

# APPROXIMATIONS DISCRETES DE LA DISTANCE EUCLIDIENNE

Edouard THIEL ; Annick MONTANVERT

Equipe RFMQ - TIM3 - IMAG  
USRB 00690  
Université Joseph Fourier  
CERMO BP 53X  
38041 GRENOBLE CEDEX  
FRANCE  
tél. (33) 76 51 48 13  
fax : (33) 76 51 49 48  
email : montanv@imag.imag.fr

## Résumé :

Cet article traite des distances discrètes dans  $\mathbb{Z}^2$ . Il s'intéresse aux distances efficaces en termes de calcul et de stockage, à savoir les distances du chanfrein. Les principes inhérents au calcul de l'image de distance induisent des propriétés locales, arithmétiques et géométriques sur cette image et sur la structure des boules discrètes construites. Nous démontrons ces propriétés, qui sont liées aux droites discrètes ; puis nous donnons un procédé de calcul de masques de chanfrein de taille quelconque, assurant une erreur minimale par rapport à la distance euclidienne et une quasi-isotropie.

## Mots clés :

Analyse d'images - Distance discrète - Distance du chanfrein - Représentation de formes - Géométrie discrète.

# 1 - Introduction

Dans le domaine de l'analyse d'images, la notion de *distance discrète* est utile pour quantifier et décrire les objets présents dans l'image. Nous développons cette notion au § 2.1, et présentons les métriques usuelles dans le maillage carré  $\mathbb{Z}^2$ . Nous abandonnons la distance euclidienne (§ 2.2) au profit de distances du type chanfrein (§ 2.3).

Nous rappelons ensuite les méthodes classiques de calcul de distance sur une image au § 3, qui peuvent être extrêmement performantes dans le cas des chanfreins (§ 3.3).

Ces distances de chanfrein présentent des propriétés locales, arithmétiques et géométriques intéressantes. Nous donnons la définition de leur masque (§ 4.1), et présentons au § 4.2 les boules de ces métriques, qui donnent une ouverture vers la topologie discrète. C'est au § 4.3 que l'étude approfondie des images de distance est "perpétrée", avec l'introduction de la notion de *cône d'influence*, et la démonstration de deux nouveaux théorèmes sur l'interaction des coefficients du masque.

L'intérêt majeur de cette famille de distances est de pouvoir approcher la distance euclidienne, de façon à garantir l'isotropie. Le choix des coefficients du masque est abordé de façon intuitive au § 5.1.1, puis par excès inverse au § 5.1.2 avec la méthode de Borgefors. Les propriétés découvertes au § 4.3 nous permettent de présenter une nouvelle approche plus souple (§ 5.1.2). Nous comparons ces deux méthodes au § 5.2 dans la construction de deux nouveaux masques, dont l'un de grande taille.

## 2 - Distances discrètes

### 2.1 - Définition

**Définition :** On appelle **distance discrète** sur un ensemble  $\mathbb{E}$  une application  $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{N}$  avec des résultats entiers, vérifiant :  $\forall P, Q, R \in \mathbb{E}$

- définie positive :  $d(P, Q) \geq 0$  ;  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
- symétrique :  $d(P, Q) = d(Q, P)$
- inégalité triangulaire :  $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$

Les distances de base utilisées dans  $\mathbb{Z}^2$  sont :

$$\begin{aligned} d_4(P, Q) &= |x_p - x_q| + |y_p - y_q| && \text{"City block distance", "distance de Manhattan"} \\ d_8(P, Q) &= \max(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|) && \text{"Chessboard distance", "distance de l'échiquier"} \end{aligned}$$

Ces métriques sont relatives également à la connexité entre points d'une image (§ 4.2), et leurs boules sont respectivement un losange et un carré. Les résultats qui leur sont associés sont ainsi très éloignés de la distance euclidienne (41% d'erreur relative pour  $d_4$ , et 29% pour  $d_8$ ).

En particulier, ces distances ne sont pas du tout isotropes, ce qui peut être gênant et source potentielle d'erreurs dans certaines applications (§ 6).

### 2.2 - Tant pis pour Euclide

La distance euclidienne dans  $\mathbb{Z}^2$  s'écrit :  $d_E(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$ .

Malheureusement cette distance a des résultats réels ; on ne voudra pas s'en servir ici car le support des images que l'on utilise est une matrice d'entiers. On ne peut pas non plus fabriquer de distance entière à partir de  $d_E$  : ni  $(d_E)^2 \in \mathbb{Z}$ , ni  $int(d_E)$ ,  $round(d_E)$ ,  $int(d_E * 10^6)$ , etc, ne forment une fonction de distance (elles ne respectent pas l'inégalité triangulaire).

On rencontre aussi des problèmes de stockage pour  $d_E$  : pour retenir la distance d'un point P au bord d'un objet, on conserve  $(d_E)^2$  sur un entier long (32 bit), où les coordonnées (x,y) du plus proche point de P dans cet objet, sur 2 entiers (2\*16 bits), ce qui double l'espace mémoire nécessaire et change la représentation habituelle des images. On reproche enfin à la distance euclidienne son temps de calcul coûteux (§ 3).

Pour ces raisons, nous allons essayer de construire au § 4 des distances discrètes efficaces en termes de précision, de stockage et de temps de calcul, et qui soient le plus isotropes possibles. Devant les problèmes soulevés par  $d_4$ ,  $d_8$  et  $d_E$ , nous essaierons de "pousser" les distances de type chanfrein, en nous référant à  $d_E$  comme critère d'isotropie, et uniquement pour cela.

## 2.3 - Masques de chanfrein

Pour  $d_4$  et  $d_8$ , à chaque déplacement élémentaire a été associé un coût de 1, alors que certains déplacements sont vers les voisins directs et d'autres vers les voisins indirects (figure 2.1-a,b). Aussi, il semble naturel de pondérer un déplacement élémentaire par une valeur significative du déplacement euclidien réalisé.

L'approche la plus intuitive consiste à fixer la valeur 1 pour un déplacement en 4-voisinage, et  $\sqrt{2}$  pour un déplacement diagonal (figure 2.1-c), voire d'autres déplacements : Montanari [68] a ainsi eu l'idée de pondérer d'autres déplacements dans des voisinages plus grands, avec par exemple 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$  (figure 2.1-d). La distance qu'il obtient en prenant le chemin minimum d'un point à un autre, formé des déplacements autorisés, peut donc en théorie approcher  $d_E$  autant qu'on le souhaite. Mais un tel calcul est complexe entre deux points (il donne la formule analytique), et coûteux sur toute une image.

Comme cette distance n'est pas entière, Borgefors [84,86] a eu l'idée d'approcher les valeurs 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$ , etc, avec des fractions, par exemple  $(1, \sqrt{2})$  par  $(1, 4/3)$ , ou  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})$  par  $(1, 7/5, 11/5)$  (figure 2.1-e,f).

Le principe des distances de chanfrein  $d_C$  est donc de pondérer les déplacements dans un voisinage donné avec des entiers.

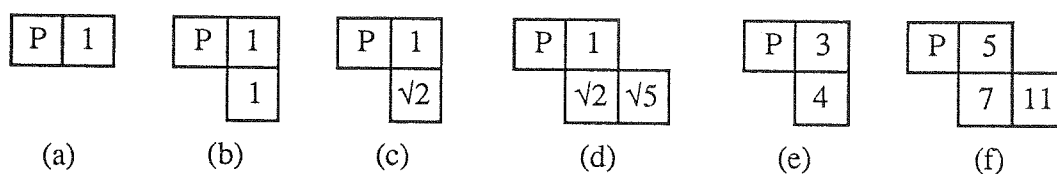


Figure 2.1 : pondérations locales.

A la figure 2.1, la distance définie par le masque (e) se dit *chanfrein 3-4*, et pour (f) se dit *chanfrein 5-7-11*. Le calcul de la distance entre deux points P et Q ne s'opère pas ici de façon analytique, mais en générant toutes les valeurs intermédiaires de P à Q. On commence par centrer le masque en P, et on affecte les pondérations du masque dans le voisinage de P. Puis on remplit les points X non affectés par le masque (ligne à ligne, ou colonne par colonne) de P à Q. La valeur que l'on retient en un point X est obtenue en centrant le masque en X, et en cherchant le minimum de la somme de chaque pondération du masque avec le point image correspondant, s'il est déjà affecté (figure 2.2).

