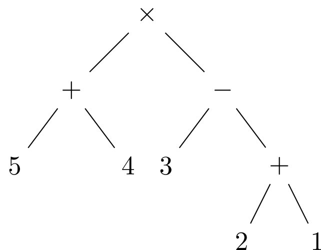
Structures de données : arbres

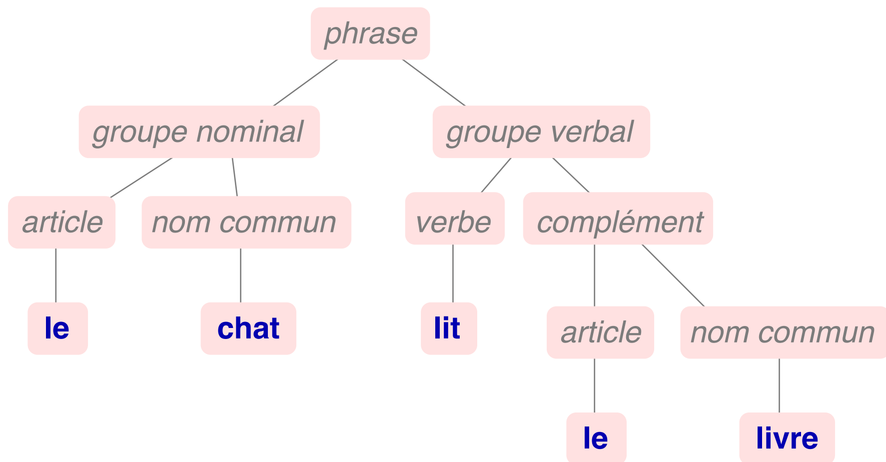
Benjamin Monmege

Exemples d'utilisation des arbres

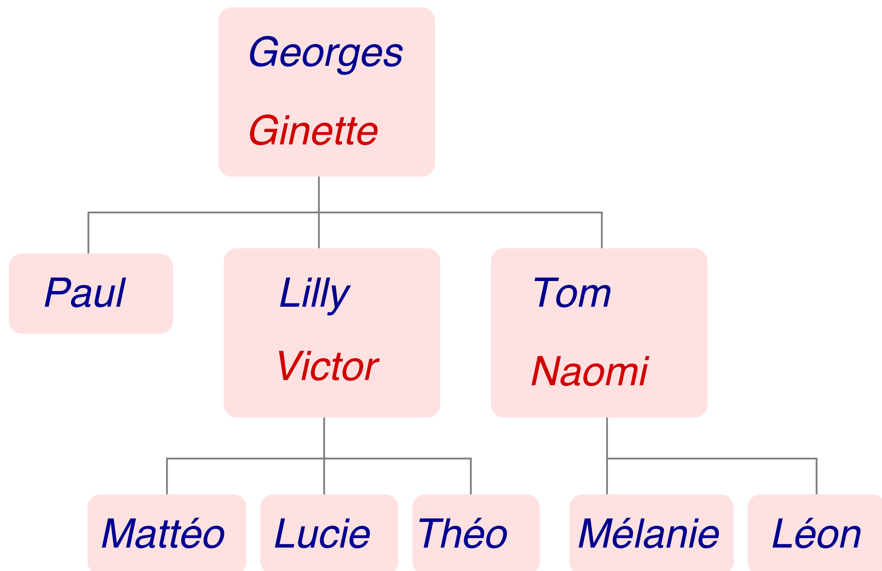
Arbre syntaxique d'une expression arithmétique



