Complexité des algorithmes

Bloc 1 - DIU

Aix-Marseille Université

avril 2019

Complexité des algorithmes

On veut

- Evaluer l'efficacité de la méthode $\mathcal{M}$
- Comparer $\mathcal{M}$ avec une autre méthode $\mathcal{M}'$

indépendamment de l'environnement (machine, système, compilateur, ...)

Complexité des algorithmes

Evaluation du nombre d'opérations élémentaires en fonction

- de la taille des données (par ex. le nombre d'éléments à trier)
- de la nature des données (provoquant par ex. la sortie d'une boucle)

Notations :

- n : taille des données,
- $T(n)$: nombre d'opérations élémentaires

Configurations caractéristiques :

- meilleur cas,
- **pire des cas**,
- cas moyen.

Evaluation de $T(n)$ (séquence)

Somme des coûts.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Traitement1} & T_1(n) \\ \text{Traitement2} & T_2(n) \end{array}\right\} \quad T(n) = T_1(n) + T_2(n)$$

Evaluation de $T(n)$ (embranchement)

Max des coûts.

si $<$ condition $>$ **alors**	$T_c(n)$
Traitement1	$T_1(n)$
sinon	
Traitement2	$T_2(n)$

$$T_c(n) + max(T_1(n), T_2(n))$$

Evaluation de $T(n)$ (boucle)

Somme des coûts des passages successifs

tant que $<$ condition $>$ **faire**	$C_i(n)$
Traitement	$T_i(n)$
fin faire	

$$\sum_{i=1}^{k}(C_i(n) + T_i(n)) + C_{k+1}(n)$$

$T_i(n)$: coût de la i^{eme} itération

souvent défini par une équation récursive

Evaluation de $T(n)$ (fonctions récursives : exemple)

fonction FonctionRecursive (n)

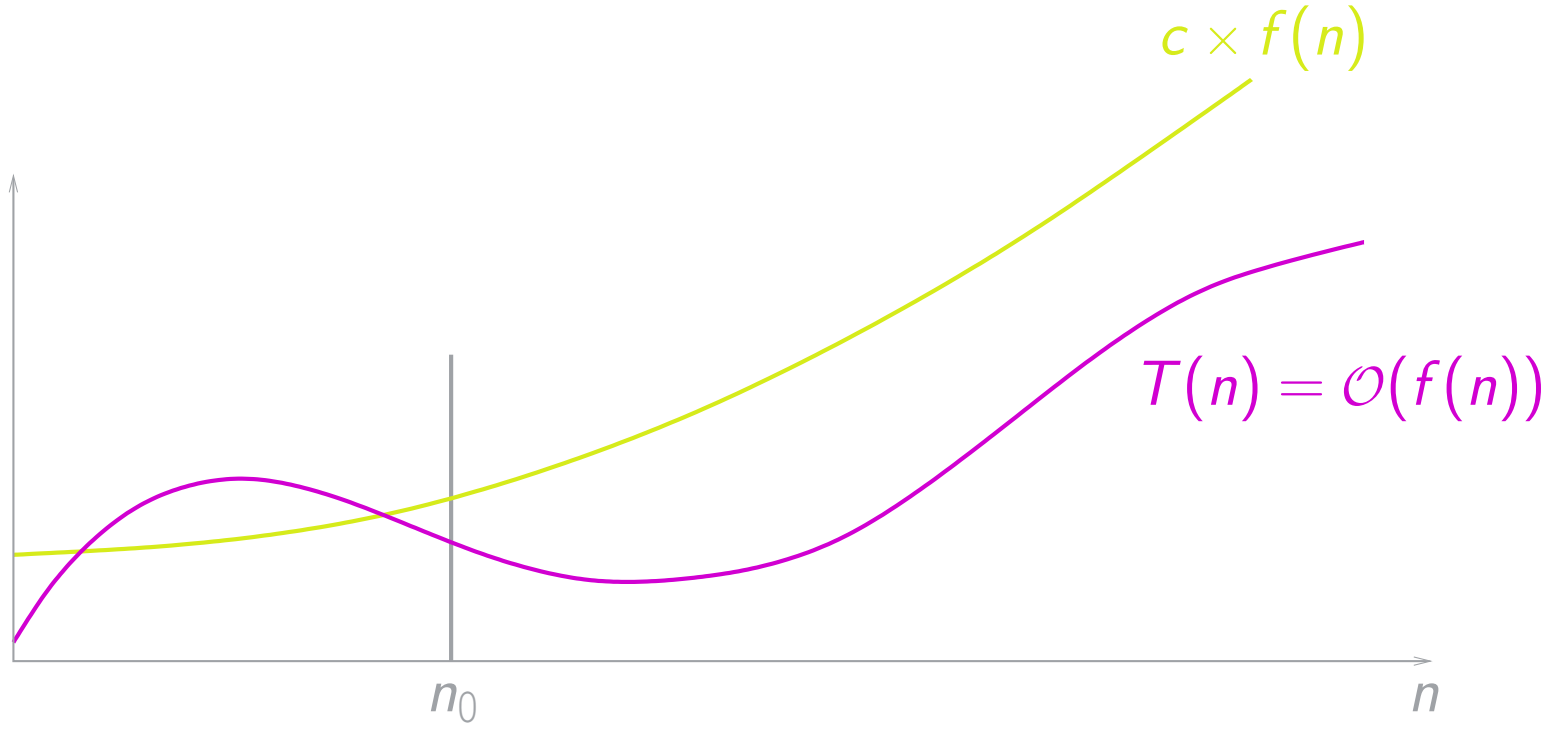
```
1  si (n > 1) alors
2      FonctionRecursive(n/2),        coût T(n/2)
3      Traitement(n),                 coût C(n)
4      FonctionRecursive(n/2),        coût T(n/2)
```