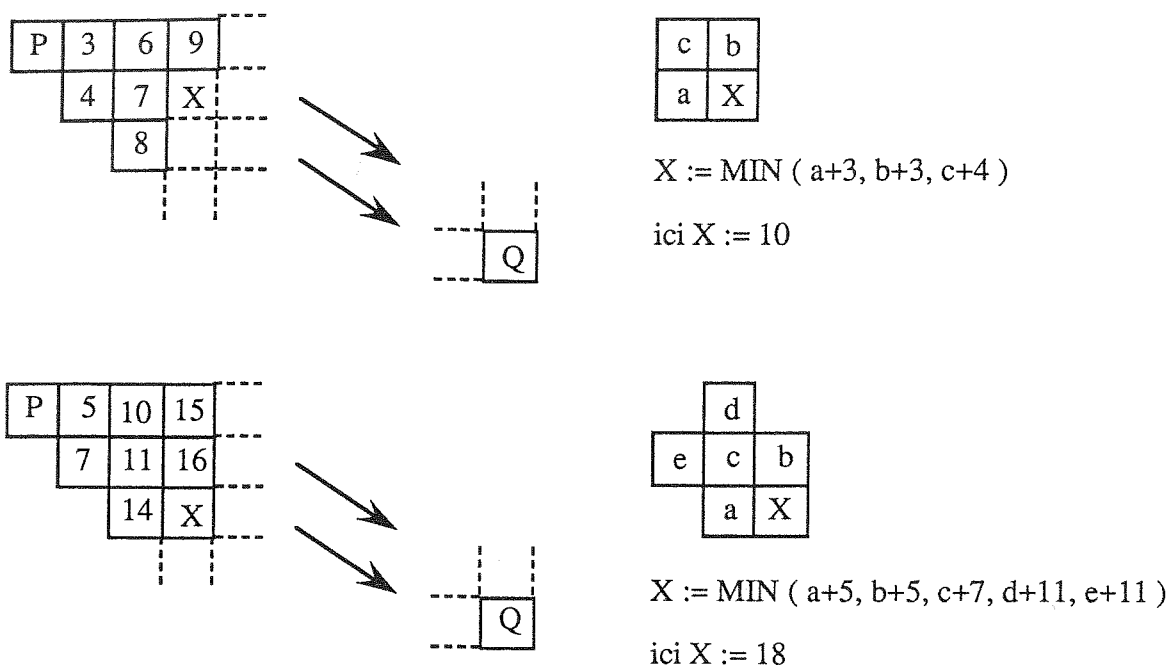


Figure 2.2 : calcul de la distance de chanfrein entre deux points P et Q.

### 3 - Image des distances au fond

On appelle **image des distances au fond** l'image telle que la valeur attribuée en tout point P est égale à la distance de P au complémentaire. L'introduction de concept d'image de distance permet de souligner deux aspects importants. En premier lieu à partir d'une image on construit une autre image ; en second lieu les valeurs calculées avec  $d_4$ ,  $d_8$  et  $d_C$  sont des entiers naturels. L'image des distances est donc une image en niveaux de gris (figure 3.1).

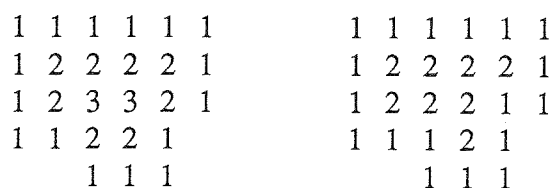


Figure 3.1 : Image des distances au fond avec  $d_4$  à gauche et  $d_8$  à droite.

Ces images de distance sont essentielles en analyse d'images et en description de formes. Le choix d'une distance conditionne les propriétés locales de l'image des distances (§ 4). Nous présentons ci-après des méthodes de calcul des transformations de distance DT.

#### 3.1 - Parcours exhaustif

Une approche naïve consiste à calculer les valeurs en chaque point de DT par **consultation exhaustive** de l'image originale pour la recherche du minimum. Autrement dit pour chaque point de DT on va consulter tous les autres points du fond de l'image, ce qui est extrêmement coûteux en temps de calcul ( en  $O(n^4)$  ).

Le seul intérêt de cet algorithme réside dans le fait que la distance choisie peut être quelconque, et en particulier la distance euclidienne (avec une structure de données particulière, cf § 2.2). Cependant nous montrons dans la suite qu'il existe des schémas algorithmiques bien moins coûteux, de type parallèle ou séquentiel, qui permettent de calculer des images de distance pour  $d_4$ ,  $d_8$  et  $d_C$ , et nous montrons que  $d_C$  peut approximer  $d_E$  autant que souhaité avec des fractions d'entiers.

### 3.2 - Calcul parallèle

Cette approche est mise en œuvre par une propagation sur les contours de l'objet. On initialise le bord de l'objet à 1, puis à chaque étape on étiquette le contour de l'objet formé par les points non traités (figure 3.2).

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & * & * & * & * & 1 & \rightarrow & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & \\
 1 & * & * & * & * & 1 & \rightarrow & 1 & 2 & * & * & 2 & 1 & \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & \\
 1 & 1 & * & * & 1 & & & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & & & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 & 1 & 
 \end{array}$$

Figure 3.2 : Parcours parallèle avec  $d_4$ .

Cet algorithme est massivement parallélisable, et par là même bien plus efficace que le parcours exhaustif (§ 3.1). Il s'écrit facilement pour  $d_4$  et  $d_8$ , et se formalise pour les chanfreins. Le nombre d'itérations dépend de l'épaisseur de l'objet, et le temps de calcul est en  $O(n^3)$ . On note que Yamada [84] a développé par une approche similaire une méthode de calcul de  $d_E$ . On préférera cependant des algorithmes où le nombre de passage sur l'image est fixe, car ceux-ci sont plus performants sur des machines séquentielles (§ suivant).

### 3.3 - Calcul séquentiel

L'algorithme parallèle du § 3.2 peut se reformuler avec des masques de la figure 3.3 :

$$m_4 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \quad m_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad m_{3-4} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad m_{5-7-11} = \begin{pmatrix} & 11 & & 11 & \\ 11 & 7 & 5 & 7 & 11 \\ & 5 & 0 & 5 & \\ 11 & 7 & 5 & 7 & 11 \\ & 11 & & 11 & \end{pmatrix}$$

Figure 3.3 : masques de  $d_4$ ,  $d_8$ ,  $d_{3-4}$  et  $d_{5-7-11}$ .

Sur une machine séquentielle (Rosenfeld [66], Borgefors [84]) on décompose le masque en deux demi-masques symétriques par rapport à O, chacun servant pour un balayage. Le *demi-masque avant* commence *après* le milieu P dans le *sens du balayage*. Ses points  $M[i]$  ont les coordonnées  $(M[i].x, M[i].y)$  et le poids  $M[i].p$ . Le demi-masque arrière est donc constitué des points  $(-M[i].x, -M[i].y)$  de poids  $M[i].p$  (figure 3.4).

$$\begin{array}{ccc}
 \rightarrow x & & \\
 \downarrow & m = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \rightarrow m_{av} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & \end{pmatrix} \quad m_{ar} = \begin{pmatrix} & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 y & 3-4 & 
 \end{array}$$

Figure 3.4 : décomposition d'un masque en deux.

La construction de DT est décrite ci-après. Pic est une matrice de taille  $y_{max} \times x_{max}$ .

**Parcours avant** : de haut en bas et de gauche à droite  
 pour y de 1 à  $y_{max}$  faire  
 pour x de 1 à  $x_{max}$  faire  
 si  $Pic[x,y] \neq 0$   
 alors  $Pic[x,y] := \text{MIN}_i \{ Pic[x-M[i].x,y-M[i].y] + M[i].p \}$

**Parcours arrière** : de bas en haut et de droite à gauche  
 pour y de  $y_{max}$  à 1 faire  
 pour x de  $x_{max}$  à 1 faire  
 si  $Pic[x,y] \neq 0$   
 alors  $Pic[x,y] := \text{MIN}_i \{ Pic[x,y], Pic[x+M[i].x,y+M[i].y] + M[i].p \}$

Cet algorithme est très efficace (en  $O(n^2)$ ), puisqu'il ne nécessite que deux consultations par point de l'image, et ce sur un voisinage restreint du point (Rosenfeld [66]). Il nous intéresse tout particulièrement pour les masques de chanfrein (figure 3.5). A noter le "facteur d'échelle" imposé par le premier coefficient du masque (§ 5.1) :

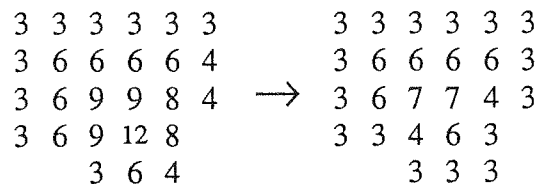


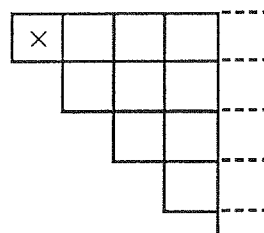
Figure 3.5 : DT avec chanfrein 3-4 en 2 balayages séquentiels.

Il existe un calcul séquentiel de  $d_E$  [Danielsson 80], par aller-retour sur les lignes, mais certaines configurations de points fond (cônes aigus) provoquent des erreurs.

## 4 - Etude des chanfreins

### 4.1 - Définition du Masque

Nous limitant à des masques symétriques par rapport à O, (Ox), (Oy), nous appelons **générateur** d'un masque le premier octant de celui-ci :

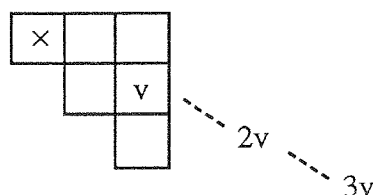


Définition :

- On appelle *point visible* un point de coordonnées (x,y) telles que  $\text{pgcd}(x,y) = 1$  (avec la convention  $\text{pgcd}(0,a) = a$ ).

- Le poids affecté à un point du masque est nommé *pondération locale*.

Un point v du masque engendre par translation les valeurs  $2v, 3v, \dots$  :



Dans cet exemple,  $v(2,1)$  est un point visible, mais pas  $2v, 3v, \dots$ , suite de points que nous appellerons *périodes*. Un masque ne sera donc constitué que de points visibles, car une pondération locale placée sur la période d'une autre alourdirait inutilement l'extraction des MIN dans l'algorithme de 3.3.