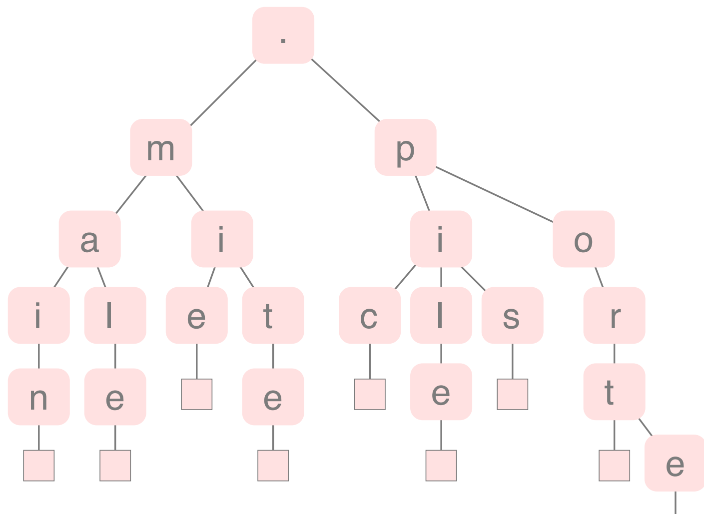
Arbre syntaxique analysant une phrase



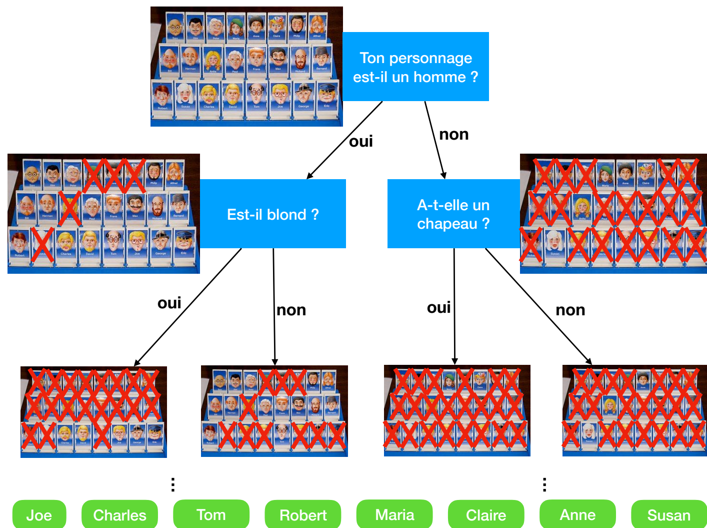
Arbre généalogique



Arbre lexicographique (ou en parties communes, ou dictionnaire)

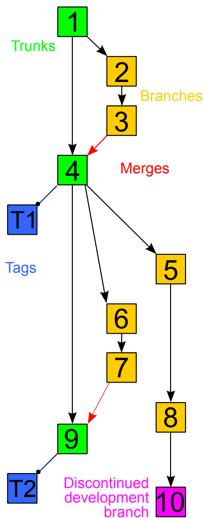


main
male
mie
mite
pic
pile
pis
port
porte

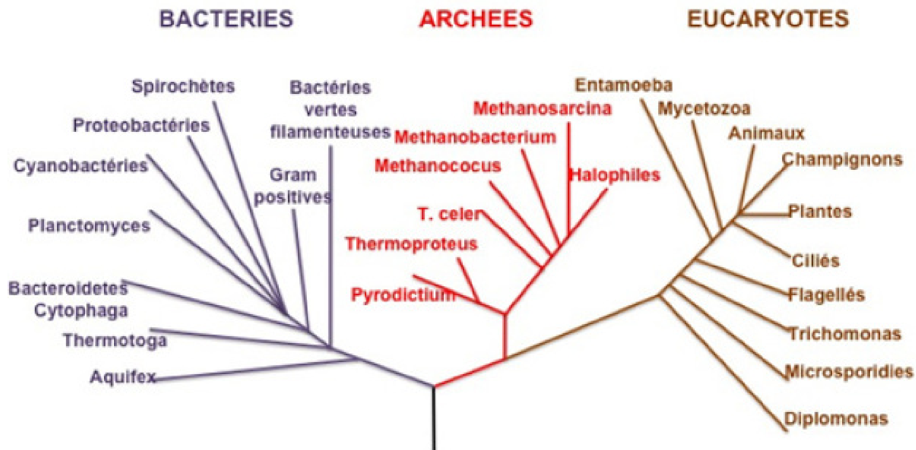


Ton personnage est-il un homme ?
oui
non
Est-il blond ?
A-t-elle un chapeau ?
oui
non
oui
non
Joe
Charles
Tom
Robert
Maria
Claire
Anne
Susan

