'apparition de  $\vec{c}$  (donné par l'algorithme **Rapp\_c** en temps  $\mathcal{O}(bc)$ ), alors on prend  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  comme voisinage de test ; sinon on doit utiliser  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ .

La suite naturelle de ces travaux est l'investigation des voisinages de test pour les masques de norme  $7 \times 7$ . Les masques de chanfrein  $7 \times 7$  sont composés de pondérations du voisinage  $5 \times 5$ , auxquelles s'ajoute au moins une des pondérations  $(\vec{d}, d)$  ou  $(\vec{e}, e)$ , voir la figure 8.10. Les voisinages  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  pour ces masques présentent des propriétés bien différentes de celles des masques  $5 \times 5$ , comme illustré sur la figure 8.11 : pour de nombreux masques  $7 \times 7$ , le voisinage minimum  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  n'est pas inclus dans le voisinage  $7 \times 7$  ; il est de plus très fréquent de voir apparaître des vecteurs non visibles dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ . Ceci est dû au fait qu'il y a au moins 3 cônes d'influence dans le générateur, et l'argumentation de la preuve du lemme 8.3 et du §8.3 ne tient plus : il n'existe (dans le cas général) pas de vecteur qui appartient à tous les cônes d'influence de  $G(\mathbb{Z}^2)$ .

Nous observons que plusieurs propriétés des masques  $5 \times 5$  se généralisent aux masque  $7 \times 7$  :

- les relations de domination sur les axes  $\vec{a}\mathbb{N}$  et  $\vec{b}\mathbb{N}$  vues au §8.2.2 sont toujours valables. En fait, nous pensons que pour toute norme de chanfrein G-symétrique, de telles relations de domination existent sur chaque axe engendré par un vecteur de la base canonique ;
- dans chaque cône d'influence du « bord » du générateur (par exemple  $\mathcal{C}(\vec{a}, \vec{d})$  et  $\mathcal{C}(\vec{e}, \vec{b})$  pour un masque  $\langle a, b, c, d, e \rangle$ ), seuls les vecteurs qui engendrent le cône ( $\vec{a}, \vec{d}, \vec{e}$  et  $\vec{b}$  dans notre exemple) appartiennent à  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ . Pour prouver un tel résultat, il reste à établir les relations de domination dans ces cônes « extrêmes » ;
- les rayons d'apparition des vecteurs de  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  sont inférieurs au produit des deux plus grands poids du masques (par exemple  $d.e$  pour un masque  $\langle a, b, c, d, e \rangle$ ).

Le lien avec la notion d'entier représentable est bien entendu toujours présent, mais est plus

complexe. Par exemple, le rayon de couverture d'une boule  $B_r$  en direction  $\vec{a}$  pour un masque  $\langle a, b, c, d \rangle$  (généralisation de (8.8)), est

$$\mathcal{R}_{\vec{a}}(B_r) = \max\{[r]_{a,d} + a, [r]_{c,d} + d - c, [r]_{b,c} + c - b\}. \quad (8.42)$$

Nous avons également recensé plusieurs conjectures concernant une généralisation du théorème 8.2. Par exemple, pour un masque  $\langle a, b, c, d \rangle$ , on a  $\text{pgcd}(c, d) + \text{pgcd}(b, c) \leq \Delta(\vec{c}) \Rightarrow \vec{c} \in \mathcal{T}$  et  $\text{pgcd}(a, d) + \text{pgcd}(c, d) \leq \Delta(\vec{d}) \Rightarrow \vec{d} \in \mathcal{T}$  (les réciproques sont en général fausses), où  $\Delta(\vec{c}) = b + d - 2c$  (resp.  $\Delta(\vec{d}) = a + c - d$ ) représente la différence entre les déplacements élémentaires  $\delta_x$  des deux cônes qui possèdent  $\vec{c}$  (resp.  $\vec{d}$ ). Une question importante concerne donc l'existence de formules arithmétiques permettant de caractériser le voisinage  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ .

	$e$	$d$		$d$	$e$	
$e$		$c$		$c$		$e$
$d$	$c$	$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
		$a$	$O$	$a$		
$d$	$c$	$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$e$		$c$		$c$		$e$
	$e$	$d$		$d$	$e$	

FIG. 8.10 – Masque de chanfrein  $\langle a, b, c, d, e \rangle$ .

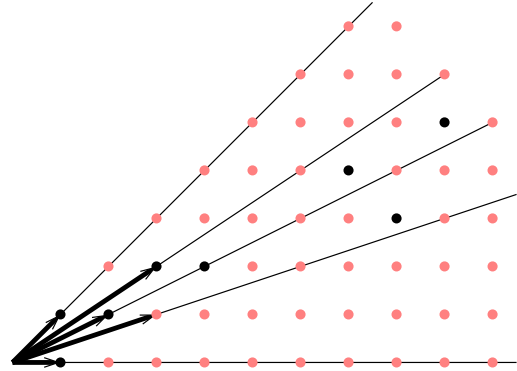


FIG. 8.11 – Exemple de voisinage de test (points noirs) pour un masque  $\langle a, b, c, d, e \rangle$ .

## Chapitre 9

# Couverture minimum

L'axe médian d'une forme  $\mathcal{S}$  est un codage de  $\mathcal{S}$  qui n'est pas minimal en termes de nombre de boules. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la recherche d'une couverture minimum d'une forme  $\mathcal{S} \in \mathbb{Z}^2$  par des boules euclidiennes ; nous montrons en particulier que ce problème est NP-difficile, par une réduction polynomiale du problème de satisfaisabilité Planar-4 3-SAT. Nous présentons au §9.1 un bref état de l'art concernant des problèmes similaires de couverture étudiés dans le domaine de la géométrie algorithmique. La preuve de NP-complétude est ensuite effectuée au §9.2 ; puis nous abordons plusieurs problèmes ouverts au §9.3. Les travaux présentés dans ce chapitre ont été publiés dans [CHS08].

### 9.1 Introduction

L'ensemble des boules maximales d'une forme  $\mathcal{S}$  est une *couverture* de  $\mathcal{S}$ , car les boules de  $\text{AM}(\mathcal{S})$  sont incluses dans  $\mathcal{S}$  et l'union des boules de  $\text{AM}(\mathcal{S})$  est exactement  $\mathcal{S}$ . On dit encore que la représentation par axe médian possède la propriété de *réversibilité*. Cependant, cette représentation n'est pas minimale en le nombre de boules, comme l'illustre la figure 9.1.

Soit  $E$  un ensemble,  $X$  un sous-ensemble de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une famille de sous-ensembles de  $E$ . Une couverture *minimum* de  $X$  par  $\mathcal{F}$  est une sous-famille  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}$  de cardinalité minimum, telle que  $\mathcal{F}'$  est une couverture de  $X$ . Selon la nature des objets à couvrir et les familles d'ensembles utilisées pour les couvrir, le problème consistant à trouver une couverture minimum est plus ou moins difficile à résoudre.