Equation récursive

$$T(n) = 1 + 2 \times T(n/2) + C(n)$$

si $C(n) = 1$ alors $T(n) = K \times n$
si $C(n) = n$ alors $T(n) = K \times n \times \log\ n$
...

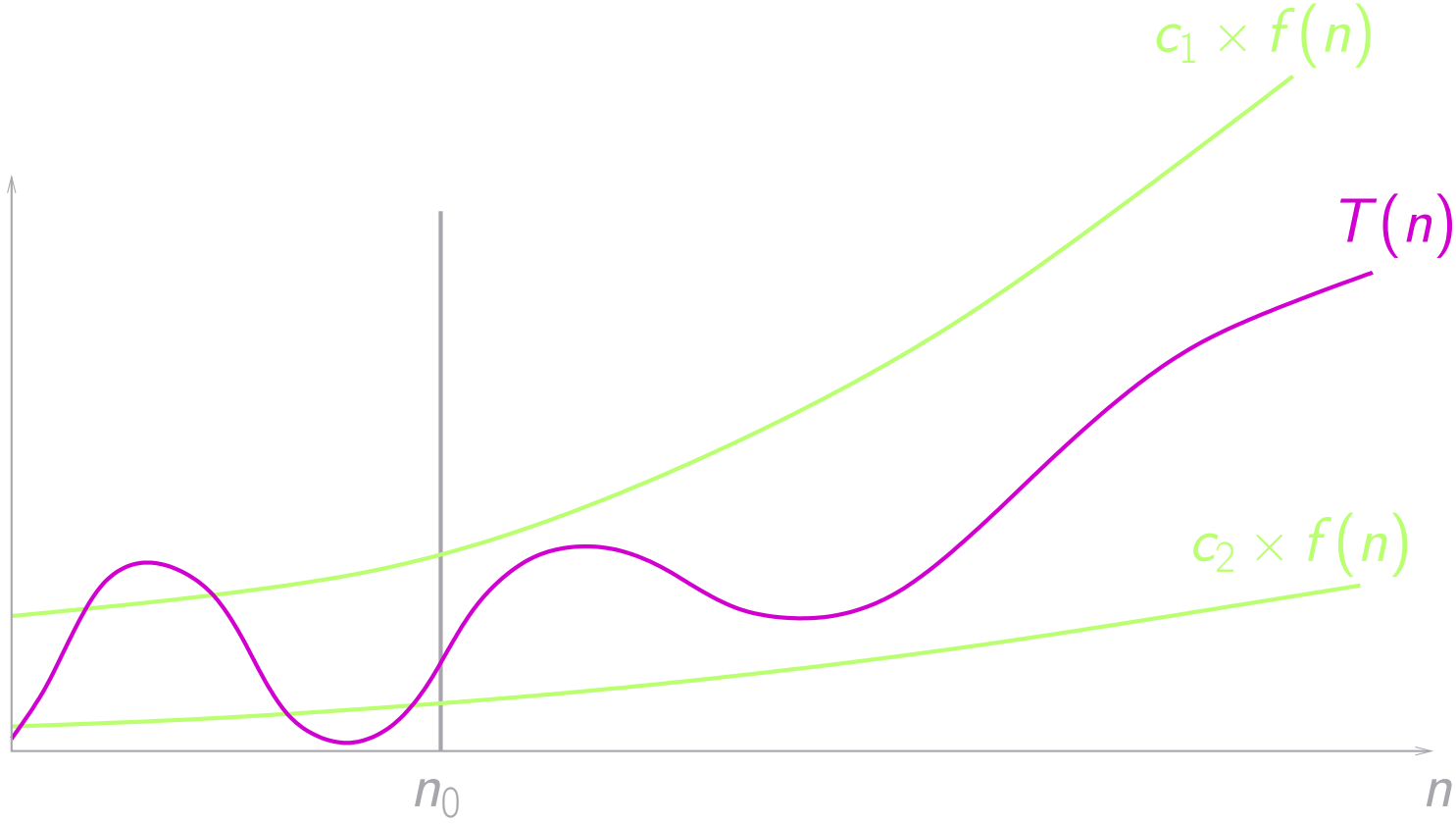
Notation de Landau $\mathcal{O}(f(n))$



Caractérise le comportement asymptotique (i.e. qd $n \to \infty$).

$T(n) = \mathcal{O}(f(n))$ si $\exists c\ \exists n_0$ tels que $\forall n > n_0,\ T(n) \leq c \times f(n)$

Notation $\Theta(f(n))$



$T(n) = \Theta(f(n))$ si $\exists c_1, c_2, n_0$ tels que

$$\forall n > n_0, \quad c_1 \times f(n) \leq T(n) \leq c_2 \times f(n)$$

Exemples

$$T(n) = n^3 + 2\ n^2 + 4\ n + 2 = \mathcal{O}(n^3)$$

(si $n \geq 1$ alors $T(n) \leq 9 \times n^3$)

Exemples

$$T(n) = n^3 + 2\ n^2 + 4\ n + 2 = \mathcal{O}(n^3)$$

(si $n \geq 1$ alors $T(n) \leq 9 \times n^3$)

$$T(n) = n\ \log\ n + 12\ n + 2 = \mathcal{O}(n\ \log\ n)$$

Exemples

$$T(n) = n^3 + 2\ n^2 + 4\ n + 2 = \mathcal{O}(n^3)$$

(si $n \geq 1$ alors $T(n) \leq 9 \times n^3$)

$$T(n) = n\ \log\ n + 12\ n + 2 = \mathcal{O}(n\ \log\ n)$$

$$T(n) = 2\ n^{10} + n^7 + 12\ n^4 + \frac{2^n}{100} = \mathcal{O}(2^n)$$

Les principales classes de complexité

$\mathcal{O}(1)$	temps constant
$\mathcal{O}(\log\ n)$	logarithmique
$\mathcal{O}(n)$	linéaire
$\mathcal{O}(n \times \log\ n)$	tris par comparaisons optimaux
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratique, polynomial
$\mathcal{O}(n^3)$	cubique, polynomial