On note  $a, b, c, \dots$  les points visibles du masque, dans l'ordre croissant de leur distance euclidienne par rapport au centre  $x$ . Cela ne correspond pas à un parcours lignes/colonnes du masque, comme on le constate pour  $l$  et  $k$  sur la figure 4.1 :

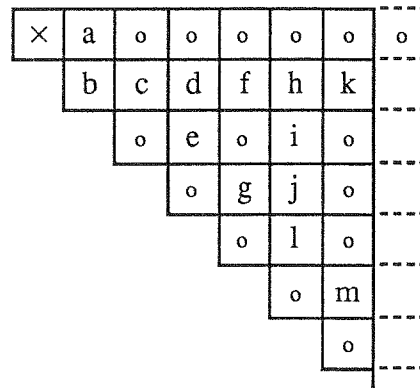


Figure 4.1 : Points visibles.

Nous donnons maintenant la structure générale d'un masque de chanfrein :

Définition : Le générateur d'un masque de chanfrein est tel que :

- (1) il possède au moins les points  $a$  et  $b$  ;
- (2) il ne comporte que des points visibles ;
- (3) ses pondérations locales vérifient les inégalités :

$$\begin{array}{ll} a < b < 2a & c+a < e < c+b \\ 2a < c < a+b & 4a < f < d+a \\ 3a < d < c+a & \dots \end{array}$$

Remarques :

- Cette définition exclut volontairement les masques de  $d_4$  et  $d_8$  :
  - le générateur du masque de  $d_4$  ne possède qu'un seul point, ce qui ne remplit pas (1) ;
  - pour  $d_8$  on a  $a = b = 1$  ce qui est contraire à (3).

• Les encadrements fixés en (3) font respecter les inégalités triangulaires et le théorème de la projection entre les points du masque ; on suppose ces conditions suffisantes pour qu'il en soit de même dans tout le plan, de telle sorte qu'un masque de chanfrein induise bien une métrique discrète. Pour établir des conditions nécessaires et suffisantes ainsi qu'une démonstration rigoureuse, il faudrait rechercher la formule analytique générale des distances du chanfrein ; nous apportons quelques éléments de réponse au § 4.3.

On note "chanfrein  $a-b-c-\dots$ " un tel masque, en remplaçant  $a, b, c, \dots$  par leur valeur, ou par "o" si le point correspondant n'est pas affecté. En effet, on est libre de ne pas pondérer certains points visibles parmi  $c, d, e, \dots$ , tout en conservant la validité de la définition du chanfrein. Ces choix éventuels vont conférer certaines propriétés à la distance discrète ainsi obtenue, propriétés que l'on étudie dans la suite. Nous allons aussi montrer que ces distances sont des combinaisons linéaires de  $d_4$  et  $d_8$  *dépendant du cône d'influence* où l'on se trouve [Thiel 91b].

## 4.2 - Boules

### 4.2.1 - Métriques de base

Les boules unité pour  $d_4$  et  $d_8$  sont  $\begin{matrix} 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$  pour  $d_4$  et  $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$  pour  $d_8$ .

Ces métriques tirent en fait leur nom de leur nombre de voisins. Elles donnent de plus lieu à des propriétés intéressantes sur les images de distance. En appelant **lacet i-connexe** une suite de points voisins 2 à 2 pour  $d_i$ , et **courbe** un lacet fermé avec exactement 2 voisins par point, on remarque que les courbes de niveau sur DT *ne sont pas* des courbes, mais des lacets.

Un autre point à souligner est la **dualité** de  $d_4$  et  $d_8$  en terme de connexité pour le théorème de Jordan : le bord d'un ensemble X pour  $d_i$ , qui est le sous-ensemble des points de X qui sont à la distance 1 du fond pour  $d_i$ , est *12-i connexe*.

### 4.2.2 - Chanfrein

On peut obtenir une boule de rayon R pour un masque donné en appliquant l'algorithme donné au § 3.3 de calcul des distances au fond, sur une image de taille infinie où chaque point est à 1, sauf le centre qui est à 0 ; la boule est alors l'ensemble des points de valeur inférieure ou égale à  $R \cdot a + r$ , où r appartient à  $[0, a-1]$ . Pour un rayon R fixé il y a donc une *famille* de a boules, en faisant varier r (figure 4.2).

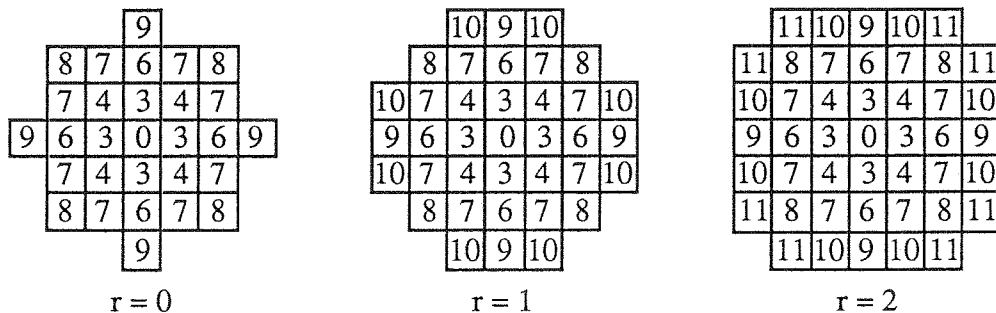


Figure 4.2 : boules de chanfrein 3-4 avec  $R = 3$ .

Un changement fondamental par rapport au § 4.2.1 est la disparition des courbes de niveau ; il vaut maintenant mieux parler d'*intervalles de niveaux*  $[a \cdot n, a \cdot (n+1)[$ . Ceux-ci peuvent être à la fois 4 ou 8-connexes, propriété que l'on dénomme "être \*-connexe".

Le fait qu'il y ait plusieurs boules par rayon induit un passage *progressif* d'un rayon R au rayon R+1. Cette possibilité est intéressante en animation (anti-aliassage); elle donne de plus un moyen pour simuler une **nouvelle topologie discrète**, où les ouverts seraient formés par ces boules arithmétiques.

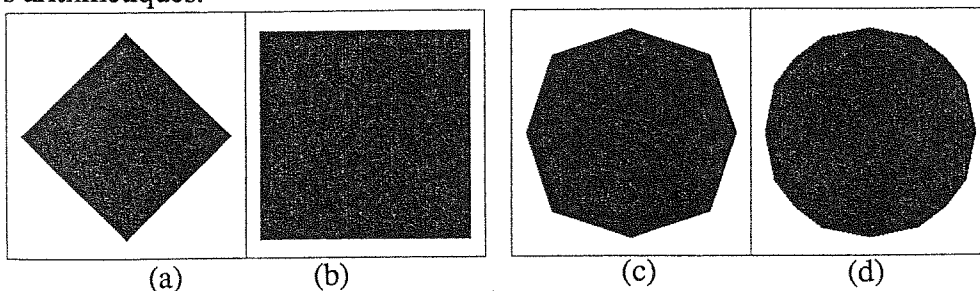


Figure 4.3 : (a)  $d_4$  (b)  $d_8$  (c) chanfrein 3-4 (d) chanfrein 5-7-11.



### 4.3 - Cône d'influence dans une boule

L'allure générale des boules obtenues au § précédent est un parallélogramme pour  $d_4$ , un carré pour  $d_8$ , un octogone pour chanfrein 3-4, un hexadécagone pour chanfrein 5-7-11, etc (figure 4.3). A mesure que l'on enrichit le masque, le nombre de côtés de ces polygones augmente. Nous allons étudier d'où provient ce phénomène.

On étudie l'algorithme 3.3 de calcul des distances, qui donne à un point le *minimum* des valeurs affectées aux points alentours augmentées des pondérations locales. Dans l'exemple de la figure 4.4 nous avons noté dans le haut de chaque case la ou les provenances possibles parmi 5, 7 et 11 de ces minimums, avec chanfrein 5-7-11 :

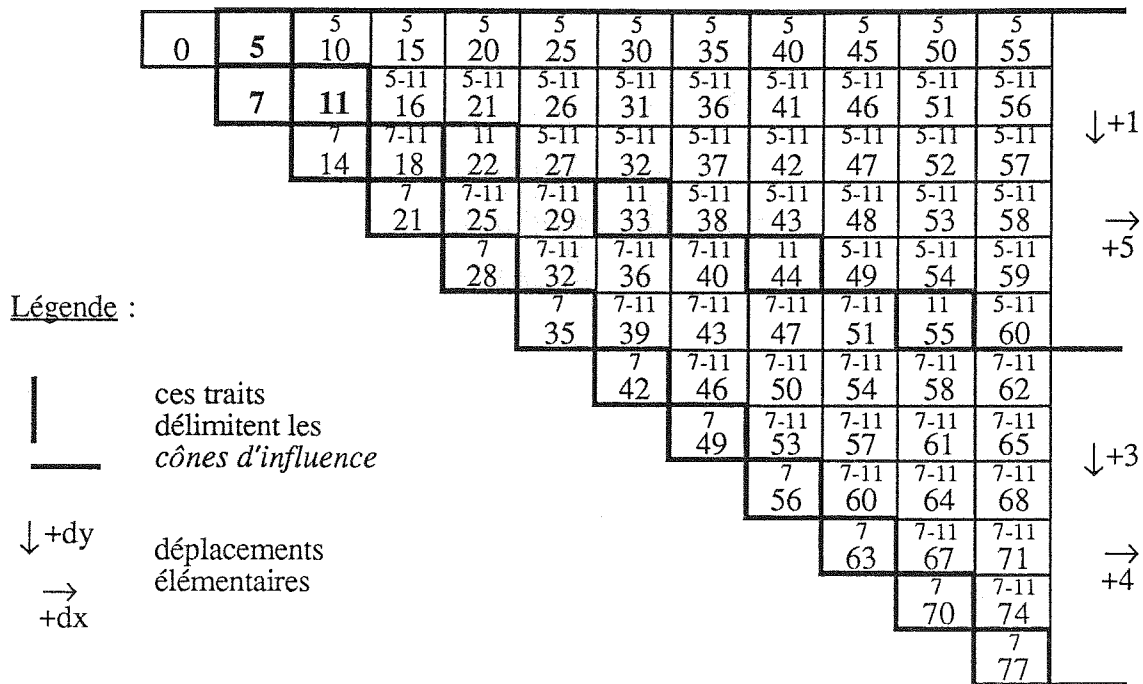


Figure 4.4 : Cônes d'influence de chanfrein 5-7-11.