En géométrie algorithmique, un problème classique consiste à trouver une couverture mini-

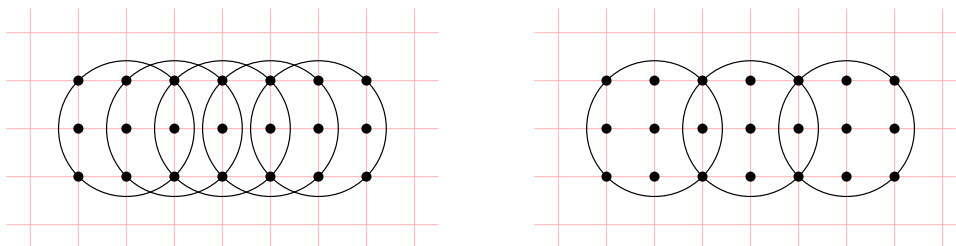


FIG. 9.1 – À gauche : l'ensemble des boules maximales d'une forme  $\mathcal{S}$ . À droite : une couverture minimum de  $\mathcal{S}$  par trois boules.

mum d'un polygone par une famille donnée de polygones. Dans de nombreux cas ces problèmes sont NP-difficiles ; toutefois ils peuvent être dans P si on pose des contraintes telles que l'absence de trou dans l'objet en entrée, ou sur la convexité des objets considérés. Par exemple, Culberson et Reckhow montrent que couvrir un polygone par un ensemble de polygones convexes est NP-difficile [CR94]. Ils montrent également que couvrir un polygone orthogonal (i.e., dont les arêtes sont horizontales ou verticales), même sans trou, par des rectangles est NP-difficile. Si on considère la famille des carrés, le problème peut se révéler plus simple : Bar-Yehuda et Ben-Chanoh donnent un algorithme linéaire pour trouver une couverture minimum d'un polygone orthogonal par des carrés [BYBH96] ; cependant, Aupperle *et al.* établissent que couvrir une forme de  $\mathbb{Z}^2$  par des carrés dont les sommets sont des points entiers est NP-difficile, sauf si on interdit les trous dans la forme en entrée [ACKO88]. Pour un état de l'art détaillé sur les problèmes de couverture de polygone, voir [Kei97].

Nous nous intéressons au problème consistant à trouver une couverture minimum d'une forme  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^2$  par des boules euclidiennes. Par définition des boules maximales, il existe une couverture minimum de  $\mathcal{S}$  qui n'utilise que des boules maximales, et donc l'axe médian contient au moins une couverture minimum.

**Définition 9.1 (*k*-axe médian)** Soit  $\mathcal{S}$  une forme de  $\mathbb{Z}^2$ . Un *k*-axe médian (*k*-AM) de  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble réversible de  $\text{AM}(\mathcal{S})$ , de cardinalité *k*.

**Définition 9.2 (Problème *k*-AM)** Étant donnée une forme discrète  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^2$  de cardinalité finie et un entier positif *k*,  $\mathcal{S}$  admet-elle un *k*-AM ?

Chercher une couverture minimum d'un objet est donc équivalent à chercher un *k*-AM de cardinalité minimum. Dans la communauté de la géométrie discrète, plusieurs auteurs se sont penchés sur le problème consistant à filtrer l'axe médian afin de trouver un sous-ensemble de  $\text{AM}(\mathcal{S})$  qui couvre  $\mathcal{S}$ , voir [BN95] [RB93] [BN97] [ND97]. Citons également le *Reduced Medial Axis (RMA)* proposé par Coeurjolly dans [CM07], un sous-ensemble réversible de l'axe médian calculé en utilisant la notion de *paraboloïde* maximale.

Nous montrons dans la suite que le problème *k*-AM est NP-complet ; pour cela nous montrons que le problème de satisfaisabilité Planar-4 3-SAT se réduit polynomialement au problème *k*-AM. Nous présentons au prochain paragraphe le problème Planar-4 3-SAT et la méthode de réduction.

## 9.2 NP-complétude du problème *k*-axe médian

Avant d'introduire le problème Planar-4 3-SAT, on rappelle tout d'abord quelques notions concernant les problèmes de satisfaisabilité : étant donné un ensemble  $V$  de variables booléennes, un *littéral* est une variable  $v \in V$  ou sa négation  $\bar{v}$ . Une *clause*  $c$  est une conjonction de littéraux, par exemple  $c = v_1 \vee \bar{v}_3 \vee \bar{v}_4$ . Enfin, une formule SAT  $\phi(V, C)$  est un ensemble  $C$  de clauses sur l'ensemble  $V$  de variables.

Le *graphe associé*  $G(\phi(V, C))$  de la formule SAT  $\phi(V, C)$  est le graphe biparti défini de la manière suivante :

- on associe un sommet à chaque variable  $v \in V$  et à chaque clause  $c \in C$  ;
- on place une arête entre un sommet associé à une variable  $v$  et un sommet associé à une clause  $c$  si et seulement si  $v$  apparaît dans  $c$ .

Enfin, une formule *Planar-4 3-SAT*  $\phi$  est par définition une formule SAT pour laquelle :

- le graphe associé  $G(\phi)$  est planaire ;
- chaque variable apparaît au plus 4 fois dans  $\phi$  ;
- chaque clause a exactement 3 littéraux.

**Définition 9.3 (Problème Planar-4 3-SAT)** *Étant donnée une formule Planar-4 3-SAT  $\phi(V, C)$ , existe-t-il un assignement des variables de  $V$  tel que toutes les clauses de  $C$  sont satisfaites ?*

La NP-complétude du problème Planar-4 3-SAT a été établie par Jansen et Müller [JM95]. La réduction du problème Planar-4 3-SAT au problème  $k$ -MA se fait de la manière suivante : étant donnée une formule Planar-4 3-SAT  $\phi$ , on construit en temps polynomial une forme  $\mathcal{S}(\phi)$  et un entier  $k(\phi)$  tels que  $\phi$  est satisfaisable si et seulement si  $\mathcal{S}(\phi)$  admet un  $k(\phi)$ -AM, ce qui implique que le problème  $k$ -AM est au moins aussi difficile que le problème Planar-4 3-SAT.

Nous présentons aux §9.2.1, §9.2.2 et §9.2.3 des objets de  $\mathbb{Z}^2$  qui sont des interprétations géométriques des variables, des arêtes et des clauses de  $G(\phi)$ , que nous appelons *gadgets*. Nous connectons ces gadgets au §9.2.4 pour construire  $\mathcal{S}(\phi)$  et terminer la preuve. Les figures que nous présentons dans la suite comportent un nombre important de boules ; par souci de lisibilité, on représente dorénavant chaque boule euclidienne par la frontière de son enveloppe convexe, plutôt que par un cercle.