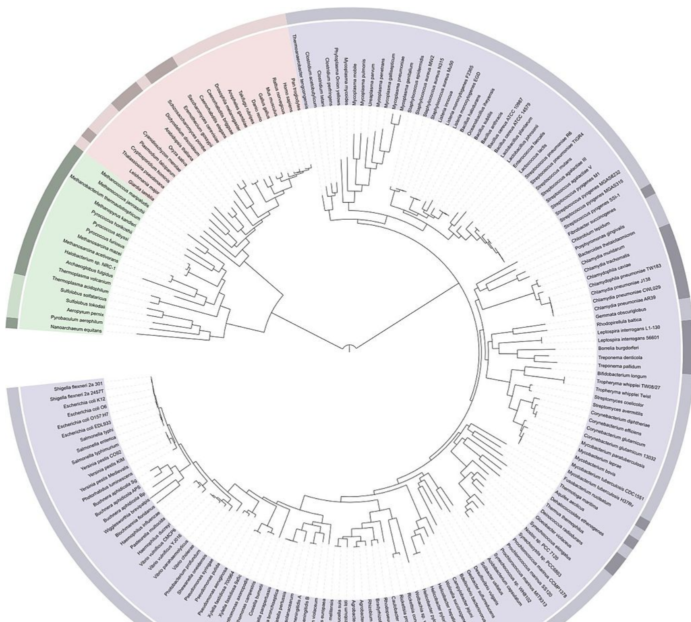
Arbre de versions git



Arbre phylogénétique



Arbre phylogénétique



Définitions d'un arbre enraciné

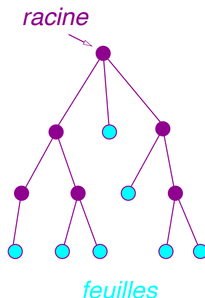
Définition ensembliste

Un arbre est un ensemble organisé de nœuds :

- chaque nœud a un unique *parent*,
- sauf un seul nœud, la *racine*, qui n'a pas de parent.

Les nœuds ayant un nœud p comme parent sont appelés les *enfants* de p.

Les *feuilles* sont les nœuds qui n'ont pas d'enfants.

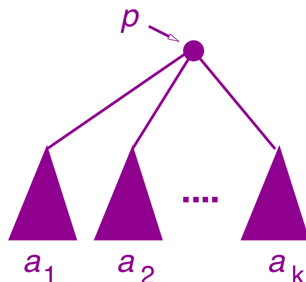


Définition récursive

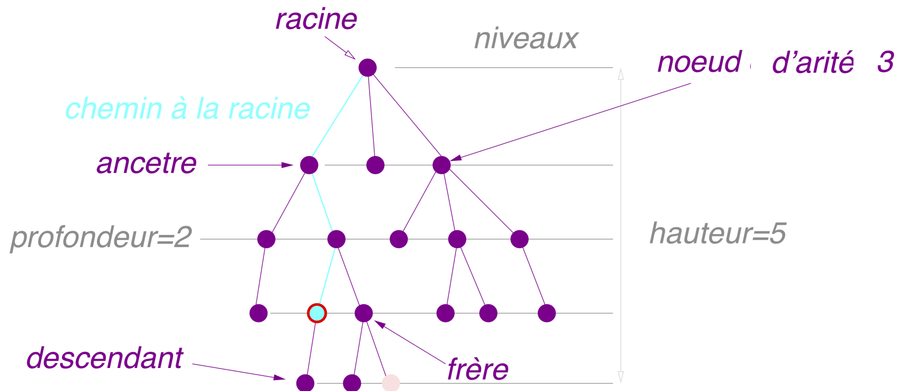
Un arbre est constitué :

- d'un nœud p, sa *racine*,
- et d'une suite de sous-arbres $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ (avec k non fixé a priori).

Les racines des arbres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont les *enfants* de p.

