Codage des nombres

Arnaud Labourel arnaud.labourel@univ-amu.fr

Représentation des entiers naturels (rappel)

Système de numération

Système conventionnel de comptage en base 10 incompatible avec la machine $\Longrightarrow$ Étude d'autres systèmes de numération

Systèmes de numération : utilisation de symboles appelés *chiffres* (*digits* en anglais)

Le nombre de chiffres utilisés correspond à la base du système :

- *Système binaire :* base 2 (symboles ou chiffres : 0 et 1)
- *Système décimal :* base 10 (symboles ou chiffres : 0 à 9)
- *Système Hexadécimal :* Base 16 (symboles ou chiffres : 0 à 9, et A B C D E F)

Entier naturel en base β

Formule pour la valeur d'un nombre entier représenté en base β

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0|_\beta = \sum_{i=n}^{i=0} (c_i \beta^i) = c_n \beta^n + \dots + c_2 \beta^2 + c_1 \beta^1 + c_0 \beta^0$$

où c_i est le chiffre de rang i : le rang 0 correspond au chiffre le plus à droite.

Système binaire

- **2** chiffres : 0 et 1 (Vrai et Faux, ON et OFF, Oui et Non)
- On adapte la formule magique :

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0|_2 = \sum_{i=n}^{i=0} (c_i 2^i) = c_n 2^n + \dots + c_2 2^2 + c_1 2 + c_0$$

Exemple

$$\begin{aligned} 2019|_{10} &= 1 \times 1024 + 1 \times 512 + 1 \times 256 + 1 \times 128 + 1 \times 64 \\ &\quad +1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 \\ &= 11111100011|_2 \end{aligned}$$

Le Système hexadécimal

- puissance de 2 et donc facile à convertir vers et depuis la base 2
- Plus lisible que le binaire : par exemple 10101001011010101010 et 10101011010101010011 en binaire versus A96AA et AB553 en hexadécimal
- *16* chiffres : 0, 1, 2, . . . , 9, A, B, C, D, E, F
- On adapte la formule magique :

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0|_{16} = \sum_{i=n}^{i=0} (b_i 16^i) = b_n 16^n + \dots + b_2 16^2 + b_1 16 + b_0$$

Exemple

$$2019|_{10} = 7 \times 16^2 + 14 \times 16 + 0 = 7 \times 16^2 + E \times 16 + 0 = 7F3|_{16}$$

Nombre de chiffres pour représenter un nombre

Définition

On note $n+1 = N_\beta(x)$ le nombre de chiffres nécessaires pour exprimer x dans la base β.

Théorème

$N_\beta(x)$ est le plus petit entier strictement supérieur à $\log_\beta(x)$

Corollaire

Le rapport $\frac{N_\beta(x)}{N_{\beta'}(x)}$ tend vers $\frac{\ln(\beta')}{\ln(\beta)}$ quand x tend vers l'infini

Exemple

Pour écrire un grand nombre en base 2, il faut environ $3,32$ fois plus de chiffres qu'en base 10 car $\frac{\ln(10)}{\ln(2)} = 3,32\ldots$

Représentation des entiers relatifs

Représentation avec bit de signe

- un bit pour représenter le signe (positif ou négatif) et codage binaire de la valeur absolue
- Deux zéros : un positif et un négatif
- Sur un octet (8 bits), on représente les entiers de $-2^7 + 1 = -127$ à $2^7 - 1 = 127$
- Sur deux octets (16 bits), on représente les entiers de $-2^{15} + 1 = -32767$ à $2^{15} - 1 = 32767$

Alternative : le complément à deux

Toujours un bit pour coder le signe, mais une autre façon de coder la valeur absolue

Méthode pour obtenir la représentation

1. On exprime la valeur absolue en base 2
2. Ensuite on complémente à deux si on code une valeur négative :
   - On inverse tous les bits ($1 \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow 1$)
   - Ajoute 1 au résultat en ignorant le bit supplémentaire si on dépasse le nombre de bits fixé