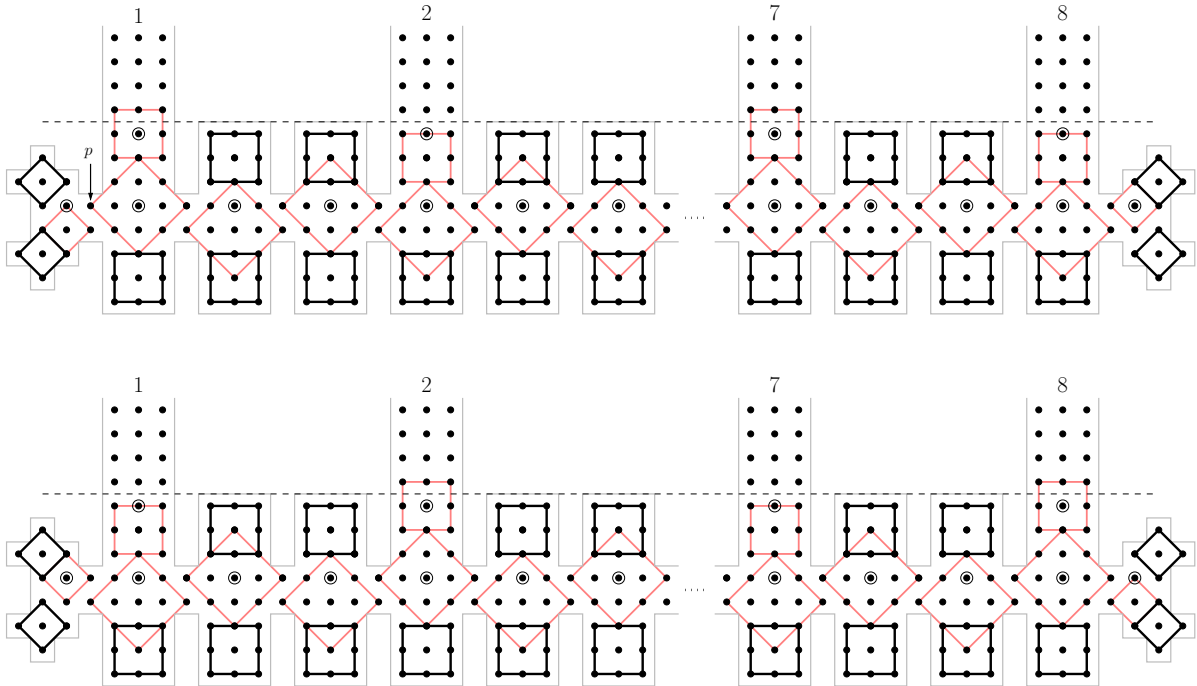


FIG. 9.2 – Deux couvertures minimum du gadget variable, correspondant à un assignement à *vrai* (en haut) et à *faux* (en bas) de la variable associée. Les boules noires appartiennent à toute couverture minimum ; toute paire de points cerclés ne peut être couverte par une seule boule.

### 9.2.1 Variables

Nous proposons tout d'abord l'interprétation géométrique d'une variable, appelée *gadget variable*, et illustrée sur la figure 9.2. Le gadget variable est l'ensemble des points de  $\mathbb{Z}^2$  situés

sous la ligne pointillée. Ses 8 extensions verticales (numérotées de 1 à 8 sur la figure) sont appelées les *extrémités* du gadget, que nous « brancherons » aux gadgets arêtes.

Déterminons une couverture minimum de ce gadget : chacune des 40 boules dessinées en trait fort appartient à toute couverture minimum. De plus, toute paire de points cerclés ne peut être couverte par une seule boule. Il y a 32 points cerclés, donc toute couverture minimum de ce gadget comporte au moins  $40+32=72$  boules. Observons maintenant que le point  $p$  peut être couvert de deux manières différentes, qui impliquent chacune une couverture du gadget par 72 boules. Aucune de ces couvertures minimum n'autorise de protubérance à la fois dans les extrémités paires et impaires, mais il existe une couverture minimum ayant une protubérance de longueur 1 dans chaque extrémité impaire (figure 9.2, en haut), et une couverture minimum ayant une protubérance de longueur 1 dans chaque extrémité paire (figure 9.2, en bas). Ces deux couvertures correspondent respectivement aux assignements à *vrai* et à *faux* de la variable associée. Si  $v$  est la variable associée au gadget, on dit que chaque extrémité impaire transmet le signal  $v$ , tandis que chaque extrémité paire transmet le signal  $\bar{v}$ .

### 9.2.2 Arêtes

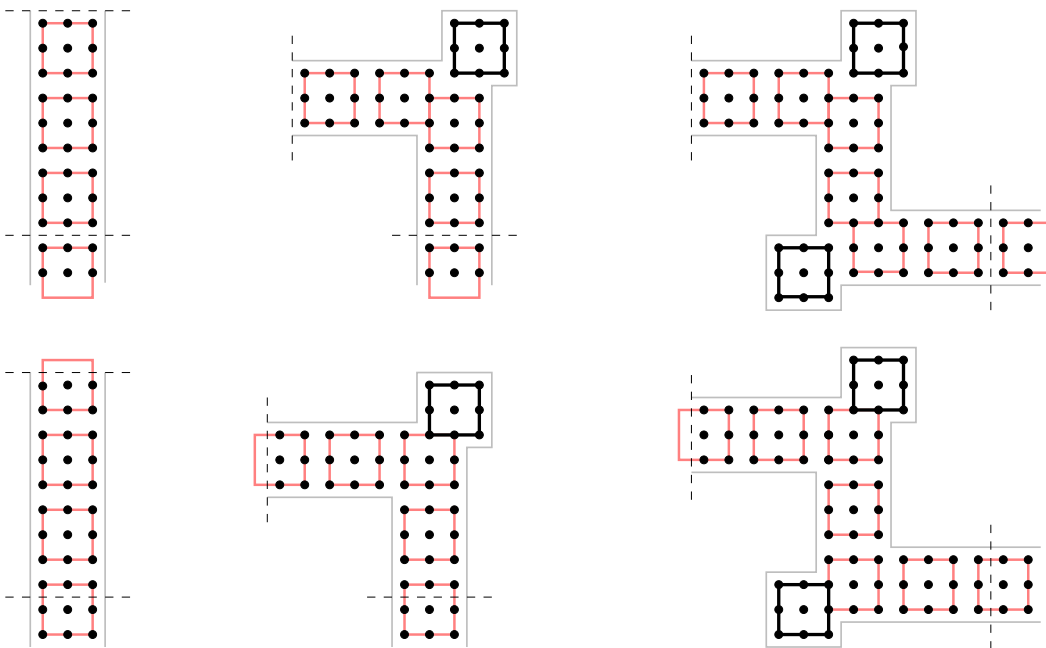


FIG. 9.3 – Trois configurations d'un gadget arête ; pour chacune d'elles sont dessinées deux couvertures minimum. Chaque couverture correspond à la transmission du signal *vrai* ou *faux*, par propagation de la protubérance d'une extrémité à l'autre.