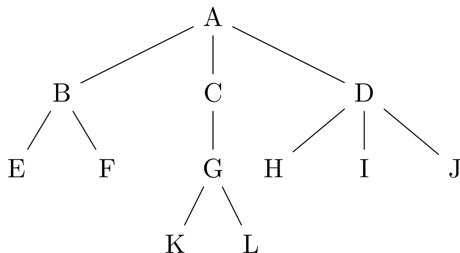


Les mots des arbres

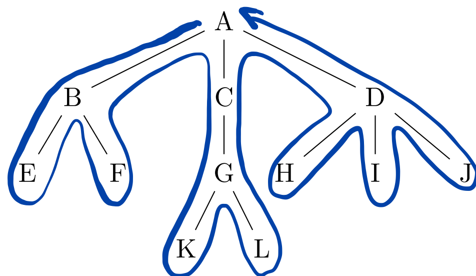


Parcours

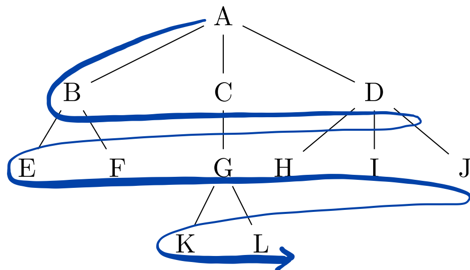
Parcourir un arbre (ou un graphe...), c'est visiter la totalité des nœuds de celui-ci, dans un certain ordre, pour appliquer un éventuel traitement: affichage, évaluation, recherche...



Parcours en profondeur



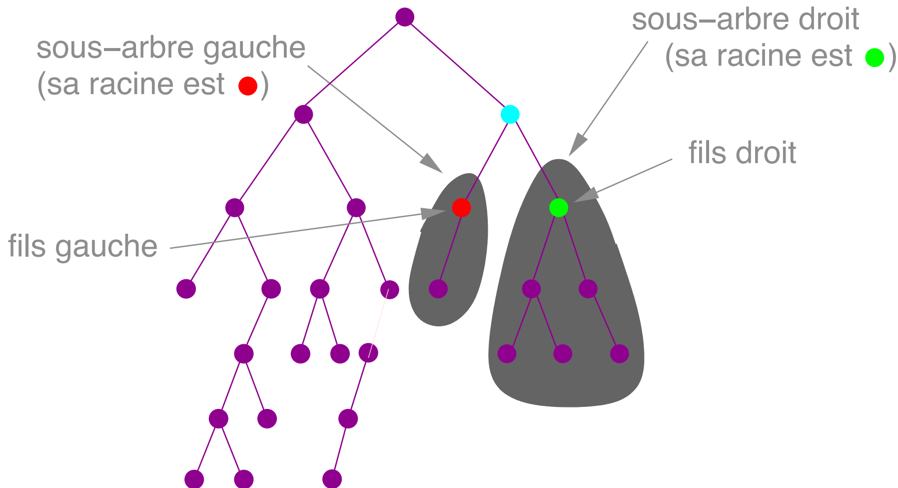
Parcours en largeur



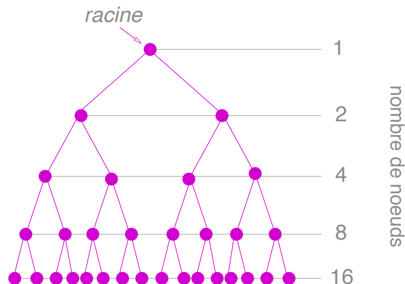
Arbres binaires

Définition

Chaque nœud a au plus 2 enfants : l'*enfant gauche* et l'*enfant droit*



Hauteur et taille d'un arbre binaire



Arbre binaire complet de hauteur h (hauteur = nombre de niveaux):

- à la profondeur p on a 2^p nœuds
- le nombre total de nœuds est donc $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$

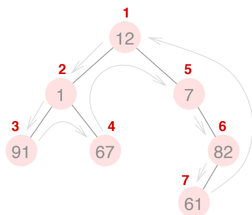
Un arbre quelconque de hauteur h contient au plus $2^h - 1$ nœuds.