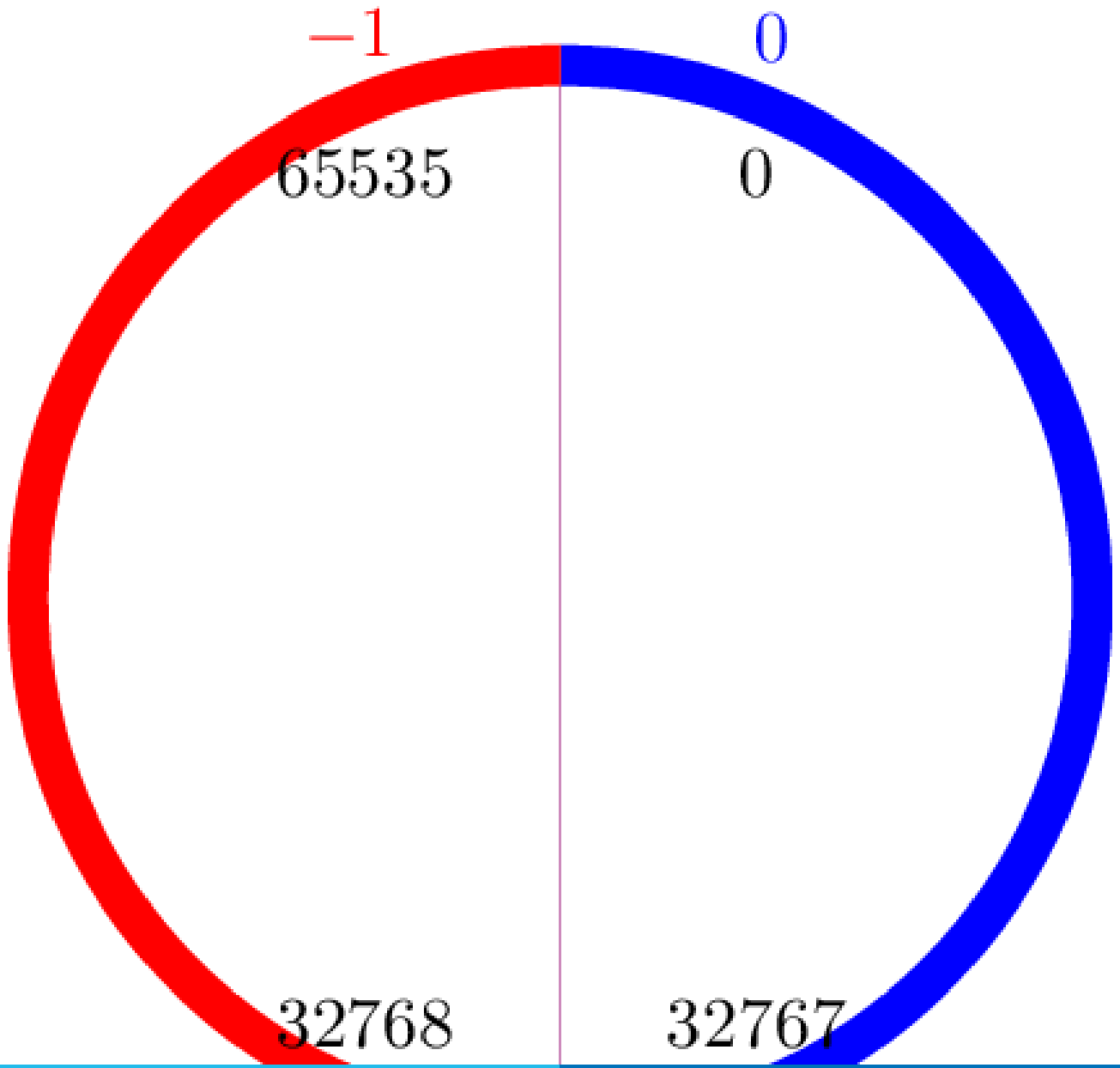
Remarques

- Une seule façon de coder 0 : 00000000 00000000
- Un négatif de plus !

Exemples complément à deux sur 2 octets

$$
\begin{aligned}
1 &= (0000000000000001) \\
-1 &= (1111111111111111) \\
3 &= (0000000000000011) \\
-3 &= (1111111111111101) \\
32767 &= (0111111111111111) \\
-32767 &= (1000000000000001) \\
-32768 &= (1000000000000000)
\end{aligned}
$$

Répartition des entiers dans le complément à deux



Opérations en binaire

Addition en binaire

On additionne les chiffres un par un en partant de la droite comme pour la base 10.

On additionne les deux chiffres plus la retenue :

- Si le résultat est 0 : on écrit 0 et on retient 0
- Si le résultat est 1 : on écrit 1 et on retient 0
- Si le résultat est 2 : on écrit 0 et on retient 1
- Si le résultat est 3 : on écrit 1 et on retient 1

Exemple addition en binaire

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
+ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Soustraction en binaire

On soustrait les chiffres un par un en partant de la droite.

On soustrait au chiffre en haut le chiffre en bas plus la retenue :

- Si le résultat est 1 : on écrit 1 et on retient 0
- Si le résultat est 0 : on écrit 0 et on retient 0
- Si le résultat est -1 : on écrit 1 et on retient -1
- Si le résultat est -2 : on écrit 0 et on retient -1

Exemple soustraction en binaire

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle -1} & & {\scriptstyle -1} & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
- & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Multiplication en binaire

On multiplie le premier nombre par chacun des chiffres du deuxième :

- si le chiffre est 1 on recopie le premier nombre suivi d'un nombre de 0 égal au rang du chiffre.
- si le chiffre est 0 : on ne fait rien.

On additionne les nombres ainsi obtenus pour avoir le résultat final.