Nous présentons sur la figure 9.3 le *gadget arête*, interprétation géométrique des arêtes de  $G(\phi)$ . Un tel gadget doit être construit de manière à transmettre le signal (vrai ou faux) d'une variable vers une clause ; les différents cas de figure sont illustrés sur la figure 9.3, pour une arête rectilinéaire ou présentant des « virages » d'angle  $\pi/2$ . Afin de transmettre le signal, la longueur du gadget est un multiple de 3, et les abscisses (ou ordonnées) des centres des boules des couvertures minimum sont équivalentes modulo 3 d'une extrémité à l'autre du gadget.

## 9.2.3 Clauses

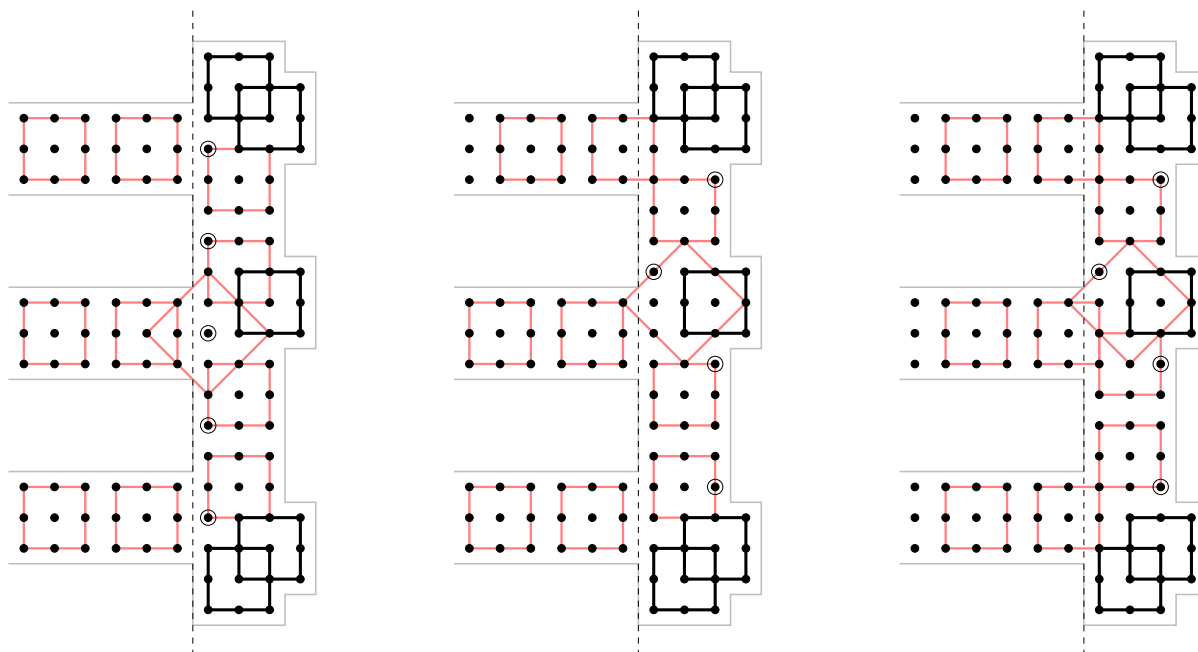


FIG. 9.4 – Trois couvertures minimum du gadget clause, selon les signaux transmis par les arêtes : de gauche à droite, *faux-faux-faux*, *vrai-faux-faux* et *vrai-vrai-vrai*. Nous reprenons les conventions graphiques de la figure 9.2.

Enfin, nous présentons une interprétation géométrique des clauses. Le *gadget clause* est l'ensemble des points situés à droite de la ligne pointillée sur la figure 9.4. Nous reprenons une argumentation similaire à celle du §9.2.1 pour le calcul de la couverture minimum : les 5 boules délimitées par un trait fort appartiennent à toute couverture minimum ; de plus toute paire de points cerclés sur l'illustration de gauche ne peut être couverte par une unique boule. Couvrir ce gadget requiert donc au moins  $5+5=10$  boules ; une telle couverture est présentée sur l'illustration de gauche. Cependant, si on autorise une protubérance (d'épaisseur 1) d'une boule provenant d'un gadget arête, simulant la transmission d'un signal *vrai*, il est possible de couvrir le reste du gadget avec 9 boules. Un exemple est illustré sur la figure 9.4 au milieu, avec un signal *vrai* provenant de l'arête supérieure. Si on autorise trois protubérances (illustration de droite), couvrir le reste du gadget nécessite également 9 boules (par le même argument concernant les points cerclés).

## 9.2.4 Branchements des gadgets

Étant donnée une formule Planar-4 3-SAT  $\phi(V, C)$ , nous construisons  $\mathcal{S}(\phi)$  en dessinant un gadget pour chaque sommet (variable ou clause) et pour chaque arête de  $G(\phi)$ , réalisant les mêmes connexions que dans  $G(\phi)$ . Ceci est possible car les branches horizontales (respectivement verticales) des extrémités des gadgets sont centrées sur des axes horizontaux (resp. verticaux) dont les ordonnées (resp. les abscisses) sont constantes modulo 3.

Étant donné que tout graphe planaire de degré inférieur à 4 peut être plongé dans la grille rectilinéaire en temps polynomial (voir [Tam87]), la forme  $\mathcal{S}(\phi)$  peut être construite en temps polynomial en la taille de  $\phi$ . La figure 9.5 donne un exemple du « branchement » d'un gadget

variable dont la variable associée apparaît 4 fois dans  $\phi$ .

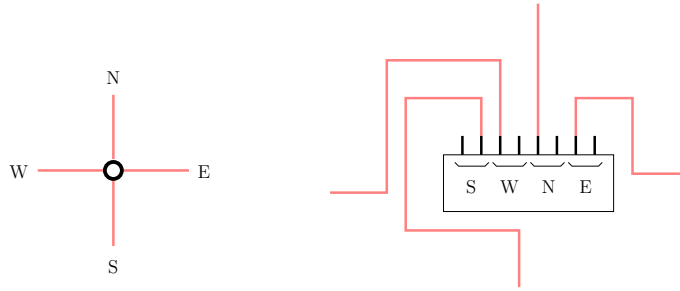


FIG. 9.5 – Exemple de connexions pour un gadget variable dont la variable associée apparaît 3 fois en tant que littéral positif, et une fois en tant que littéral négatif.