$\mathcal{O}(2^n)$	exponentiel (problèmes très difficiles)

Exemple : permutation dans un tableau

fonction PERMUTATION (S, i, j)

1	$tmp := S[i]$,	coût c_1
2	$S[i] := S[j]$,	coût c_2
3	$S[j] := tmp$,	coût c_3
4	**renvoyer** S	coût c_4

Coût total

$$T(n) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \mathcal{O}(1)$$

Exemple : recherche séquentielle

fonction RECHERCHE_SEQUENTIELLE$(x, S[1, \ldots, n])$

```
1  i := 1,                                              (c1)
2  tant que ((i < n) et (S[i] ≠ x)) faire               (c2)
3      i := i + 1,                                      (c3)
4  renvoyer (S[i] = x)                                  (c4)
```

Pire des cas : n fois la boucle

$$T(n) = c_1 + c_2 + \sum_{i=1}^{n}(c_3 + c_2) + c_4 = \mathcal{O}(n)$$

Exemple : tri à bulle

fonction TRI_A_BULLES $(S[1, \ldots, n])$

1	**pour** $i := n$ **à** 2 **faire**	
2	**pour** $j := 1$ **à** $i - 1$ **faire**	
3	**si** $(S[j] > S[j+1])$ **alors**	$i - 1$ fois
4	PERMUTER$(S, j, j+1)$,	C_{perm}

$$T(n) = (1 + C_{perm}) \times \sum_{i=1}^{n-1} i = (1 + C_{perm}) \times \frac{n \times (n-1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$$

Equations récursives

Boucles itératives, fonctions récursives, approches de type diviser pour régner

Cas général

$$T(n) = a \times T(n/b) + f(n)$$

- méthode par substitution,
- méthode par développement itératif,
- méthode générale.