#### Dans le cas général :

On renomme  $M_1, M_2, \dots$  les  $n$  points affectés du générateur d'un masque de chanfrein, en les ordonnant suivant l'ordre croissant de leur angle avec la demi-droite (Ox). On note  $|M_i|$  le poids et  $\|M_i\| = \sqrt{(x^2+y^2)}$ .

Sachant que pour deux points du premier octant  $P(x_1, y_1)$  et  $Q(x_2, y_2)$  on a :

$$\angle(Ox, OP) < \angle(Ox, OQ) \Leftrightarrow y_1 \cdot x_2 < y_2 \cdot x_1$$

on obtient pour le chanfrein 3-4 :  $|M_1| = 3, |M_2| = 4$ , noté 3/4.

De même, d'après leur position donnée au § 2.1 :

- 5-7-11 → 5/11/7
- 12-17-o-38-43 → 12/38/o/43/17
- a-b-c-d-e-f-g-h-i-j-k-l-m → a/k/h/f/d/i/c/j/e/g/l/m/b

Définition: On appelle *cône d'influence* des points  $M_i/M_{i+1}$  le cône délimité par les droites séparatrices (de pixels)  $(O, M_i)$  et  $(O, M_{i+1})$ .

Dans l'exemple précédent (chanfrein 5-7-11), les cônes 5/11 et 11/7 sont délimités par des traits gras. Nous allons maintenant présenter des propriétés essentielles des cônes :

Théorème 1 :

Dans un cône d'influence  $M_i/M_{i+1}$ , les seuls points du masque à intervenir dans la recherche du minimum pour le calcul des distances à O, sont les distances locales  $|M_i|$  et  $|M_{i+1}|$  :

- $|M_i|$  engendre par translation les valeurs  $2|M_i|$ ,  $3|M_i|$ , etc ;
- de même pour  $|M_{i+1}|$  ;
- tous les points strictement compris entre les droites séparatrices  $(O, M_i)$  et  $(O, M_{i+1})$ , et qui sont au-delà du parallélogramme  $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$  sont obtenues par  $M_i$  ou par  $M_{i+1}$ , et ceci de façon équivalente.

Preuve :

- Les déplacements locaux  $|M_i|$  du masque engendrent chacun leur période, car dans la condition (3) de la définition du chanfrein, on impose que la valeur d'une période soit inférieure à toutes les autres combinaisons données par le masque, et le calcul des distances prend justement leur minimum.

- Pour montrer le théorème 1 à l'intérieur d'un cône d'influence  $M_i/M_{i+1}$ , on commence par considérer le parallélogramme discret  $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$ , éventuellement d'intérieur vide, comme illustré à la figure 4.5 :

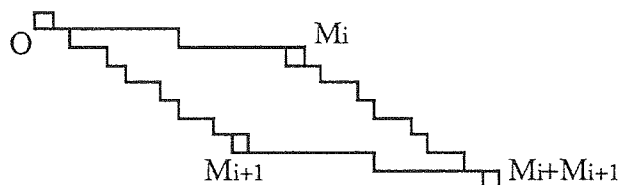


Figure 4.5 : le parallélogramme discret  $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$ .

Les points intérieurs à ce parallélogramme, s'il y en a, sont déterminés par certains points du masque, mais sans être atteints par  $M_i$  ou  $M_{i+1}$  ; dans tous les cas, le point  $M_i+M_{i+1}$  a bien la valeur  $|M_i+M_{i+1}|$  comme minimum.

A partir de là, on translate le parallélogramme et les valeurs de son adhérence discrète dans tout le cône  $M_i/M_{i+1}$  : pour calculer le poids en un point P, il suffit de chercher à quel point X du premier parallélogramme il correspond, et de lui ajouter le nombre de déplacements  $M_i$  et  $M_{i+1}$  nécessaires pour l'atteindre ; donc ce sont bien les distances locales  $|M_i|$  et  $|M_{i+1}|$  qui interviennent dans le cône.

En notant  $A = P - M_{i+1}$  et  $B = P - M_i$  (figure 4.6), on a bien A et B sur le grand parallélogramme qui mène à X ; A et B sont deux points du cône d'influence, et la valeur P est donc bien obtenue de façon équivalente, par  $M_i$  et  $M_{i+1}$  dans la recherche du minimum local, depuis A comme depuis B (à rapprocher de [Montanari 68]).

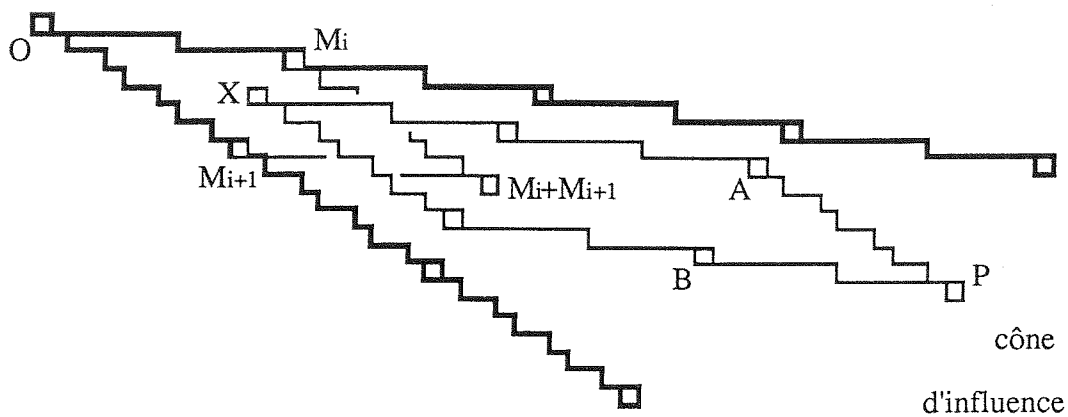


Figure 4.6 : P provient de A comme de B.

Définition :

Les points  $M_i$  et  $M_{i+1}$  sont dits *consécutifs* s'il n'existe pas de point visible P du premier octant tel que :

$$\begin{cases} |P| < \max(|M_i|, |M_{i+1}|) \\ \angle(O_x, OM_i) < \angle(O_x, OP) < \angle(O_x, OM_{i+1}) \end{cases}$$

Si tous les points affectés sont consécutifs, alors le masque est dit *régulier*.

Exemples :

- Dans chanfrein 5-7-11, tous les points sont consécutifs ; ce masque est *régulier*.
- Dans chanfrein 12-17-0-38-43, l'ordre croissant par angles est 12/38/0/43/17; les points 12/38 et 43/17 sont consécutifs mais pas 38/43, car le point c n'a pas été affecté.

Nous allons donner maintenant la loi générale de calcul des règles locales de déplacement, dans un cône d'influence  $M_i/M_{i+1}$ , avec les notations de la figure 4.7 :

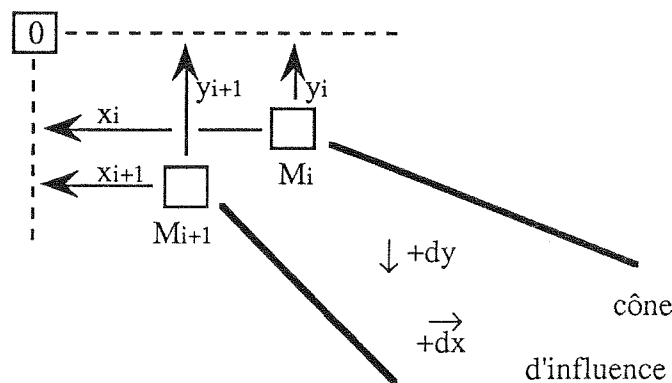


Figure 4.7 : Notations du théorème 2.

Théorème 2 :

Si les points  $M_i/M_{i+1}$  sont *consécutifs*, alors

(a) les déplacements élémentaires  $dx$  et  $dy$  sont constants dans tout l'intérieur du cône d'influence

(b) leurs pondérations sont données par :

$$\begin{aligned} dx &:= y_{i+1} \cdot |M_i| - y_i \cdot |M_{i+1}| \\ dy &:= x_i \cdot |M_{i+1}| - x_{i+1} \cdot |M_i| \end{aligned}$$

Reprenons l'exemple avec le chanfrein 5-7-11 :

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ c\^one } 5/11 \left\{ \begin{array}{l} dx := 1*5 - 0*11 = 5 \\ dy := 1*11 - 2*5 = 1 \end{array} \right. \\ & \bullet \text{ c\^one } 11/7 \left\{ \begin{array}{l} dx := 1*11 - 1*7 = 4 \\ dy := 2*7 - 1*11 = 3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Démonstration du théorème :

- Pour montrer (a) nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1: Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Les points visibles  $M_i/M_{i+1}$  sont consécutifs.
- (ii) Le parallélogramme discret  $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$  est d'intérieur vide.

