Recherche textuelle

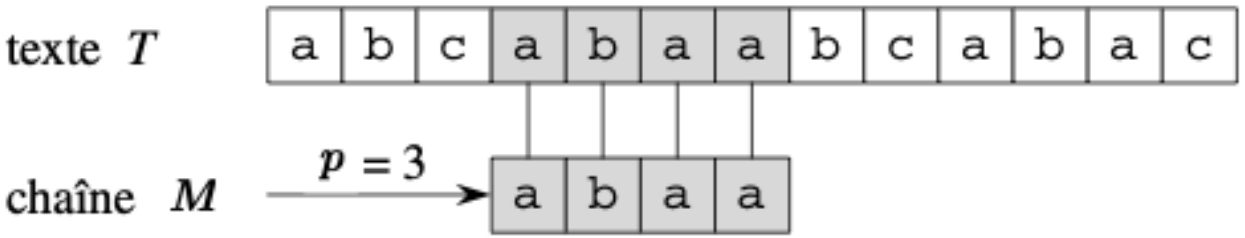
Benjamin Monmege

Algorithmique du texte

- modifier la casse du texte : passer un texte en majuscule, ajouter des majuscules en début de mot. . .
- calculer le `diff` entre deux textes ou aligner deux textes (par exemple des séquences de gène, ce qui est très utile en génétique)
- compter des nombres de mots dans un texte ou autres statistiques liées au texte
- rechercher un mot dans un texte

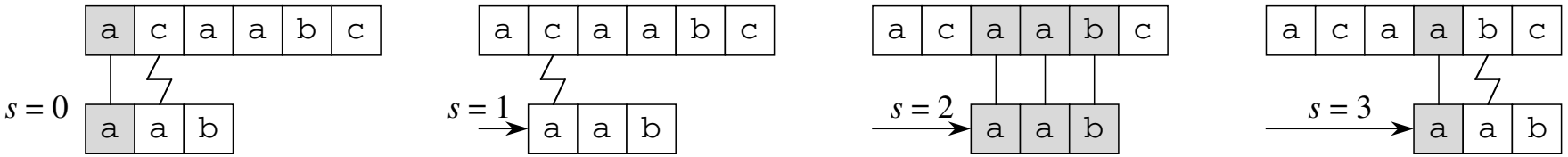
Recherche d'un motif dans un texte

- Texte stocké dans une chaîne $T = T[0]T[1]\cdots T[n-1]$ de longueur n
- Motif à rechercher dans une chaîne $M = M[0]M[1]\cdots M[m-1]$ de longueur $m \leq n$
- Le motif M apparaît à la position p dans le texte T si $T[p+i] = M[i]$ pour tout $0 \leq i \leq m-1$
- La recherche de motif consiste à trouver une ou toutes les positions où apparaît le motif dans le texte



Algorithme naïf

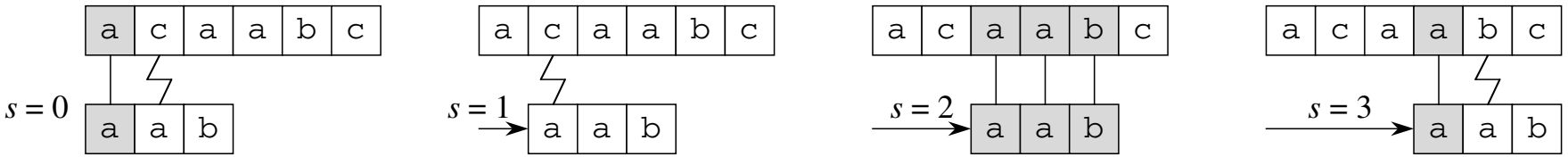
- Tester si $M = T[p..p+m-1]$ pour toutes les positions $0 \leq p \leq n-m$



Quelle complexité ?

Algorithme naïf

- Tester si $M = T[p..p+m-1]$ pour toutes les positions $0 \leq p \leq n-m$



Quelle complexité ?

$$O(m(n-m))$$

Cas où tous les caractères du motif M sont différents

- Comment améliorer l'algorithme naïf dans ce cas ?

Cas où tous les caractères du motif M sont différents

- Comment améliorer l'algorithme naïf dans ce cas ?
- Lorsqu'on a trouvé une erreur d'alignement du motif dans le texte à la position p, par exemple que $M[i] \neq T[p+i]$, alors on peut sauter directement à la position $p+i$

Cas où tous les caractères du motif M sont différents

- Comment améliorer l'algorithme naïf dans ce cas ?
- Lorsqu'on a trouvé une erreur d'alignement du motif dans le texte à la position p, par exemple que $M[i] \neq T[p+i]$, alors on peut sauter directement à la position $p+i$

Nouvelle complexité ?

Cas où tous les caractères du motif M sont différents

- Comment améliorer l'algorithme naïf dans ce cas ?
- Lorsqu'on a trouvé une erreur d'alignement du motif dans le texte à la position p, par exemple que $M[i] \neq T[p+i]$, alors on peut sauter directement à la position $p+i$

Nouvelle complexité ?