Méthode par substitution

Principe : on vérifie une **intuition**

$$T(n) = a \times T(n/b) + f(n) \text{ et } T(1) = c$$

Intuition

$$T(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

A démontrer en fixant les constantes

Méthode par substitution [recherche dichotomique]

fonction RECHERCHE_DICHOTOMIQUE $(x, S[1, \ldots, n])$

1	$g := 0,\ d := n + 1,$	$g < \mathit{position} \leq d$
2	**tant que** $(g < d - 1)$ **faire**	*termine quand* $g = d - 1$
3	**si** $(x > S[(g + d)/2])$ **alors**	$g < (g + d)/2 < d$
4	$g := (g + d)/2,$	*et donc* $g < \mathit{position} \leq d$
5	**sinon**	
6	$d := (g + d)/2,$	*et donc* $g < \mathit{position} \leq d$
7	**renvoyer** $d,$	$g < \mathit{position} \leq d$ *et* $g = d - 1$

position : la position de x s'il apparaît dans $S[]$, la position à laquelle il faudrait l'insérer sinon

Méthode par substitution [recherche dichotomique]

fonction RECHERCHE_DICHOTOMIQUE $(x, S[1, \ldots, n])$

1	$g := 0,\ d := n + 1,$	$g < \mathit{position} \leq d$
2	**tant que** $(g < d - 1)$ **faire**	*termine quand* $g = d - 1$
3	**si** $(x > S[(g + d)/2])$ **alors**	$g < (g + d)/2 < d$
4	$g := (g + d)/2,$	*et donc* $g < \mathit{position} \leq d$
5	**sinon**	
6	$d := (g + d)/2,$	*et donc* $g < \mathit{position} \leq d$
7	**renvoyer** $d,$	$g < \mathit{position} \leq d$ *et* $g = d - 1$

Nombre d'itérations : $T(n) = 1 + T(\lceil n/2 \rceil)$

Méthode par substitution [recherche dichotomique]

Nombre d'itérations

$$T(n) = 1 + T(n/2) \text{ et } T(1) = 1$$

- $T(1) = 1$ car s'il y a un seul élément on fera une itération
- $T(\lceil n/2 \rceil) = T(n/2)$
  (pour simplifier on considère que n est de la forme 2^k)

Méthode par substitution [recherche dichotomique]

$T(n) = 1 + T(n/2)$ et $T(1) = 1$

Intuition $T(n) = \mathcal{O}(\log_2 n)$

Hypothèse $T(n) = k_1 \times \log_2 n + k_2$

donc $T(n/2) = k_1 \times \log_2 n - k_1 + k_2$
donc $T(n) = 1 + T(n/2) = 1 + k_1 \times \log_2 n - k_1 + k_2 = k_1 \times \log_2 n + k_2$
donc $1 - k_1 + k_2 = k_2$ et donc $k_1 = 1$,
et puisque $T(1) = 1$ donc $k_2 = 1$