Preuve du lemme 1: On a le système logique suivant :

- le parallélogramme discret  $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$  n'est pas d'intérieur vide
- $\Leftrightarrow$  le triangle  $(O, M_i, M_{i+1})$  n'est pas d'intérieur vide
- $\Leftrightarrow \exists P \in (O, M_i, M_{i+1})^\circ$
- $\Leftrightarrow \exists P$  tel que  $|P| < \max(|M_i|, |M_i+1|)$  et  $\angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OP) < \angle(Ox, OM_{i+1})$
- $\Leftrightarrow M_i/M_{i+1}$  sont non consécutifs.

Retour à la démonstration de (a) :

D'après le théorème 1, toutes les valeurs  $P$  à l'intérieur du cône  $M_i/M_{i+1}$ , privé du parallélogramme  $(O, M_i, M_{i+1}, M_i+M_{i+1})$  sont égales à des combinaisons linéaires de  $M_i$  et  $M_{i+1}$ , plus un point  $X$  du parallélogramme (cf. figure précédente sur le cône d'influence) ; i.e.  $P = X + u.M_i + v.M_{i+1}$ .

Or ici  $M_i$  et  $M_{i+1}$  sont consécutifs, d'où d'après le lemme 1, le parallélogramme est d'intérieur vide.

Donc  $X$  est égal à un des sommets du parallélogramme, d'où  $P = u'.M_i + v'.M_{i+1}$ .

Autrement dit, tous les points de l'intérieur du cône sont atteints par une combinaison linéaire de  $M_i$  et  $M_{i+1}$ , et donc les différences entre deux points l'un au-dessus de l'autre, ou l'un à côté de l'autre, sont *indépendantes de leur position*, ce qui prouve (a).

- Preuve du (b) : nous allons utiliser une propriété arithmétique des  $M_i$  :

Lemme 2 : Soit  $M_n$  l'ensemble des points visibles consécutifs  $M_i(x_i, y_i)$  tels que  $x_i \leq n$ . Alors les  $y_i/x_i$  forment une suite de Farey  $F_n$  d'ordre  $n$  [H&W, III.3.1] [Montanari 68] .

En effet, les suites de Farey  $F_n$  sont les séries *croissantes* de fractions irréductibles entre 0 et 1, dont les dénominateurs n'excèdent pas  $n$ .

Donc  $(h/k \in F_n) \Leftrightarrow (0 \leq h \leq k \leq n, \text{PGCD}(h,k) = 1)$

Donc  $M_i, M_{i+1}$  sont deux points visibles consécutifs (propriété notée (\*))

$\Leftrightarrow \text{PGCD}(x_i, y_i) = \text{PGCD}(x_{i+1}, y_{i+1}) = 1$  et  $\angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OM_{i+1})$

or  $\angle(Ox, OM_i) < \angle(Ox, OM_{i+1}) \Leftrightarrow y_i \cdot x_{i+1} < y_{i+1} \cdot x_i \Leftrightarrow y_i/x_i < y_{i+1}/x_{i+1}$

donc (\*)  $\Leftrightarrow y_i/x_i$  et  $y_{i+1}/x_{i+1}$  sont deux termes successifs de  $F_n$

D'où le lemme 2.

Construction de  $F_n$ :  $F_1$  est  $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

Propriété [H&W, th.30]: si  $\frac{h}{k} < \frac{h'}{k'}$  alors  $\frac{h}{k} < \frac{h+h'}{k+k'} < \frac{h'}{k'}$  et  $\frac{h+h'}{k+k'} \in F_n$  si  $k+k' \leq n$ .

donc  $F_2: \frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$

$F_3: \frac{0}{1} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1}$

$F_4: \frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1}$

$F_5: \frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$

ce qui correspond bien à a/k/h/f/d/i/c/j/e/g/l/m/b

Retour à la démonstration du théorème 2 :

Pour calculer dx et dy, il faut trouver des couples (s,t) et (u,v) tels que :

$$\begin{cases} s \cdot x_i + t \cdot x_{i+1} = 1 \\ u \cdot y_i + v \cdot y_{i+1} = 1 \end{cases} \text{ pour des déplacements de 1 dans le sens (Ox) ou (Oy).}$$

Or d'après le lemme 2,  $y_i/x_i$  et  $y_{i+1}/x_{i+1}$  sont deux termes successifs d'une suite de Farey, donc d'après le théorème 28 de [H&W], on a toujours  $x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1} = 1$ .

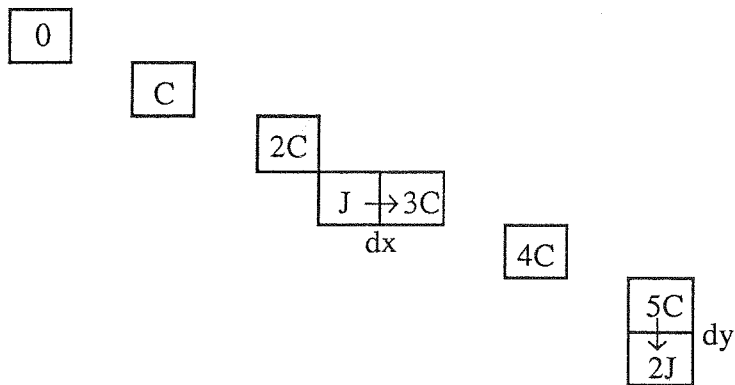
d'où  $\begin{cases} y_{i+1} \cdot x_i - y_i \cdot x_{i+1} = 1 \\ -x_{i+1} \cdot y_i + x_i \cdot y_{i+1} = 1 \end{cases}$  et  $\begin{cases} s = y_{i+1}, t = -y_i \\ u = -x_{i+1}, v = x_i \end{cases}$

Finalement, il vient  $\begin{cases} dx = s \cdot |M_i| + t \cdot |M_{i+1}| = y_{i+1} \cdot |M_i| - y_i \cdot |M_{i+1}| \\ dy = u \cdot |M_i| + v \cdot |M_{i+1}| = -x_{i+1} \cdot |M_i| + x_i \cdot |M_{i+1}| \end{cases}$

Illustration :

Considérons les deux points visibles consécutifs c(2,1) et j(5,3). On a bien  $3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1$

d'où  $\begin{cases} dx = 3 \cdot c - 1 \cdot j \\ dy = 2 \cdot j - 5 \cdot c \end{cases}$



Le théorème 2 est un pas vers l'établissement de la formule analytique des distances du chanfrein. Il faudrait encore caractériser arithmétiquement le point "X" de la figure 4.6, et obtenir une formule directe.

Du théorème 2 on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire : Dans le cône d'influence de deux points consécutifs, les *intervalles de niveaux*  $]n-a, n]$  sont des *droites \*-connexes* (i.e. 4-connexe par endroits, ou 8-connexe par endroits).

Ceci explique la caractéristique déjà remarquée à propos des boules de chanfrein : ce sont des polygones 8-symétriques, dont chaque côté est porté par un cône d'influence. Pour un masque de chanfrein dont le générateur a n points, la boule est un polygone à  $8*(n-1)$  côtés.

Avant d'aborder le calcul et l'optimisation d'un masque à n points, nous devons encore étudier le cas où  $M_i$  et  $M_{i+1}$  ne sont pas consécutifs. Les différents cas de figures que l'on peut imaginer sont bien trop nombreux et particuliers pour être abordés ici ; nous admettrons donc que les dx, dy, qui ne sont plus uniques dans le cône, ont des valeurs périodiques, et que les intervalles de niveaux  $[n-a-t, n]$  sont des droites "épaisses", mais cependant proches d'une droite de Bresenham (un exemple sera étudié au § 5.2.1).

## 5 - Amélioration des chanfreins

### 5.1 - Calcul et optimisation

Le principe de calcul des pondérations pour un voisinage donné est de minimiser l'erreur commise par rapport à la distance euclidienne.

#### 5.1.1 - Première approche

Pour des masques de chanfrein à deux points a et b, l'idée la plus intuitive consiste à approximer  $\sqrt{2}$  avec b/a, par exemple avec les fractions continues :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

En initialisant par  $a := 1$  et  $b := 2$  et en bouclant sur  $b' := 2a+b$ ,  $a' := a+b$  on obtient la série :

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{24}{17}, \frac{58}{41}, \frac{140}{99}, \frac{338}{239}, \frac{816}{577}$$

qui converge très vite vers  $\sqrt{2}$ , mais dont les termes deviennent aussi très grands.

Or en pratique nous travaillons sur des images  $512*512$  codées sur 16 bits (0..65535). Un objet dans cette image ne pourra avoir une épaisseur supérieure à  $512/2 = 256$ , et donc la première pondération devra impérativement être inférieure à  $65535/256$ .

Les valeurs de a que l'on s'autorise seront donc comprises entre 2 et 255.

#### Remarques :

pour  $a = 3$  (avec chanfrein 3-4), un objet de taille maximale dans l'image  $512*512$ , c'est-à-dire d'épaisseur 256, devra être codé sur des nombres jusqu'à  $3*256 = 768$ , ce qui interdit un codage de l'image sur 8 bits. Il en va de même pour des images  $256*256$  ( $128*3 > 2^8$ ).

Pour en revenir aux fractions continues, on dépasse 255 dès le 8<sup>ème</sup> terme (816/577), et le gain réalisé par 140/99 est paradoxalement négatif par rapport à 4/3, comme nous allons le voir par la suite !

Enfin, pour généraliser ce type de méthode à des masques à plus de deux points visibles affectés il faudrait approcher simultanément  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{10}$ , etc, ce qui n'est pas possible.