Dorénavant, on note  $w(\phi)$  le nombre minimum de boules nécessaires pour couvrir les gadgets arêtes de  $\mathcal{S}(\phi)$ , et  $k(\phi(V, C)) = 72 \cdot |V| + w(\phi) + 9 \cdot |C|$ .

**Lemme 9.1** *Si  $\phi$  est satisfaisable, alors il existe une couverture de  $\mathcal{S}(\phi)$  ayant  $k(\phi)$  boules.*

**Preuve.** Soit  $A$  un assignement des variables qui satisfait la formule  $\phi$ . L'algorithme suivant construit une couverture de  $\mathcal{S}(\phi)$  ayant  $k(\phi)$  boules :

- couvrir les gadgets variable selon  $A$ , avec des protubérances dans les extrémités qui correspondent aux valeurs *vrai*. Chaque gadget nécessite 72 boules (cf §9.2.1) ;
- couvrir les gadgets arête, en transmettant les éventuelles protubérances d'une extrémité à l'autre des gadgets ; cette opération requiert  $w(\phi)$  boules ;
- couvrir les gadgets clause. Puisque  $T$  satisfait  $\phi$ , chaque gadget clause est déjà en partie couvert par une boule provenant d'un gadget arête, et donc chaque gadget requiert 9 boules (cf §9.2.3).

La couverture ainsi construite possède  $72 \cdot |V| + w(\phi) + 9 \cdot |C| = k(\phi)$  boules.  $\square$

**Lemme 9.2** *S'il existe une couverture de  $\mathcal{S}(\phi)$  ayant  $k(\phi)$  boules, alors  $\phi$  est satisfaisable.*

**Preuve.** Supposons qu'il existe une couverture de  $\mathcal{S}(\phi)$  ayant  $k(\phi)$  boules. Par construction,  $72 \cdot |V| + w(\phi)$  boules sont requises pour couvrir les  $|V|$  gadgets variable et les gadgets arête de  $\mathcal{S}(\phi)$ . Par conséquent, la partie de  $\mathcal{S}(\phi)$  non encore couverte peut être couverte par  $k(\phi) - 72 \cdot |V| - w(\phi) = 9 \cdot |C|$  boules. Puisqu'il faut au moins 9 boules pour couvrir chaque gadget clause, cela implique que la couverture de  $\mathcal{S}(\phi)$  peut être terminée en plaçant exactement 9 boules dans chaque gadget clause. On en déduit que chaque gadget clause est déjà en partie couvert par une protubérance (transmise par un gadget arête), et donc que l'assignement correspondant à la couverture des gadgets variable satisfait  $\phi$ .  $\square$

D'après les lemmes 9.1 et 9.2, la formule  $\phi$  est satisfaisable si et seulement si on peut couvrir  $\mathcal{S}(\phi)$  avec  $k(\phi)$  boules. Le problème du  $k$ -AM est au moins aussi difficile que Planar-4 3-SAT, et est donc NP-difficile. En d'autres termes, si toute instance de  $k$ -AM pouvait être résolue en temps polynomial, alors nous aurions un algorithme polynomial pour résoudre Planar-4 3-SAT. D'autre part, il est clair que le problème  $k$ -AM est dans NP : on peut vérifier en temps polynomial si un ensemble donné de  $k$  boules couvre une forme  $\mathcal{S}$ . Nous avons ainsi prouvé :

**Théorème 9.1** *Le problème du  $k$ -AM est NP-complet.*



### 9.3 Discussion et problèmes ouverts

Étant donné que le problème  $k$ -AM est NP-difficile, une suite naturelle consiste à rechercher un algorithme d'approximation pour le problème de la couverture minimum d'objet discrets. On rappelle qu'un algorithme d'approximation avec un facteur  $\alpha$  pour un problème de couverture minimum  $P$  est un algorithme polynomial qui retourne, pour toute instance  $I$  de  $P$ , une couverture de  $I$  dont la taille est inférieure ou égale à  $\alpha$  fois la taille d'une couverture minimum de  $I$  (plus une constante additive) [Vaz01]. Les algorithmes de couverture proposés dans [BN95] [RB93] [BN97] [ND97] sont relativement efficaces mais les auteurs ne fournissent pas d'analyse concernant le facteur d'approximation.

Soit  $\mathcal{S} \in \mathbb{Z}^2$  et  $\Gamma$  l'ensemble des boules maximales de  $\mathcal{S}$ ; l'approche gloutonne consiste à insérer au fur et à mesure dans la couverture, des boules de  $\Gamma$  qui maximisent le nombre de points de  $\mathcal{S}$  non encore couverts, jusqu'à ce que le sous-ensemble de boules choisies couvre  $\mathcal{S}$ . Dans le cas général de la couverture d'ensemble, l'algorithme glouton est un algorithme d'approximation avec facteur  $\log(n)$ , où  $n$  est le nombre d'éléments à couvrir. Cependant les instances sur lesquelles l'algorithme glouton retourne une solution de taille  $\log(n)$  fois la taille d'une couverture minimum ne peuvent pas être « plongées » en des instances de couverture dans  $\mathbb{Z}^2$  avec des boules euclidiennes, voir un exemple sur la figure 9.6. Une suite intéressante

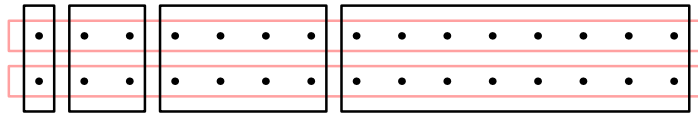


FIG. 9.6 – Une instance du problème de couverture d'ensemble dont une solution optimale est composée des deux ensembles grisés. L'algorithme glouton retourne la couverture composée des quatre ensembles noirs.

serait donc d'établir que pour le problème de couverture de forme discrète, l'approche gloutonne fournit un algorithme d'approximation à facteur constant.

Notons que l'axe médian n'est pas une approximation de la couverture minimum avec facteur constant : une construction similaire à celle de la figure 9.1, où l'on augmente la hauteur de la forme, permet de générer des formes où le rapport entre la taille de l'axe médian et la taille d'une couverture minimum est arbitrairement grand.

Une autre question que l'on se pose concerne la complexité du problème de couverture minimum d'une forme discrète n'ayant pas de trou. Si les objets utilisés pour réaliser la couverture sont des carrés, le problème est linéaire [BYBH96]; en revanche le problème est NP-difficile si on utilise des rectangles [CR94]. Le problème est ouvert dans le cas d'une couverture par des boules euclidiennes.



# Chapitre 10

## Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons établi des propriétés arithmétiques concernant les voisinages de test pour l'axe médian discret, pour la distance euclidienne et certaines normes de chanfrein. Nous en avons déduit des algorithmes efficaces pour le calcul des  $R$ -voisinages minimaux  $\mathcal{T}(R)$ .