Conclusion $T(n) = \log_2 n + 1 = \mathcal{O}(\log_2 n)$ $(\Theta(\log_2 n))$

Méthode itérative : rappel sommations

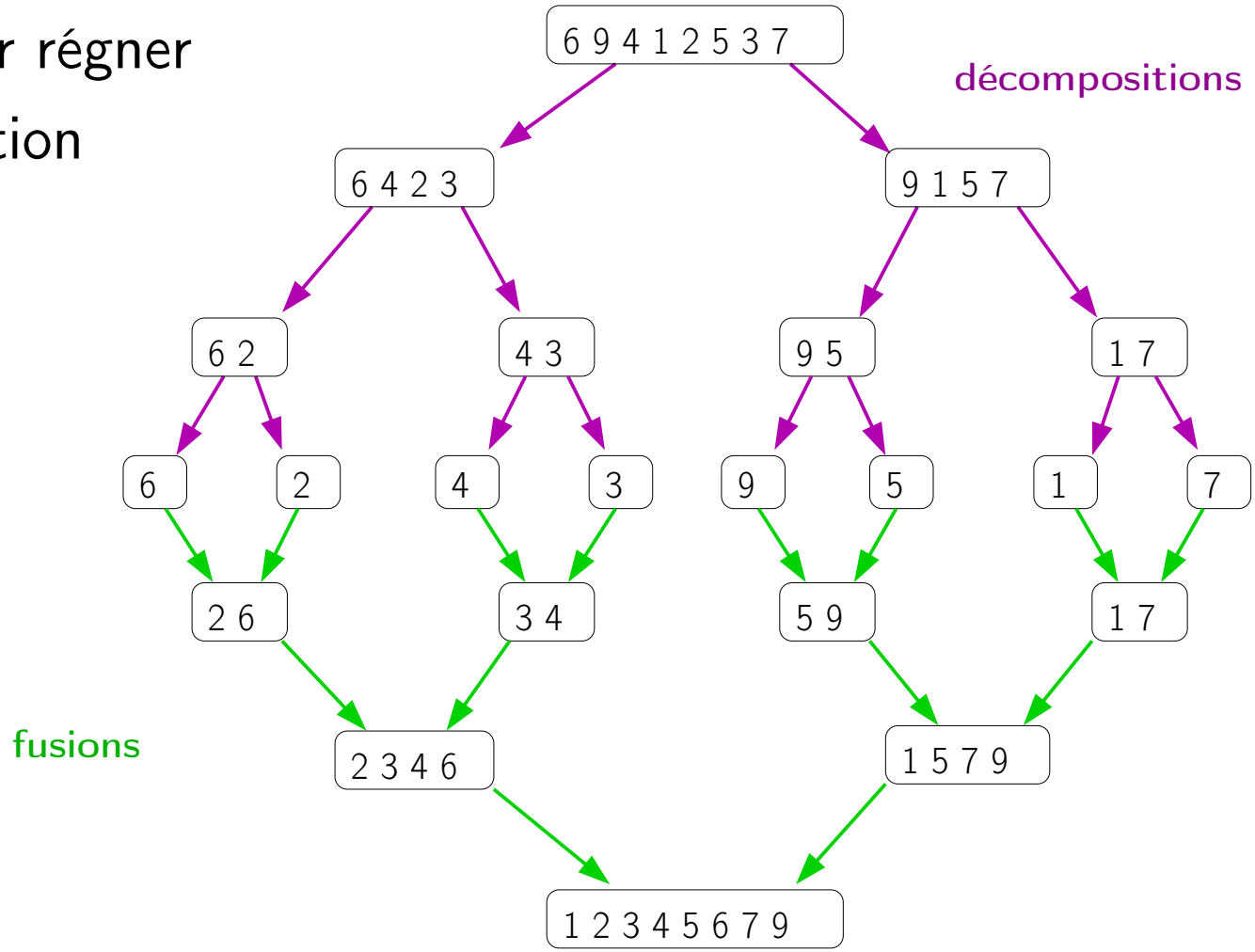
- $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n \times (n-1)}{2} = \Theta(n^2) = \mathcal{O}(n^2)$
- $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

en particulier quand x vaut 2

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Tri par fusion

- diviser pour régner
- décomposition
- fusion



Tri par fusion

fonction TRI_PAR_FUSION (S)

1 **si** $(longueur(S) > 1)$ **alors**
2 | $décomposer\ S \longrightarrow (S_1, S_2)$, (n)
3 | $S_1 :=$ TRI_PAR_FUSION(S_1), $(T(\lceil n/2 \rceil))$
4 | $S_2 :=$ TRI_PAR_FUSION(S_2), $(T(\lfloor n/2 \rfloor))$
5 | $S :=$ FUSIONNER(S_1, S_2), (n)
6 **renvoyer** S

$$T(n) = 1 + n + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad \text{et} \quad T(1) = 1$$

Tri par fusion

fonction TRI_PAR_FUSION (S)

1 **si** $(longueur(S) > 1)$ **alors**
2 | $décomposer\ S \longrightarrow (S_1, S_2)$, (n)
3 | $S_1 :=$ TRI_PAR_FUSION(S_1), $(T(\lceil n/2 \rceil))$
4 | $S_2 :=$ TRI_PAR_FUSION(S_2), $(T(\lfloor n/2 \rfloor))$
5 | $S :=$ FUSIONNER(S_1, S_2), (n)
6 **renvoyer** S

$$T(n) = 1 + n + 2 \times T(n/2) + n$$

si n est de la forme 2^k

Méthode itérative [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2)$$

Méthode itérative [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2)$$

donc $T(n/2) = n + 1 + 2 \times T(n/4)$

Méthode itérative [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2)$$

donc $T(n/2) = n + 1 + 2 \times T(n/4)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + 4 \times T(n/4)$$