Exemple multiplication en binaire

$$
\begin{array}{r}
110001001 \\
\times 10101 \\
\hline
110001001 \\
+11000100100 \\
+1100010010000 \\
\hline
10000000111101
\end{array}
$$

Représentation des réels

Représentation des nombres réels

Représentation en base deux d'un réel

Les chiffres après la virgule ont des rangs négatifs et sont donc multipliés par des puissances de 2 négatives :

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} c_{-3} \dots |_2 = \sum_{i=-\infty}^{i=n} (c_i 2^i)$$

Problématiques de la représentation des réels en machines

- assurer la précision derrière la virgule
- pouvoir représenter de grands nombres

Solutions classiques

- Virgule fixe
- Virgule flottante

Virgule fixe

Nombre fixe de chiffres après la virgule

- Opérations plus simples $\rightarrow$ processeurs moins chers
- Plus facile à coder dans la machine

Deux parties

- La partie entière codée en binaire (complément à deux)
- La partie décimale : chaque bit correspond à l'inverse d'une puissance de 2

Exemple

$$-3,625_{10} = \underbrace{1111111111111101}_{-3} \quad \underbrace{1010000000000000}_{0,625 = 0,5 + 0,125 = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8}}$$

Limites de la représentation en virgule fixe

Représentation rigide

- Petits nombres : gaspillage des chiffres à gauche de la virgule
- Peu de décimales : gaspillage à droite
- Plus simple à mettre en œuvre, pour des ordres de grandeur comparables

Bornes

Si n est le nombre de bits de la partie entière, et d est le nombre de bits de la partie fractionnaire

- Borne maximale : $2^{n-1} - \frac{1}{2^d}$
- Borne minimale : -2^{n-1}

Virgule flottante

Solution la plus répandue

- Norme IEEE 754: deux formats (32 bits et 64 bits) selon précision (simple et double)
- Utilisés dans tous les ordinateurs actuels : implémentation matérielle de ce codage par le processeur.

Un triplet pour coder une valeur

- Le signe s (sur un bit)
- La mantisse m
- L'exposant e : $x = sm\beta^e$

Exemples

$$-1540,412654 = -1,540412654.10^3$$

$$101110,001101 = 1,01110001101 \times 2^5$$

Virgule flottante IEEE 754

- Mantisse de taille fixée
- On fait flotter la virgule en faisant varier e pour que le premier chiffre significatif ($\neq 0$) soit juste avant la virgule
- En base 2, le chiffre significatif est égal à 1 et il suffit donc de coder les chiffres après la virgules.
- Deux précisions possibles :

	mantisse	exposant	taille totale
Simple précision	23	8	32
Double précision	52	11	64

Exemple de représentation d'un nombre

$-6,625_{10}$ En simple précision

- Binaire (valeur absolue) : 110,101
- Normalisation de la mantisse : $1,10101.2^2$
- Occupation des 24 bits de mantisse $1,\underbrace{10101000000000000000000}$
- Décalage de l'exposant (en simple précision 127) donc exposant $= (2+127)_{10} = 10000001_2$
- Signe $= 1$ car négatif

On obtient donc :

$$\underbrace{1}_{\text{signe}} \quad \underbrace{10000001}_{\text{exposant}} \quad \underbrace{10101000000000000000000}_{\text{mantisse}}$$

Bugs dus à la représentation des nombres

Patriot Missile Failure (virgule fixe)

- Anti missile Patriot : mesure du temps par une horloge cadencée au dixième de seconde, dès leur mise sous tension.
- Durée écoulée = nb de tics x $\frac{1}{10}$.
- Le nombre $\frac{1}{10}$ est codé en virgule fixe sur 24 bits : $0.1 = 0.00011001100110011001100$
- L'erreur commise sur la fraction est donc : $0.00000000000000000000001100 \approx 9.54 \times 10^{-8}$
- 100 h après le boot : décalage d'horloge de : $100 \times 3600 \times 10 \times 9.54 \times 10^{-8} = 0,34\,s$
- Vitesse de 1 676 m/s $\Rightarrow 0,34 \times 1676 > 500\,m$ (hors fenêtre)

Cet incident qui a coûté la vie à plusieurs dizaines de personnes le 25 février 1991. Source : Rapport du Gao

Ariane V (conversion)

Le 4 Juin 1996, le vol 501 (Ariane 5) explose 37 secondes après le décollage.

Le problème vient d'une erreur logicielle.

Un nombre flottant (accélération horizontale), codé sur 64 bits est converti en entier signé. Sa valeur dépasse le plus grand entier signé représentable sur 16 bits et la conversion échoue (exception) provoquant une erreur dans le système de référence inertielle. Source : Flight 501 Failure

Bourse de Vancouver (arrondis)

En 1984, la bourse de Vancouver crée son indice (qui indique si la bourse est en hausse ou en baisse) initialisé à 1000. Il est recalculé 3000 fois par jour. À chaque fois, on ne conserve que 3 décimales (troncature).

$\Rightarrow$ Au bout de 10 ans, l'indice vaut 500

Sa valeur réelle est pourtant $>$ à 1000.

Source : The Wall Street Journal November 8, 1983, p. 37

Bug des GPS

Le compteur des semaines d'un GPS grand public est un entier codé sur 10 bits. Après la semaine 1023, on passe à la semaine 0... Ceci (Week Number Roll0ver ou WNRO) s'est produit pour la première fois le 21 août 1999 et se reproduira le 6 avril 2019.

Source : Memorandum on GPS