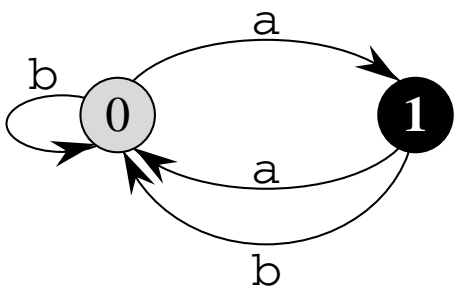
$$O(n)$$

Cas général : inspecter chaque lettre du texte au plus une fois ?

Utilisation d'automates finis : un automate est la donnée

- d'un ensemble Q fini d'**états**
- d'un **état initial** $q_0 \in Q$
- d'un ensemble distingué d'**états acceptants** $A \subseteq Q$ *(représenté en noir ci-dessous)*
- d'un **alphabet** fini Σ
- d'une **fonction de transition** $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

état	entrée a	entrée b
0	1	0
1	0	0

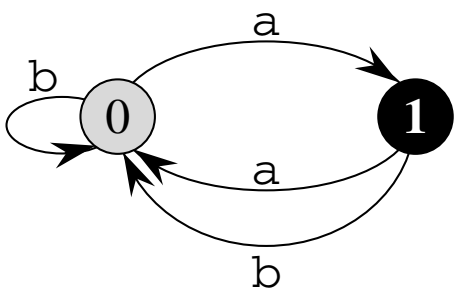


Sémantique d'un automate fini

Sémantique :

- on démarre en q_0
- on lit un caractère $a \in \Sigma$ et on se dirige vers l'état $\delta(q_0, a)$
- on continue à lire des caractères à partir de l'état courant
- à chaque fois que l'état courant appartient à A, on dit que l'automate a accepté la chaîne lue jusqu'à cet endroit