Méthode itérative [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2)$$

donc $T(n/2) = n + 1 + 2 \times T(n/4)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + 4 \times T(n/4)$$

or $T(n/4) = n/2 + 1 + 2 \times T(n/8)$

Méthode itérative [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2)$$

donc $T(n/2) = n + 1 + 2 \times T(n/4)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + 4 \times T(n/4)$$

or $T(n/4) = n/2 + 1 + 2 \times T(n/8)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + (2n + 4) + 8 \times T(n/8)$$

$$\ldots$$

Méthode itérative [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2)$$

donc $T(n/2) = n + 1 + 2 \times T(n/4)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + 4 \times T(n/4)$$

or $T(n/4) = n/2 + 1 + 2 \times T(n/8)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + (2n + 4) + 8 \times T(n/8)$$

$$\dots$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n - 1} (2n + 2^i) + 2^{\log n} \times T(1)$$

Méthode itérative [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2)$$

donc $T(n/2) = n + 1 + 2 \times T(n/4)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + 4 \times T(n/4)$$

or $T(n/4) = n/2 + 1 + 2 \times T(n/8)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + (2n + 4) + 8 \times T(n/8)$$

$$\dots$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n - 1} (2n + 2^i) + 2^{\log n} \times T(1)$$

$$= 2n \log n + \sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i + n$$

Méthode itérative [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2)$$

donc $T(n/2) = n + 1 + 2 \times T(n/4)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + 4 \times T(n/4)$$

or $T(n/4) = n/2 + 1 + 2 \times T(n/8)$

$$= (2n + 1) + (2n + 2) + (2n + 4) + 8 \times T(n/8)$$

$$\dots$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n - 1} (2n + 2^i) + 2^{\log n} \times T(1)$$

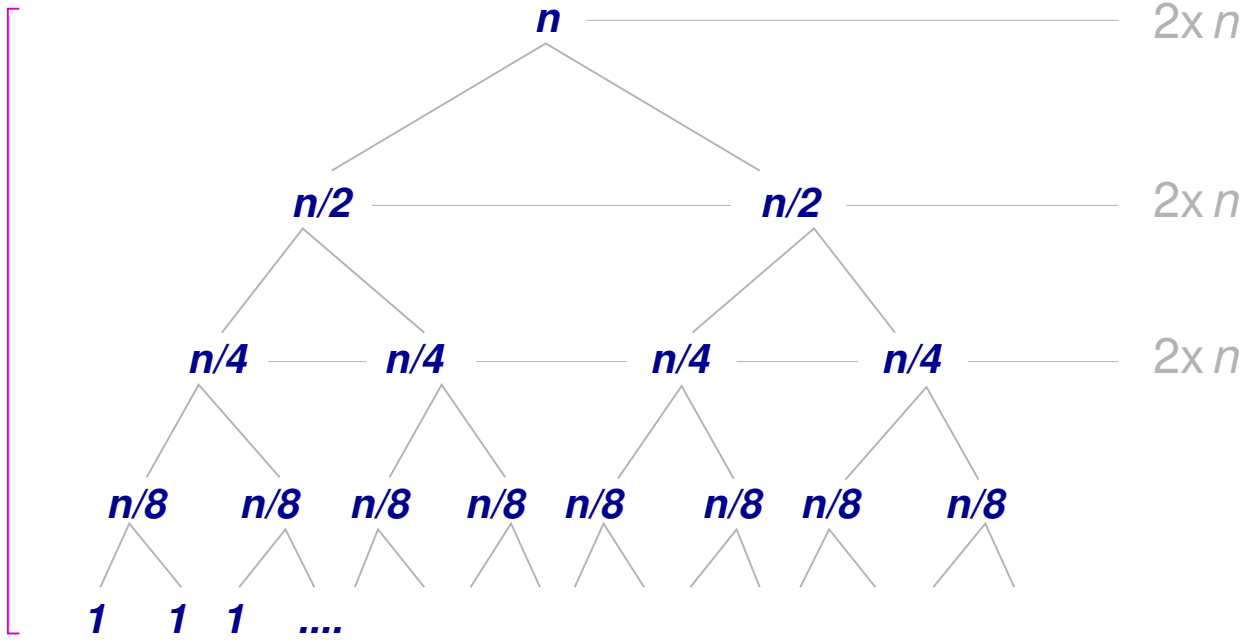
$$= 2n \log n + \sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i + n$$