### 5.1.2 - La solution de G. Borgefors

G. Borgefors propose une approche qui consiste à minimiser le maximum de l'erreur commise sur une droite verticale (le support de l'image étant carrée) [Borgefors 86].

Dans un premier temps, elle cherche à ce que la distance  $d_p$  calculée en un point soit la plus proche possible de la distance euclidienne  $d_E$ , en autorisant des résultats en réels.

Par exemple dans un masque  $3 \times 3$ , on cherchera pour un point  $Q(x,y)$  à minimiser l'erreur :

$$E_p(Q) = d_p(Q) - d_E(Q) = y.b + (x-y).a - \sqrt{x^2+y^2}$$

Dans ce cas, la recherche de la valeur optimale  $b$  pour  $a=1$  est donnée par [Borgefors 84] :

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 1,35070.$$

On notera que cette valeur n'est pas  $\sqrt{2}$ , et que  $4/3 \approx 1,3333$  l'approche bien mieux que  $140/99 \approx 1,4141$ , qui est un autre terme de la suite des fractions continues.

La seconde étape consiste à chercher une approximation fractionnaire de 1,35070, en faisant un compromis entre la précision souhaitée et la taille des nombres  $a, b$ .

Si on supprime la contrainte  $a=1$ , on obtient une minimisation plus fine avec  $a \approx 0,95509$  et  $b \approx 1,36930$  [Borgefors 86], où  $b/a \approx 1,43368$ . Mais  $4/3$  est encore conseillé car le facteur d'échelle n'est pas trop grand.

Le même raisonnement a été appliqué pour des voisinages  $5 \times 5$  et  $7 \times 7$ , où des pondérations supplémentaires (c,d,e) sont ajoutées. Mais les formules à minimiser rendent très vite la méthode lourde (résolution d'équations), et ne permettent pas en pratique de dépasser un voisinage  $7 \times 7$ .

### 5.1.3 - Méthode proposée

Nous proposons ici une autre classe de méthodes qui, tout en nous redonnant les classiques chanfreins 3-4 et 5-7-11 nous permet, comme nous le verrons au § 2.4, de calculer des masques beaucoup plus larges, et fournit même, dans le cas  $7 \times 7$ , un chanfrein plus performant que celui de G. Borgefors (qui est le chanfrein 14-20-31-44).

Les boules de chanfrein étant des polygones, notre idée est d'approximer le cercle euclidien par des polygones les plus réguliers possibles. Cela implique de bien répartir les angles, et de respecter la longueur des rayons.

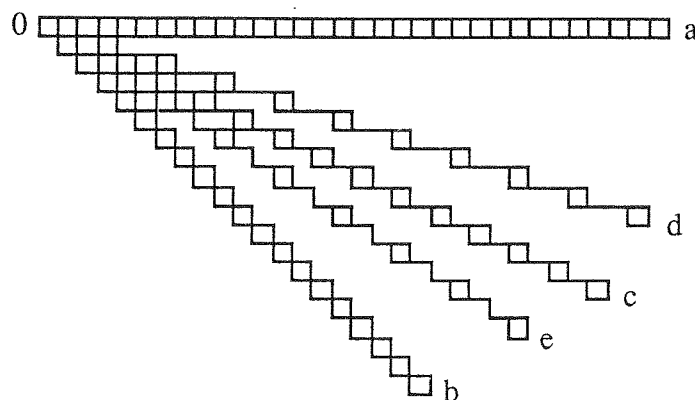


Figure 5.1 : exemple de la répartition des angles.

Comme nous l'avons vu au § 4.3, ce sont les cônes d'influence  $M_i/M_{i+1}$  des points du masque qui portent les côtés du polygone, donc le choix des  $M_i$  parmi les points visibles intervient directement dans la répartition des angles (cf. figure 5.1).

On construit un masque de chanfrein dans un voisinage de taille  $(2n+1)^2$  en deux étapes :

### Première étape.

On commence par considérer l'ensemble  $M_n$  des points visibles dans le premier octant de ce voisinage.

Pour une valeur  $a$  quelconque, les autres points visibles et affectés du masque  $M_i(x_i, y_i)$  devront prendre la valeur  $|M_i| = [a \cdot \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}]$  ( $a$  est le facteur d'échelle). Il faut donc trouver un  $a$  tel que la partie tronquée  $|M_i| - a \cdot \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} = \text{FRAC}(a \cdot \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)})$  soit la plus petite possible pour chaque coefficient  $M_i$  du masque.

Autrement dit, on doit minimiser le maximum de l'erreur commise entre le poids donné à chaque point, et sa distance euclidienne au centre :

Pour chaque  $a$  de 2 à 255, on calcule la valeur  $E_a$ , qui est le maximum des erreurs des  $M_i$  pour ce  $a$  et ce voisinage.

On classe ensuite les  $E_a$  par ordre croissant, de telle sorte que les  $a$  intéressants soient en tête de liste. Dans la suite nous exposons des résultats de ces classements, sans donner exhaustivement tous les calculs.

### Seconde étape.

La seconde étape s'opère par un choix entre les différents masques proposés en tête de la liste, en fonction des critères suivants :

- On veut respecter un certain ordre de grandeur entre  $a$  et  $n$ . C'est par ce critère que l'on retrouvera 3-4 et 5-7-11.

- Pour des voisinages plus grands (à partir de  $7 \times 7$ ), on s'autorise à supprimer certains points (notés "out"), si leur absence profite à l'allure générale du polygone ; parfois en raison d'une partie fractionnaire de  $a \cdot \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}$  qui est trop importante, mais le plus souvent parce que l'angle que génère ce point est mal conditionné (un exemple illustre cela au § 5.2.1).

Exemple dans un voisinage  $7 \times 7$ , avec  $a = 14$  :

nom	coord.	$d_E$	trunc	frac	
a	(1,0)	a	14	0	
b	(1,1)	$a \cdot \sqrt{2}$	20	-0,201	
c	(2,1)	$a \cdot \sqrt{5}$	31	0,305	← $E_{14}$
d	(3,1)	$a \cdot \sqrt{10}$	44	0,272	
e	(3,2)	$a \cdot \sqrt{13}$	50	0,478	← out
					( $M_i$ )

C'est dans l'optique d'une simple minimisation dans  $\mathbb{R}^2$  que G.Borgefors a supprimé le point e, dont l'erreur (0,478) a été jugée trop importante. En effet, elle s'attache avant tout à minimiser des erreurs dans l'espace *continu*  $\mathbb{R}^2$ , ce qui ne correspond pas forcément à la minimisation des erreurs dans l'espace *discret*  $\mathbb{Z}^2$ .

C'est pour cela que nous nous plaçons *directement* dans  $\mathbb{Z}^2$ , afin de minimiser les erreurs *effectives*.

Mais notre approche insiste avant tout sur la *répartition des angles*. Dans le paragraphe suivant, nous allons voir sur un cas précis que ce critère peut effectivement être prépondérant.



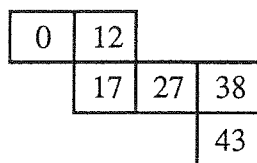
## 5.2 - Nouveaux chanfreins

### 5.2.1 - Optimisation d'un masque 7\*7

La première étape du §5.1.3 nous donne en tête de la liste  $a = 12$ , avec  $E_{12} = 0,267$  :

nom	coord.	$d_E$	trunc	frac
a	(1,0)	a	12	0
b	(1,1)	$a\sqrt{2}$	17	-0,029
c	(2,1)	$a\sqrt{5}$	27	-0,167
d	(3,1)	$a\sqrt{10}$	38	-0,053
e	(3,2)	$a\sqrt{13}$	43	0,267 $\leftarrow E_{12}$

Le masque s'écrit donc :



On calcule ensuite les déplacements élémentaires dans les zones d'influence avec le th. 2 :

$$\begin{aligned}
 &\bullet \text{ cône } 12/38 \begin{cases} dx := 1*12 - 0*38 = 12 \\ dy := 1*38 - 3*12 = 2 \end{cases} & \bullet \text{ cône } 38/27 \begin{cases} dx := 1*38 - 1*27 = 11 \\ dy := 3*27 - 2*38 = 5 \end{cases} \\
 &\bullet \text{ cône } 27/43 \begin{cases} dx := 2*27 - 1*43 = 11 \\ dy := 2*43 - 3*27 = 5 \end{cases} & \bullet \text{ cône } 43/17 \begin{cases} dx := 1*43 - 2*17 = 9 \\ dy := 3*17 - 1*43 = 8 \end{cases}
 \end{aligned}$$

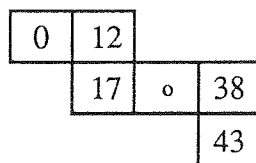
On a vu au § 4.3 que les intervalles de niveaux sont des droites discrètes (d'épaisseur proche de 1) sur chaque cône. Or on remarque que les déplacements locaux  $dx$  et  $dy$  sont ici les mêmes ( $dx=11, dy=5$ ) dans 38/27 et 27/43.

Cela fait que les deux côtés du polygone, correspondant à ces deux cônes, seront portés par la même droite ; de ce point de vue, le point  $c = 27$  n'apporte donc rien au polygone.

Sur le plan de la répartition des angles, on voit sur la figure 5.1 que :

$\angle(Oa,Od) \approx \angle(Od,Oe) \approx \angle(Oe,Ob)$  tandis que  $\angle(Od,Oc) \approx \angle(Oc,Oe)$  ;  
ainsi la suppression du point  $c$  est encore ici judicieuse.