En ce qui concerne la distance euclidienne, nous avons utilisé les propriétés des  $G$ -symétries et analysé des relations de domination entre vecteurs afin de montrer que le voisinage minimum  $\mathcal{T}(R)$  tend vers l'ensemble des points visibles de  $\mathbb{Z}^n$  lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$ . Une suite naturelle est de borner les rayons d'apparition des vecteurs de  $\mathcal{T}$ .

**Problème ouvert 1.** Donner une borne inférieure non triviale des rayons d'apparition pour la distance euclidienne.

Nous proposons la conjecture suivante en dimension 2 : pour tout vecteur visible  $\vec{v}$  du générateur, le rayon d'apparition de  $\vec{v}$  est supérieur au carré de l'abscisse de  $\vec{v}$ . Notre analyse des voisinages a consisté à exhiber des configurations d'apparition de vecteurs ; on ne peut déduire de cette analyse aucun résultat de borne sur les rayons d'apparition. Une nouvelle approche est donc nécessaire pour obtenir une telle borne. D'autre part, nous n'avons pas d'explication concernant le fait que les vecteurs d'ordonnée 1 ont un très petit rayon d'apparition comparé aux autres vecteurs ayant même norme.

Nous avons également présenté un algorithme pour le calcul de  $\mathcal{T}(R)$  en dimension 2 qui n'utilise ni DT ni LUT. Afin d'établir un algorithme efficace pour le calcul de  $\mathcal{T}(R)$  en dimension supérieure, un travail important consiste à analyser les relations de  $\vec{v}$ -domination dès la troisième dimension.

L'axe médian d'une forme  $\mathcal{S}$  n'est pas une représentation minimale de  $\mathcal{S}$  en termes de nombre de boules ; nous avons montré que le problème de recherche d'une couverture minimum d'une forme de  $\mathbb{Z}^2$  par des boules euclidiennes est NP-difficile. La question qu'on peut maintenant se poser concerne l'approximation de la couverture minimum :

**Problème ouvert 2.** Donner un algorithme d'approximation ayant un facteur constant pour le problème de couverture minimum d'une forme discrète par des boules euclidiennes.

De plus, on souhaite savoir s'il existe un algorithme polynomial pour ce problème dans le cas où la forme à couvrir ne possède pas de trou.

Nous nous sommes ensuite intéressé à la famille des normes de chanfrein. Après avoir caractérisé les masques de chanfrein qui induisent une norme, nous avons étudié les voisinages de test pour les masques de norme de taille au plus  $5 \times 5$  : le voisinage minimum est soit le

8-voisinage, soit l'ensemble des déplacements du masques. Nous avons établi dans quel cas le vecteur  $\vec{c} = (2, 1)$  est nécessaire dans le voisinage.

Les voisinages de test des masques de norme  $7 \times 7$  présentent de nouvelles propriétés : en général, ils sont plus grands que le masque lui-même, et possèdent des vecteurs non visibles. Nous proposons plusieurs conjectures, telles que les relations de domination sur les axes de G-symétrie, ou l'absence dans  $\mathcal{T}_M$  de vecteurs des cônes du « bord » du générateur. De manière générale, on se pose la question suivante :

**Problème ouvert 3.** Existe-t-il des formules arithmétiques (similaires à celles des voisinages pour les normes  $5 \times 5$ ) décrivant la composition des voisinages  $\mathcal{T}_M$  pour les masques de norme  $7 \times 7$  ?

D'autre part, il serait intéressant d'obtenir une borne supérieure sur les rayons d'apparition d'un masque  $7 \times 7$  donné. L'approche proposée par Normand et Évenou [NÉ08] [NÉ09], basée sur la représentation des boules par des polyèdres dont les facettes sont « serrées » sur les points entiers des boules, est très novatrice. Cette représentation a été utilisée pour élaborer un algorithme rapide de calcul des voisinages de tests, mais nous pensons qu'elle peut être employée pour obtenir des caractérisations des voisinages pour les grands masques.

Nous nous sommes concentrés sur les *normes* de chanfrein car elles présentent des formules directes de distance dans chaque cône d'influence, et plusieurs propriétés sur les inclusions de boules basées sur la notion d'entiers représentables dans les cônes. En fait, nous connaissons très mal les propriétés des masques de chanfrein qui n'induisent pas de norme.

**Problème ouvert 4.** Établir un algorithme de calcul d'axe médian ou de voisinage de test dans le cas général des distances de chanfrein.

Ce travail doit être basé sur une étude générale des boules de distances de chanfrein : par exemple, dans quels cas sont-elles convexes, ou dans quels cas présentent-elles des trous ?

Afin d'obtenir le rayon des boules incluses dans la forme, le calcul d'axe médian nécessite le calcul de DT. Pour  $d_e$ , des algorithmes linéaires en le nombre de points de l'image existent [BGKW95] [Hir96]. Pour les distances de chanfrein, l'algorithme de Rosenfeld et Pfaltz en  $\mathcal{O}(m.N)$  — où  $m$  est la taille du masque, et  $N$  le nombre de points de l'image — est très simple à mettre en œuvre, mais le temps de calcul augmente considérablement à partir de la dimension 3, à cause du nombre important de G-symétries, limitant en pratique l'utilisation des grands masques.

**Problème ouvert 5.** Existe-t-il un algorithme de DT de chanfrein de complexité  $\mathcal{O}(N \log m)$ , voire  $\mathcal{O}(N)$  ?

Enfin, nous avons uniquement traité dans ce mémoire une approche locale de calcul d'axe médian. Une approche nouvelle est proposée par Coeurjolly dans [CM07] : le Reduced Medial Axis (RMA) est un sous-ensemble de l'axe médian, obtenu par un filtrage de l'ensemble des paraboloides maximales d'une forme.

**Problème ouvert 6.** Écrire un algorithme de calcul de l'axe médian qui n'est pas basé sur une recherche locale des boules maximales.