$(\sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i = 2^{\log n} - 1 = n - 1)$

$$= 2n \log\ n + 2n - 1 = \Theta(n \log\ n)$$

Tri par fusion

hauteur $\lceil \log n \rceil$



k traitements pour décomposer ou fusionner une suite de longueur k

$$T(n) = 2 \times n \times \lceil \log_2 n \rceil$$

Méthode générale [Equations récursives]

$$T(n) = a \times T(n/b) + f(n)$$

avec $a \geq 1$, $b > 1$ et $f(n)$ est positive asymptotiquement.

- si $\exists \epsilon > 0,\ f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b\ a-\epsilon})$ alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b\ a})$,
- si $f(n) = \Theta(n^{\log_b\ a})$ alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b\ a} \times \lg\ n)$,
- si $\exists \epsilon > 0,\ f(n) = \Omega(n^{\log_b\ a+\epsilon})$ et
  si $\exists c < 1,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0,\ a \times f(n/b) \leq c \times f(n)$ alors
  $T(n) = \Theta(f(n))$

Méthode générale [Equations récursives]

$$T(n) = a \times T(n/b) + f(n)$$

avec $a \geq 1$, $b > 1$ et $f(n)$ est positive asymptotiquement.

- si $\exists \epsilon > 0,\ f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b\ a-\epsilon})$ alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b\ a})$,
- si $f(n) = \Theta(n^{\log_b\ a})$ alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b\ a} \times \lg\ n)$,
- si $\exists \epsilon > 0,\ f(n) = \Omega(n^{\log_b\ a+\epsilon})$ et
  si $\exists c < 1,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0,\ a \times f(n/b) \leq c \times f(n)$ alors
  $T(n) = \Theta(f(n))$

Tri par fusion $(T(n) = 2 \times T(n/2) + 2n + 1)$ cas 2 :

$a = b = 2$ et $f(n) = 2n + 1 = \Theta(n)$

et donc $T(n) = \Theta(n\ \log\ n)$

Méthode par substitution [tri par fusion]

$$T(n) = 2n + 1 + 2 \times T(n/2) \text{ et } T(1) = 1$$

Hypothèse : $T(n) = \mathcal{O}(n \log n) = an \log n + bn + c$

et donc $T(n/2) = an/2 \log n + (b - a)n/2 + c$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2n + 1 + 2T(n/2) = 2n + 1 + an \log n + (b - a)n + 2c \\ &= an \log n + (b - a + 2)n + 2c + 1 \end{aligned}$$

(1) $b = b - a + 2$ et donc $a = 2$
(2) $c = 2c + 1$ et donc $c = -1$
(3) $T(1) = b + c = 1$ et donc $b = 2$

et finalement $T(n) = 2n \log n + 2n - 1 = \mathcal{O}(n \log n)$

Temps de calcul [simulation]

Combien de temps pour traiter un problème ?

Taille	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2	2^n
10	0.003 *ms*	0.01 *ms*	0.03 *ms*	0.1 *ms*	1 *ms*
100	0.006 *ms*	0.1 *ms*	0.6 *ms*	10 *ms*	10^{14} *siecles*
1000	0.01 *ms*	1 *ms*	10 *ms*	1 *s*	
10^4	0.013 *ms*	10 *ms*	0.1 *s*	100 *s*	
10^5	0.016 *ms*	100 *ms*	1.6 *s*	3 *heures*	
10^6	0.02 *ms*	1 *s*	20 *s*	10 *jours*	

pour une machine qui effectue 10^6 traitements par seconde

Temps de calcul [simulation]

Quel problème peut-on traiter en une seconde ?

nTs	2^n	n^2	$n \log_2 n$	n	$\log_2 n$
10^6	20	1000	63000	10^6	10^{300000}
10^7	23	3162	600000	10^7	$10^{3000000}$
10^9	30	31000	4.10^7	10^9	
10^{12}	40	10^6	3.10^{10}		

nTs = nombre d'instructions effectuées chaque seconde