C'est en conclusion par ces deux critères, conformes à l'esprit de la méthode du § 5.1.3, que nous supprimons le point  $c$  ; dans un voisinage 7\*7, le masque de chanfrein que nous retenons possède 4 points (on notera que ce n'est pas le masque que G. Borgfors a optimisé) :



Sur la figure 5.2 figurent les boules définies par ces deux chanfreins ; on remarque immédiatement que  $d_{12}...$  a une boule plus régulière que  $d_{14}...$ , qui semble biseautée à 45° :

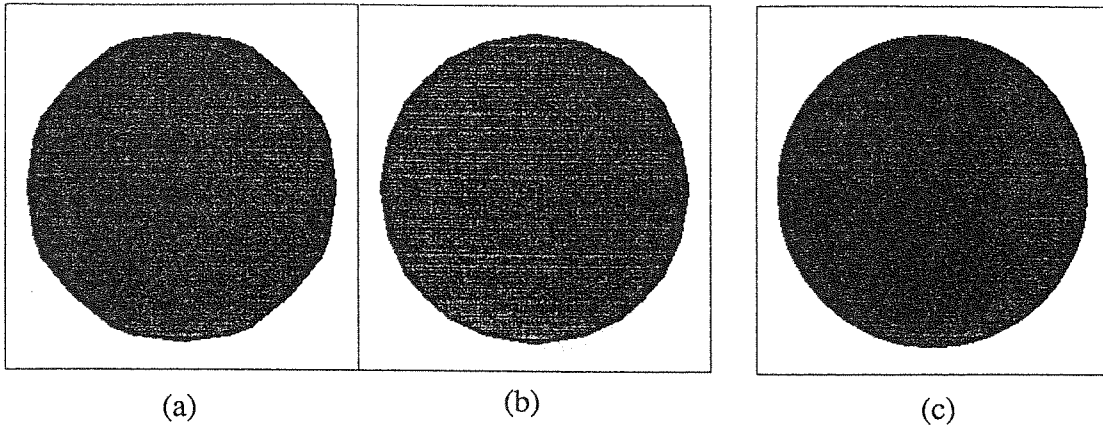


Figure 5.2 : (a) d<sub>14</sub>... (b) d<sub>12</sub>... (c) d<sub>203</sub>...

Mais cette simple appréciation visuelle ne suffit pas. Notre masque étant déjà le meilleur pour notre critère exposé au § 5.1.3, nous allons opérer une comparaison avec cette fois les critères de G.Borgefors, à savoir comparer les erreurs sur une droite bordant le support image.

On observe les deux boules en gros plan sur la figure 5.4.

Quelques remarques :

- *Intervalles de niveaux* : ceux-ci sont tantôt 4-connexes, tantôt 8-connexes, ce qui nous éloigne des propriétés bien arrêtées des courbes de niveau de  $d_4$  et  $d_8$  (cf § 4.2) [Arcelli 87].

- *Déplacements élémentaires* : lors de la suppression du point c dans le masque  $d_{12}$ ., on avait implicitement supposé que l'arête du polygone dans le cône résultant 38/43 garderait la même pente. Du point de vue théorique, les points 38 et 43 ne sont pas consécutifs, donc sur les bases admises à la fin du § 4.3, les  $dx, dy$  ne sont plus constants, mais de valeurs périodiques.

Dans l'étude de cet exemple, on voit que

- les  $dy$  sont constants, de valeur 5 ; cela est dû au fait que  $x_{38} = x_{43}$  : il n'y a pas d'incidence pour  $dy$  dans la formule du théorème 2.
- les  $dx$  ont une période de 3 (qui est l'abscisse commune de 38 et 43), et prennent les valeurs 12, 12, 9 ; on vérifie immédiatement que  $(12+12+9)/3 = 11$ .

Donc on retrouve en moyenne les valeurs espérées :  $dy = 5$  et  $dx = 11$ .

- On illustre le *phénomène de cycle* 12-12-9 pour  $dx$  en détaillant le voisinage d'une période de 38 sur la figure 5.3 :

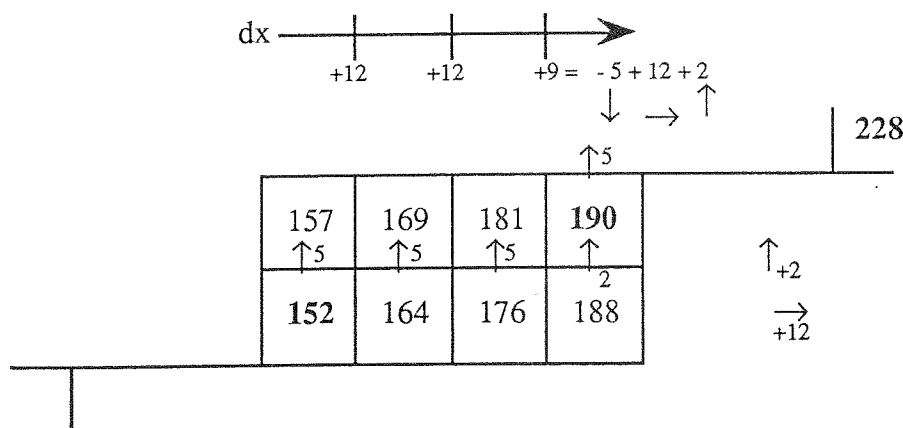


Figure 5.3 : le phénomène de cycle.

On en vient maintenant à la comparaison des erreurs sur une droite verticale.

Pour diverses raisons nous avons choisi de tester la droite  $x = 60$ . Cette valeur est d'un ordre de grandeur à la fois réaliste et significatif, car les écarts sont proportionnels, et ainsi l'erreur que l'on va calculer ne change pas. Elle a aussi la propriété utile d'être située sur l'abscisse

d'une période de chacun des points affectés des deux masques. Cela nous permet de générer très facilement les valeurs de la distance de chanfrein le long de la droite, connaissant les déplacements élémentaires  $\Delta y$  pour chaque cône.

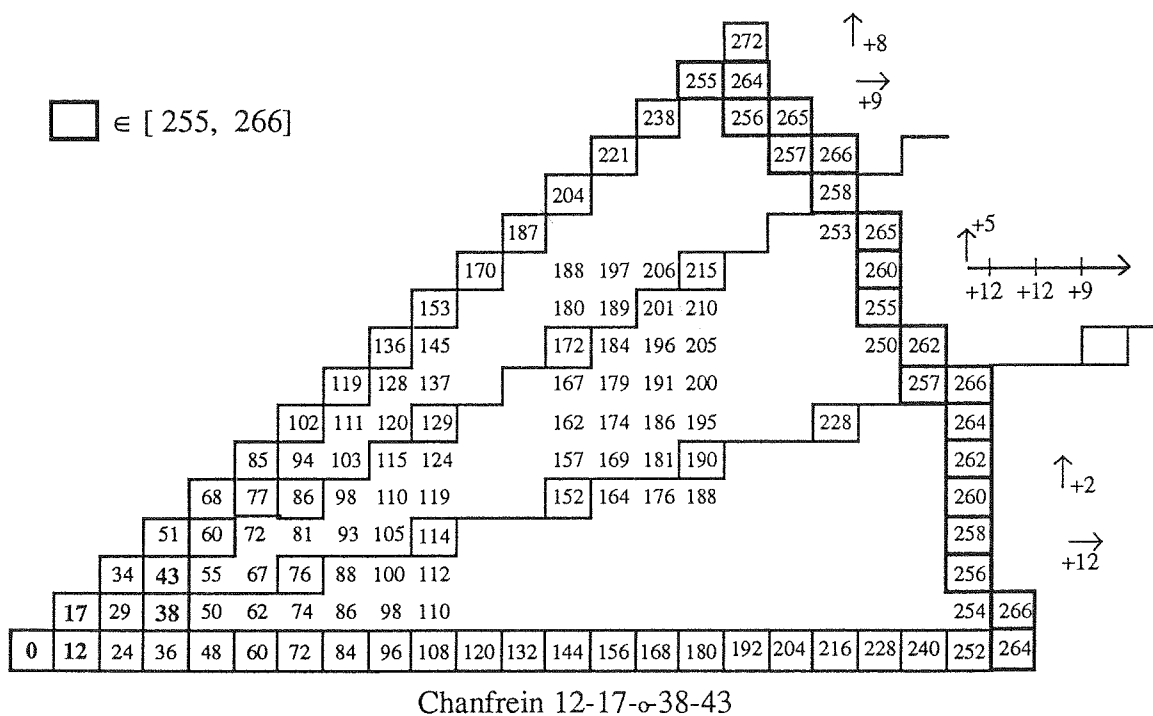
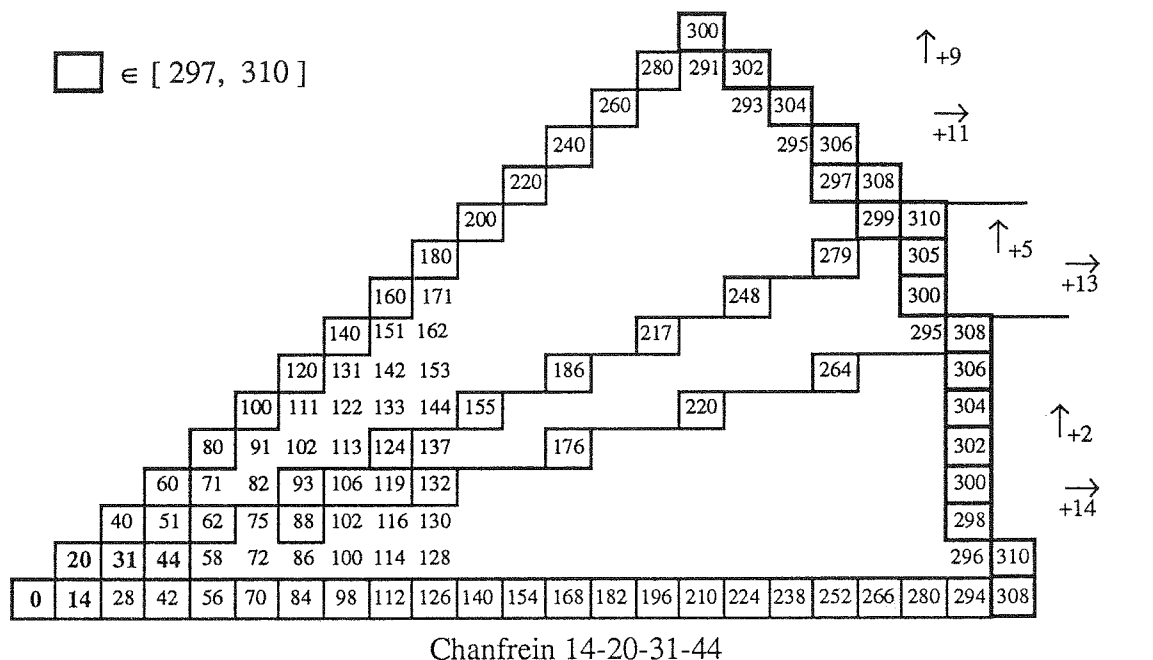