# Index

- active (pondération), 71
- $k$ -axe médian, 100
- axe médian, 2, 22
  
- boule, 16
  - maximale, 2, 21
  - rationnelle, 66
  
- clef, 28
- complément, 11
- cône, 11
- cône d'influence, 66
  
- déplacement élémentaire, 82
- distance, 14
  - de chanfrein, 16, 64
  - de Montanari, 63
  - discrète, 14
  - locale, 15
- Distance Transform (DT), 3, 64
- domination, 26
- $\vec{v}$ -domination, 29
  
- entier inférieur représentable, 71
- équivalents (rayons), 17
  
- Farey (suite de), 13
- forme, 11
- Frobenius (nombre de), 72
- Frobenius généralisé (nombre de), 73
  
- G-adjacence, 13
- G-symétrie, 12
- générateur, 12
  
- image d'une distance, 17
- intervalle de distance, 16
  
- Local Maximum Criteria (LMC), 3
- Look-Up Table (LUT), 5
  
- masque
  - de chanfrein, 16, 64
  - de Montanari, 63
  - minimal, 71
  
- norme, 18
  - de chanfrein, 66
  
- point entier, 11
- prédécesseur, successeur, 44
  
- rayon
  - d'apparition, 28
  - d'une forme, 23
  - de couverture, 22
- représentable (par une distance), 17
- représentant (vecteur), 13
  
- serrure, 28
- serrure maximale, 53
  
- unimodulaire, 18
  
- visible, 13
- $R$ -voisinage, 6, 23
- $R$ -voisinage minimum  $\mathcal{T}(R)$ , 24
- voisinage minimum  $\mathcal{T}$ , 25



# Bibliographie

- [ACKO88] L. J. Aupperle, H. E. Conn, J. M. Keil, and J. O'Rourke. Covering orthogonal polygons with squares. In *Proceedings of the 26th Annual Allerton Conf. Comm. Control Comput.*, pages 97–106, 1988.
- [AdB88] Carlo Arcelli and Gabriella Sanniti di Baja. Finding local maxima in a pseudo-euclidian distance transform. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 43(3):361–367, 1988.
- [Alf05] J.L. Ramírez Alfonsín. *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford University Press, 2005.
- [BGKW95] H. Breu, J. Gil, D. Kirkpatrick, and M. Werman. Linear time Euclidean distance transform algorithms. *IEEE Trans. on PAMI*, 17(5):529–533, 1995.
- [Blu67] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380, Cambridge, 1967. MIT Press.
- [Blu70] L. M. Blumenthal. *Theory and Applications of Distance Geometry (Oxford University Press 1953)*. Chelsea Publ. Co., Bronx, NY, 2nd edition, 1970.
- [BM98] M.A. Butt and P. Maragos. Optimum design of chamfer distance transforms. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 7(10):1477–1484, Oct 1998.
- [BN95] G. Borgefors and I. Nyström. Quantitative shape analysis of volume images – reducing the set of centres of maximal spheres. In *Proc. SSAB Symposium on Image Analysis*, pages 5–8, Linköping, Sweden, March 1995.
- [BN97] G. Borgefors and I. Nyström. Efficient shape representation by minimizing the set of centres of maximal discs/spheres. *Pattern Recognition Letters*, 18:465–472, 1997.
- [Bor84] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 27:321–345, 1984.
- [Bor86] G. Borgefors. Distance transformations in digital images. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 34:344–371, 1986.
- [Bor93] G. Borgefors. Centres of maximal disks in the 5-7-11 distance transform. In *8<sup>th</sup> Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pages 105–111, Tromsø, Norway, 1993.
- [Bor96] G. Borgefors. On digital distance transforms in three dimensions. *Computer Vision and Image Understanding*, 64(3):368–376, 1996.

- [Bou74] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Diffusion C.C.L.S, Paris, 1974.
- [BRSdB91] G. Borgefors, I. Ragnemalm, and G. Sanniti di Baja. The Euclidean Distance Transform : finding the local maxima and reconstructing the shape. In *7<sup>th</sup> Scandinavian Conf. on Image Analysis*, volume 2, pages 974–981, Aalborg, Denmark, 1991.
- [BYBH96] R. Bar-Yehuda and E. Ben-Hanoch. A linear time algorithm for covering simple polygons with similar rectangles. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*, 6(1):79–102, 1996.
- [CHS08] David Coeurjolly, Jérôme Hulin, and Isabelle Sivignon. Finding a minimum medial axis of a discrete shape is NP-hard. *Theoretical Computer Science*, 406(1-2):72–79, 2008.
- [CM07] D. Coeurjolly and A. Montanvert. Optimal separable algorithms to compute the reverse euclidean distance transformation and discrete medial axis in arbitrary dimension. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(3):437–448, mar 2007.
- [CPW93] C.H. Chen, L.F. Pau, and P.S. Wang. *Segmentation Tools in Mathematical Morphology*. World Scientific, 1993.
- [CR94] Joseph C. Culberson and Robert A. Reckhow. Covering polygons is hard. *J. Algorithms*, 17(1):2–44, 1994.
- [Dan80] P.E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and Image Processing*, 14:227–248, 1980.
- [DGB03] F. Dupont, B. Gilles, and A. Baskurt. Progressive transmission of 3d object based on balls and cones union from medial axis transformation. In *ICIP*, pages 797–800, Barcelone, Spain, 2003.
- [DGG03] T.K. Dey, J. Giesen, and S. Goswami. Shape segmentation and matching with flow discretisation. In *Proc. Workshop Alg. Data Structures*, pages 25–36, 2003.
- [EF75] W.J. Ellison and M. Mendès France. *Les nombres premiers*. Hermann, 1975.
- [Egg58] H.G. Eggleston. *Convexity*. Cambridge Univ. Press, 1958.
- [HBK02] M. Hisada, A.G. Belyaev, and T.L. Kunii. A skeleton-based approach for detection of perceptually salient features on polygonal surfaces. In *Computer Graphics Forum*, volume 21, pages 689–700, 2002.
- [Hir96] T. Hirata. A unified linear-time algorithm for computing distance maps. *Information Processing Letters*, 58(3):129–133, May 1996.
- [HT06] J. Hulin and E. Thiel. Chordal axis on weighted distance transforms. In *13<sup>th</sup> DGCI*, volume 4245 of *LNCS*, Springer-Verlag, pages 271–282, Szeged, Hungary, Oct 2006.
- [HT09a] J. Hulin and E. Thiel. Appearance Radii in Medial Axis Test Mask for Small Planar Chamfer Norms. In *15<sup>th</sup> DGCI, Discrete Geometry for Computer Image*, volume 5810 of *Lectures Notes in Computer Science*, pages 434–445, Montréal, Canada, Sept 2009.