état	entrée a	entrée b
0	1	0
1	0	0

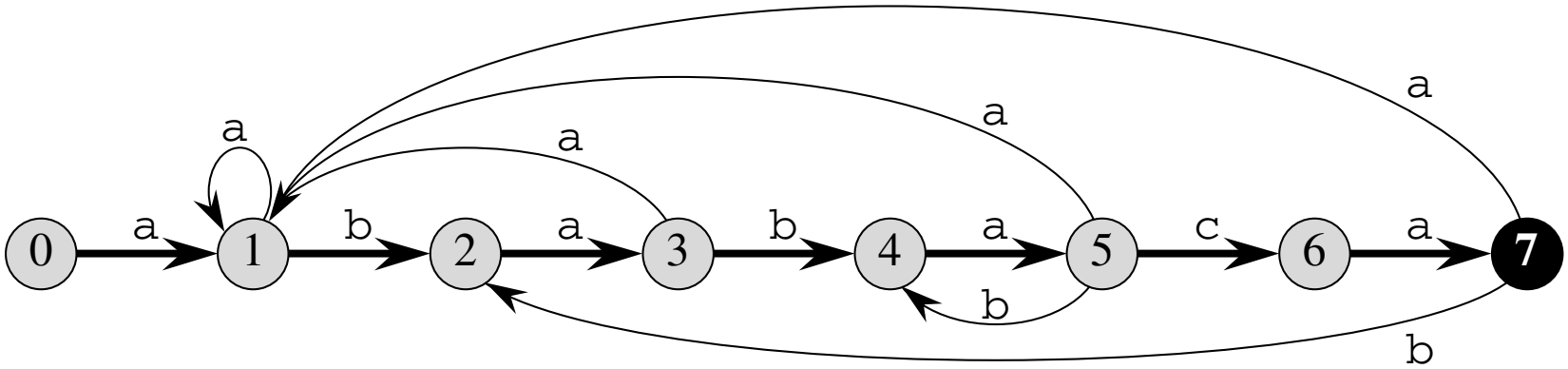


$$0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 0$$

- *abbaa* rejeté
- *abba* accepté

Automate de recherche de motif

Exemple : motif *ababaca*

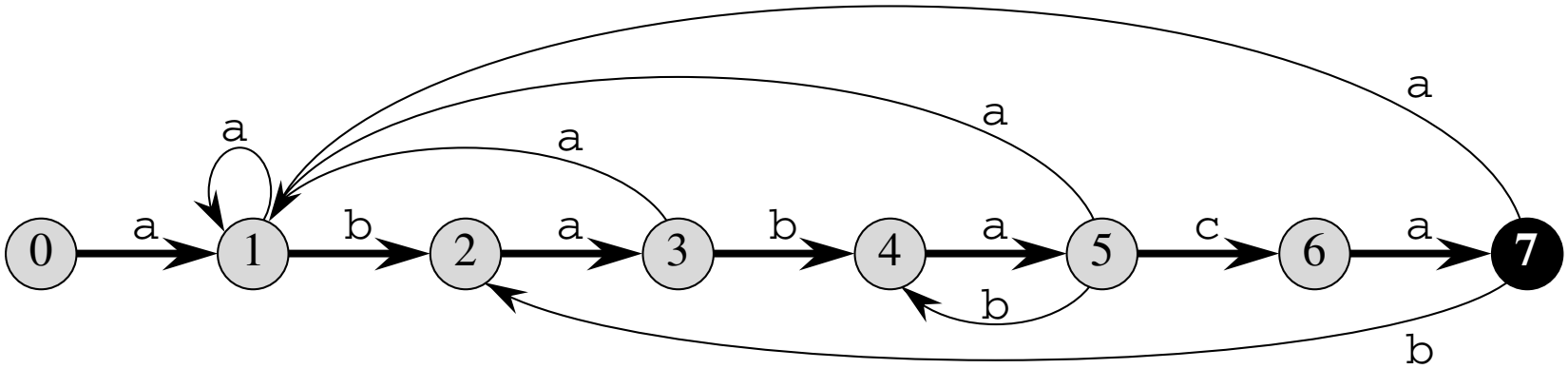


(les flèches manquantes vont vers l'état 0)

$T[i]$	—	a	b	a	b	a	b	a	c	a	b	a
état $\phi(T_i)$	0	1	2	3	4	5	4	5	6	**7**	2	3

Automate de recherche de motif

Exemple : motif *ababaca*



(les flèches manquantes vont vers l'état 0)

$T[i]$	—	a	b	a	b	a	b	a	c	a	b	a
état $\phi(T_i)$	0	1	2	3	4	5	4	5	6	**7**	2	3

L'automate accepte les préfixes du texte qui terminent par le motif.

Complexité ?

- Une fois précalculé la fonction de transition de l'automate,
- suivre l'exécution de l'automate sur le texte demande de l'ordre de $O(n)$ opérations

Calcul de la fonction de transition ?

- Faisable en $O(m^3|\Sigma|)$, mais on se contentera ici de savoir le faire à la main
- Au mieux, on peut y arriver en $O(m|\Sigma|)$, en adoptant des techniques proches d'un autre algorithme, dû à Knuth-Morris-Pratt
- L'algorithme de Knuth-Morris-Pratt évite même totalement le pré-calcul de la fonction de transition : temps de prétraitement limité à $O(m)$, pertinent pour des gros alphabets

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...

```
CGGCTC
ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...

```
  CGGCTC
ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...

```
  CGGCTC
ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...

```
  CGGCTC
ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...
- ... mais on teste l'alignement du motif sur le texte en partant de la droite du motif
- Décalage optimisé :
  - pas de `A` dans le motif
  - on saute directement à la position courante + 6 (longueur du motif)

```
CGGCTC

ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...
- ... mais on teste l'alignement du motif sur le texte en partant de la droite du motif
- Décalage optimisé :
  - pas de `A` dans le motif
  - on saute directement à la position courante + 6 (longueur du motif)

```
   CGGCTC

ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...
- ... mais on teste l'alignement du motif sur le texte en partant de la droite du motif
- Décalage optimisé :
  - il existe un autre `C` dans le motif
  - on saute directement à ce `C`

```
      CGGCTC

ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...
- ... mais on teste l'alignement du motif sur le texte en partant de la droite du motif
- Décalage optimisé :
  - il existe un autre G dans le motif
  - on saute directement à ce G

```
      CGGCTC

ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...
- ... mais on teste l'alignement du motif sur le texte en partant de la droite du motif

```
                    CGGCTC

ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

Algorithme de Boyer-Moore

- Plus rapide des algorithmes connus
- Retour sur le glissé du motif sur le texte, utilisé dans l'algorithme naïf
- On glisse le motif de gauche à droite...
- ... mais on teste l'alignement du motif sur le texte en partant de la droite du motif

```
          CGGCTC

ATAACAGGAGTAAATAACGGCTCGAGTAAATA
```

seulement 11 comparaisons,

là où l'algorithme naïf en aurait eu besoin de 24 et l'automate 23...

Version simple : algorithme de Boyer-Moore-Horspool

- On compare le motif M avec un facteur $T[p..p+m-1]$ du texte
- Si une différence entre M et ce facteur est constatée (ou si on a trouvé une occurrence du motif mais qu'on les veut toutes), on décale le motif vers la droite de manière à faire coïncider la dernière lettre du facteur, c'est-à-dire la lettre $T[p+m-1]$, avec son occurrence la plus à droite dans M

chaîne	a	b	a	c	a	c	a	**b**	a	**c**	a	b	a	**b**	a	**a**	**b**	b	**a**	b
(1)	a	b	a	c	a	b	a	*c*												
(2)			a	*b*	a	c	a	b	a	c										
(3)							a	b	a	c	a	b	a	*c*						
(4)									a	b	a	c	a	b	a	*c*				
(5)										a	b	a	c	a	b	a	*c*			
(6)												a	b	a	c	a	b	a	*c*	

Complexité ?

- Première remarque : premier algorithme qui ne lit pas nécessairement tous les caractères du texte !
- Complexité dans le pire des cas $O(nm)$
- En pratique (plus précisément, en moyenne sur des motifs aléatoires), l'algorithme de Horspool effectue un nombre de comparaisons de l'ordre de $O\left(\frac{n}{m} + \frac{n}{2|\Sigma|}\right)$