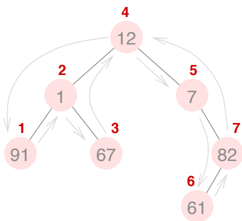
Parcours en profondeur d'un arbre binaire

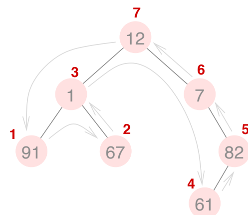
Parcours préfixe : traitement du nœud **avant** les sous-arbres

Parcours infixe : traitement du nœud **entre** les deux sous-arbres

Parcours postfixe : traitement du nœud **après** les sous-arbres







Structure de données abstraite : ensemble dynamique

Structure de données abstraite : ensemble dynamique

- Recherche d'un élément dans un ensemble
- Insertion d'un nouvel élément
- Suppression d'un élément
- Test du vide de l'ensemble

Interface :

```
set.contains(element)     # true or false
set.insert(element)       # modifies set
set.suppress(element)     # modifies set
set.isempty()             # true or false
```

Première implémentation : liste triée dans le cas où les éléments sont comparables

- Recherche d'un élément dans un ensemble: recherche dichotomique

Première implémentation : liste triée dans le cas où les éléments sont comparables

- Recherche d'un élément dans un ensemble: recherche dichotomique

$$O(\log(n))$$

- Insertion d'un nouvel élément: recherche puis décalage

Première implémentation : liste triée dans le cas où les éléments sont comparables

- Recherche d'un élément dans un ensemble: recherche dichotomique

$$O(\log(n))$$

- Insertion d'un nouvel élément: recherche puis décalage

$$O(n)$$

- Suppression d'un élément: recherche puis décalage

Première implémentation : liste triée dans le cas où les éléments sont comparables

- Recherche d'un élément dans un ensemble: recherche dichotomique

$$O(\log(n))$$

- Insertion d'un nouvel élément: recherche puis décalage

$$O(n)$$

- Suppression d'un élément: recherche puis décalage

$$O(n)$$

- Test du vide de l'ensemble: test de longueur

Première implémentation : liste triée dans le cas où les éléments sont comparables

- Recherche d'un élément dans un ensemble: recherche dichotomique

$$O(\log(n))$$

- Insertion d'un nouvel élément: recherche puis décalage

$$O(n)$$

- Suppression d'un élément: recherche puis décalage

$$O(n)$$

- Test du vide de l'ensemble: test de longueur

$$O(1)$$

Seconde implémentation : arbre binaire de recherche dans le cas où les éléments sont comparables

Arbre binaire étiqueté par les éléments tel que pour tout nœud p d'étiquette x:

- toutes les étiquettes de l'enfant gauche de p sont inférieures à x
- toutes les étiquettes de l'enfant droit de p sont supérieures à x

Seconde implémentation : arbre binaire de recherche dans le cas où les éléments sont comparables

Arbre binaire étiqueté par les éléments tel que pour tout nœud p d'étiquette x:

- toutes les étiquettes de l'enfant gauche de p sont inférieures à x
- toutes les étiquettes de l'enfant droit de p sont supérieures à x

Algorithmes et complexité: **bloc 5 !**

Troisième implémentation : table de hachage dans le cas d'éléments hachables

Principe :

- appliquer une fonction de hachage (ou dispersion) permettant d'associer à chaque élément un indice i dans un intervalle restreint de valeurs

Troisième implémentation : table de hachage dans le cas d'éléments hachables

Principe :

- appliquer une fonction de hachage (ou dispersion) permettant d'associer à chaque élément un indice i dans un intervalle restreint de valeurs
- ranger l'élément dans la case d'indice i d'une liste (appelée table de hachage)

Troisième implémentation : table de hachage dans le cas d'éléments hachables

Principe :

- appliquer une fonction de hachage (ou dispersion) permettant d'associer à chaque élément un indice i dans un intervalle restreint de valeurs
- ranger l'élément dans la case d'indice i d'une liste (appelée table de hachage)
- en cas de collision (deux éléments à insérer de même fonction de hachage), on stocke une liste d'éléments dans la case d'indice i

Troisième implémentation : table de hachage dans le cas d'éléments hachables

Principe :

- appliquer une fonction de hachage (ou dispersion) permettant d'associer à chaque élément un indice i dans un intervalle restreint de valeurs
- ranger l'élément dans la case d'indice i d'une liste (appelée table de hachage)
- en cas de collision (deux éléments à insérer de même fonction de hachage), on stocke une liste d'éléments dans la case d'indice i

Structures utilisée pour les **dictionnaires Python**