- 
- [HT09b] J. Hulin and E. Thiel. Farey Sequences and the Planar Euclidean Medial Axis Test Mask. In *13<sup>th</sup> IWCIA, International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, volume 5852 of *Lectures Notes in Computer Science*, pages 82–95, Cancun, Mexico, Nov 2009.
- [HT09c] J. Hulin and E. Thiel. Visible vectors and discrete euclidean medial axis. *Discrete and Computational Geometry*, 42(4):759–773, 2009.
- [HW78] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, fifth edition, October 1978.
- [JM95] K. Jansen and H. Müller. The minimum broadcast time problem for several processor networks. *Theoretical Computer Science*, 147(1–2):69–85, 7 August 1995.
- [Kei97] J. Mark Keil. Polygon decomposition. In J. E. Goodman and J. O’Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 1997.
- [Kis96] C.O. Kislman. Regularity properties of distance transformations in image analysis. *Computer Vision and Image Understanding*, 64(3):390–398, Nov 1996.
- [KR04] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Image Analysis*. Morgan Kaufmann, August 2004.
- [Lat91] J.-C. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.
- [Mat88] G. Matheron. Examples of topological properties of skeletons. In J. Serra, editor, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume 2 : Theoretical Advances, pages 217–238, Londres, 1988. Academic Press.
- [MF05] G. Malandin and C. Fouard. On optimal chamfer masks and coefficients. *Research report 5566, INRIA*, 2005.
- [Mon68] U. Montanari. A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance. *Journal of ACM*, 15:600–624, 1968.
- [ND97] F. Nilsson and P.E. Danielsson. Finding the minimal set of maximum disks for binary objects. *Graphical Models and Image Processing*, 59(1):55–60, 1997.
- [NÉ08] N. Normand and P. Évenou. Medial axis lut computation for chamfer norms using H-polytopes. In *DGCI*, pages 189–200, 2008.
- [NÉ09] N. Normand and P. Évenou. Medial axis lookup table and test neighborhood computation for 3d chamfer norms. *Pattern Recogn.*, 42(10):2288–2296, 2009.
- [OLD00] C.D. Olds, A. Lax, and G. Davidoff. *The geometry of numbers*, volume 41 of *The Anneli Lax New Math. Library*. The Math. Assoc. of America, 2000.
- [Pit67] M.L.V. Pitteway. Algorithm for drawing ellipses or hyperbolae with a digital plotter. *Computer Journal*, 10(3):282–289, Oct 1967.
- [PR67] J.L. Pfaltz and A. Rosenfeld. Computer representation of planar regions by their skeletons. *Comm. of ACM*, 10:119–125, feb 1967.

- [Rag90] I. Ragnemalm. Contour processing distance transforms. In Cantoni et al., editors, *Progress in Image Analysis and Processing*, pages 204–212. World Scientific, 1990.
- [RB93] I. Ragnemalm and G. Borgefors. *The Euclidean Distance Transform*, chapter Towards a minimal shape representation using maximal discs, pages 245–260. Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations No. 304., Linköping University, apr 1993.
- [Rem01] E. Remy. *Normes de chanfrein et axe médian dans le volume discret*. Thèse de Doctorat, Univ. de la Méditerranée, Aix-Marseille 2, Dec 2001.
- [RP66] A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *Journal of ACM*, 13(4):471–494, 1966.
- [RT02] E. Rémy and E. Thiel. Medial Axis for Chamfer Distances: computing LUT and Neighbourhoods in 2D or 3D. *Pattern Recognition Letters*, 23(6):649–661, 2002.
- [RT05] E. Rémy and E. Thiel. Exact Medial Axis with Euclidean Distance. *Image and Vision Computing*, 23(2):167–175, 2005.
- [SCdAL09] André Vital Saúde, Michel Couprie, and Roberto de Alencar Lotufo. Discrete 2D and 3D euclidean medial axis in higher resolution. *Image Vision Comput.*, 27(4):354–363, 2009.
- [SdBT96] G. Sanniti di Baja and E. Thiel. A skeletonization algorithm running on path-based distance maps. *Image and Vision Computing*, 14(1):47–57, Feb 1996.
- [SHB99] M. Sonka, V. Hlavac, and R. Boyle. *Image Processing, Analysis and Machine Vision*. PWS Publishing, Pacific Grove, second edition, 1999.
- [SP08] K. Siddiqi and S.M. Pizer. *Medial Representations*, volume 37 of *Comp. Imaging and Vision*. Springer, 2008.
- [Tam87] R. Tamassia. On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends. *SIAM J. Comput.*, 16(3):421–444, june 1987.
- [TC07] E. Thiel and D. Coeurjolly. Distances discrètes. In D. Coeurjolly, A. Montanvert, and JM. Chassery, editors, *Traité IC2, Géométrie discrète et images numériques*, chapter 5, pages 127–150. Hermès, 2007. ISSN 978-2-7462-1643-3.
- [Thi94] E. Thiel. *Les distances de chanfrein en analyse d’images : fondements et applications*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, Sept 1994. <http://www.lif.univ-mrs.fr/~thiel/these>.
- [Thi01] E. Thiel. *Géométrie des distances de chanfrein*. HDR, Univ. de la Méditerranée, Aix-Marseille 2, Déc 2001. <http://www.lif.univ-mrs.fr/~thiel/hdr>.
- [Vaz01] V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer, 2001.
- [Ver91] J.H. Verwer. *Distance transforms: metrics, algorithms and applications*. PhD thesis, Technische Universiteit, Delft, 1991.

## Résumé

L'axe médian est un outil géométrique largement utilisé dans de nombreux domaines de l'analyse d'image. En géométrie discrète, l'axe médian d'une forme  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$  est l'ensemble des centres des boules maximales de  $\mathcal{S}$ , une boule étant maximale dans  $\mathcal{S}$  si elle n'est incluse dans aucune autre boule incluse dans  $\mathcal{S}$ . Les propriétés de l'axe médian ainsi que son calcul sont étroitement liés à la famille de distance utilisée pour définir les boules. Dans ce mémoire, nous proposons plusieurs contributions, théoriques et algorithmiques, pour les distances les plus utilisées dans le domaine, à savoir la distance euclidienne et les normes de chanfrein : nous donnons une caractérisation des normes de chanfrein ; nous étudions le voisinage de test nécessaire et suffisant pour le calcul de l'axe médian discret, pour la distance euclidienne et les normes de chanfrein  $5 \times 5$  ; enfin, nous prouvons que trouver une couverture minimum d'un objet discret par des boules euclidiennes est NP-difficile.

**Mots-clés:** axe médian, boule, distance euclidienne, normes de chanfrein.

## Abstract

The medial axis is a geometric tool widely used in image analysis. In discrete geometry, the medial axis of a shape  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}^n$  is the set of centres of the maximal balls of  $\mathcal{S}$ , a ball being maximal in  $\mathcal{S}$  if it is not included in any other ball included in  $\mathcal{S}$ . The properties of the medial axis, and its computation, depend on the considered metric. In this thesis, we propose theoretical and algorithmic contributions for the most popular metrics used in the domain, the Euclidean distance and the chamfer (or weighted) norms: we give a characterization of the chamfer norms; we study the test neighbourhood necessary and sufficient to compute the medial axis, for the Euclidean distance and the  $5 \times 5$  chamfer norms; finally we prove that finding a minimum covering of a discrete shape with Euclidean balls is an NP-hard problem.

**Keywords:** medial axis, ball, Euclidean distance, weighted norms.