Figure 5.4 : vue macroscopique des deux boules.

Dans les tableaux de la figure 5.5 nous indiquons pour  $y$  de 0 à 60 :

- le cône d'influence
- l'ordonnée relative  $y_r$  à la période inférieure du cône



## 5.2.2 - Exemple de construction d'un grand masque

La difficulté pour mettre au point des grands masques tient au fait qu'il est dur de trouver une valeur  $a$ , dans la première étape du §5.1.3, qui minimise simultanément toutes les parties fractionnaires. Or dans le cas d'un masque de taille  $11 \times 11$ , il se trouve que nous avons de la chance : en effet on obtient en tête de liste le coefficient 'magique'  $a = 203$ , pour lequel les parties fractionnaires sont exceptionnellement faibles :

nom	coord.	$d_E$	trunc	frac
a	(1,0)	$a$	203	0
b	(1,1)	$a \cdot \sqrt{2}$	287	0,085
c	(2,1)	$a \cdot \sqrt{5}$	454	-0,078
d	(3,1)	$a \cdot \sqrt{10}$	642	-0,057
e	(3,2)	$a \cdot \sqrt{13}$	732	-0,073
f	(4,1)	$a \cdot \sqrt{17}$	837	-0,009
g	(4,3)	$a \cdot 5$	1015	0
h	(5,1)	$a \cdot \sqrt{26}$	1035	0,101
i	(5,2)	$a \cdot \sqrt{29}$	1093	0,188 ← $E_{203}$
j	(5,3)	$a \cdot \sqrt{34}$	1184	-0,317 ← out
l	(5,4)	$a \cdot \sqrt{41}$	1300	-0,166 ← out

En supprimant les points  $j = 1184$  et  $l = 1300$ , on se ramène à  $E_{203} = 0,188$ , à comparer avec  $E_{12} = 0,267$  et  $E_{14} = 0,305$  (pour 4 points).

Ce masque est le chanfrein 203-287-454-642-732-837-1015-1035-1093, et sa boule est un polygone à  $8 \cdot (9-1) = 64$  côtés. Le résultat obtenu à la figure 5.2-c pour un rayon de 110 est une boule quasi-euclidienne.

Il est intéressant de tester ce nouveau masque avec le critère de G. Borgefors. Comme les points  $j$  et  $l$  que l'on a supprimés sont de module et de poids supérieurs à tous ceux que l'on garde, ce chanfrein est *régulier*. On peut donc calculer très simplement les déplacements élémentaires pour chaque cône d'influence avec le théorème 2. Puis on calcule le maximum de l'erreur commise sur une droite, de façon analogue au § 5.2.1 (cf figure 5.5). Les résultats obtenus sont :

Maximum de l'erreur : 0,48 %  
Amplitude de l'erreur : 0,51 %

Ces chiffres montrent l'intérêt d'un masque de cette taille pour la qualité des approximations. Son emploi peut se justifier lorsqu'on a besoin d'une grande précision, par exemple dans le cas d'objets très épais. Le temps de calcul de la transformation de distance (§ 3.3) étant linéaire par rapport au nombre de points affectés du masque, celui-ci sera donc huit fois plus long avec  $d_{203}$ , qu'avec chanfrein 3-4, mais toujours indépendant de la taille des objets dans l'image. D'autre part  $a = 203$  étant inférieur à 255, on a vu en § 5.1.1 que le stockage de l'image de distance s'effectue bien sur 16 bits, tandis que  $d_E$  en consomme 32. Enfin contrairement à  $d_E$ , ce masque induit une distance discrète.

Le tableau de la figure 5.6 montre la progression de  $d_4$  à  $d_{203..}$ , qui est de l'ordre du facteur 100 :

distance	classiques		G. Borgefors			E. Thiel	
	$d_4$	$d_8$	$d_{3..}$	$d_{5..}$	$d_{14..}$	$d_{12..}$	$d_{203..}$
erreur max	41,42 %	29,29 %	5,72 %	1,98 %	1,52 %	1,38 %	0,48 %
amplitude	41,42 %	29,29 %	11,13 %	3,59 %	2,49 %	2,00 %	0,51 %

Figure 5.6 : bilan des approximations.

## 6 - Conclusion

L'étude des distances du chanfrein nous a permis de dégager des caractéristiques locales d'une image de distance, tant du point de vue des valeurs attribuées dans un cône d'influence, que de la géométrie des boules (droites épaisses).

Ces propriétés arithmétiques devraient permettre d'établir la formule analytique générale donnant la distance entre deux points pour un chanfrein quelconque, étape nécessaire pour déterminer rigoureusement les conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients d'un masque pour qu'il induise bien une distance.

Les propriétés géométriques que nous avons montrées nous ont conduits de plus à élaborer un procédé d'optimisation de masques de chanfrein. Les résultats obtenus garantissent une erreur minimale, ce qui est particulièrement intéressant dans le cas où l'on souhaite accéder à une grande précision dans la mesure de distance.

Le choix des distances de chanfrein a satisfait nos objectifs de contraintes de stockage, de grande rapidité de calcul (séquentiel en deux passages) et de minimalité de l'erreur par rapport à la distance euclidienne, qui est un bon critère d'isotropie. Ce dernier point est très important pour la robustesse des applications basées sur l'axe médian, la ligne médiane et la séparation d'aggrégats [Thiel 91a], qui sont significatives de l'utilité de telles distances et de leur importance en analyse d'images.

## Références :

[ARCELLI 87] Arcelli, C., Sanniti di Baja G.  
 "Weighted distance transforms : a characterization"  
 4th Int. Conf. on Image Analysis and Pattern Recognition  
 Plenum ed., Cefalu (Italy), September 1987, p. 205-211.

[BORGEFORS 84] Borgefors G.  
 "Distance transformations in arbitrary dimensions"  
 CVGIP, 27, 1984, p. 321-345.

[BORGEFORS 86] Borgefors G.  
 "Distance transformations in digital images"  
 CVGIP, 34, 1986, p. 344-371.

[CHASSERY 79] Chassery J.M.  
 "Connectivity and consecutivity in digital pictures"  
 CGIP, 9, 1979, p. 294-300.

[CHASSERY 80] Chassery J.M., Chenin M.I.  
 "Topologies on discrete spaces"  
 Digital Image Processing, Simon & Haralick eds., Reidel Publ., 1980, p. 59-66.

[CHASSERY 91] Chassery J.M. ; A. Montanvert  
" Géométrie discrète en analyse d'images"  
Publié aux éditions Hermès, collection images, mai 91.

[DANIELSSON 80] Danielsson P.E.  
"Euclidean distance mapping"  
CGIP, 14, 1980, p. 227-248.

[H&W] Hardy and Wright.  
"An introduction to the theory of numbers"  
Oxford University Press, fifth edition (october 1978), §III.3.1

[MONTANARI 68] Montanari U.  
"A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance"  
Journal of ACM, 15, 1968, p. 600-624.

[ROSENFELD 66] Rosenfeld A., Pfaltz J.L.  
"Sequential operations in digital picture processing"  
Journal of ACM, 13(4), 1966, p. 471-494.

[ROSENFELD 68] Rosenfeld A., Pfaltz J.L.  
"Distance functions on digital pictures"  
Pattern Recognition, 1, 1968, p. 33-61.

[THIEL 91a] E. Thiel ; A. Montanvert.  
"Shape splitting from medial lines using the 3-4 chamfer distance"  
Accepted for the First International Workshop on Visual Form, May 27-30, 1991, Capri, Italy.

[THIEL 91b] E. Thiel ; A. Montanvert.  
"Approximation discrète de la distance euclidienne pour l'analyse d'images : étude et  
amélioration des distances du chanfrein"  
Accepted for 8ème congrès Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle  
25-29 Novembre, 1991, Lyon, France.

[YAMADA 84] Yamada H.  
"Complete euclidean distance transformation by parallel operation"  
7th ICPR, IEEE Comp. Soc. Press, Montréal, 1984, p. 69-71.