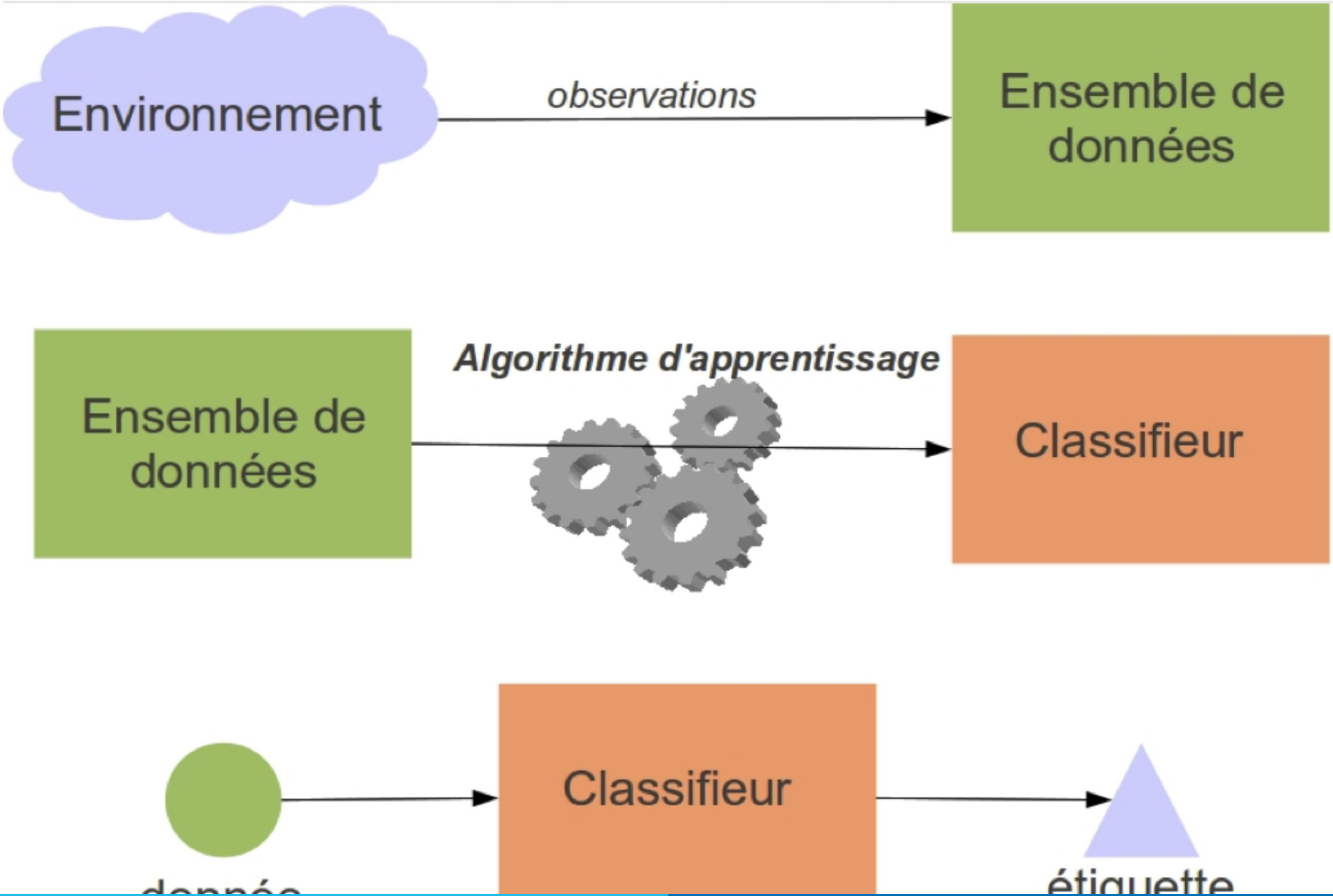
Algorithme des k plus proches voisins

Cécile Capponi, Valentin Eymia, Rémi Eyraud (revu par Benjamin Monmege benjamin.monmege@univ-amu.fr)

12 ou 18 avril 2019

Introduction à l'apprentissage automatique

Schéma global



Science des données

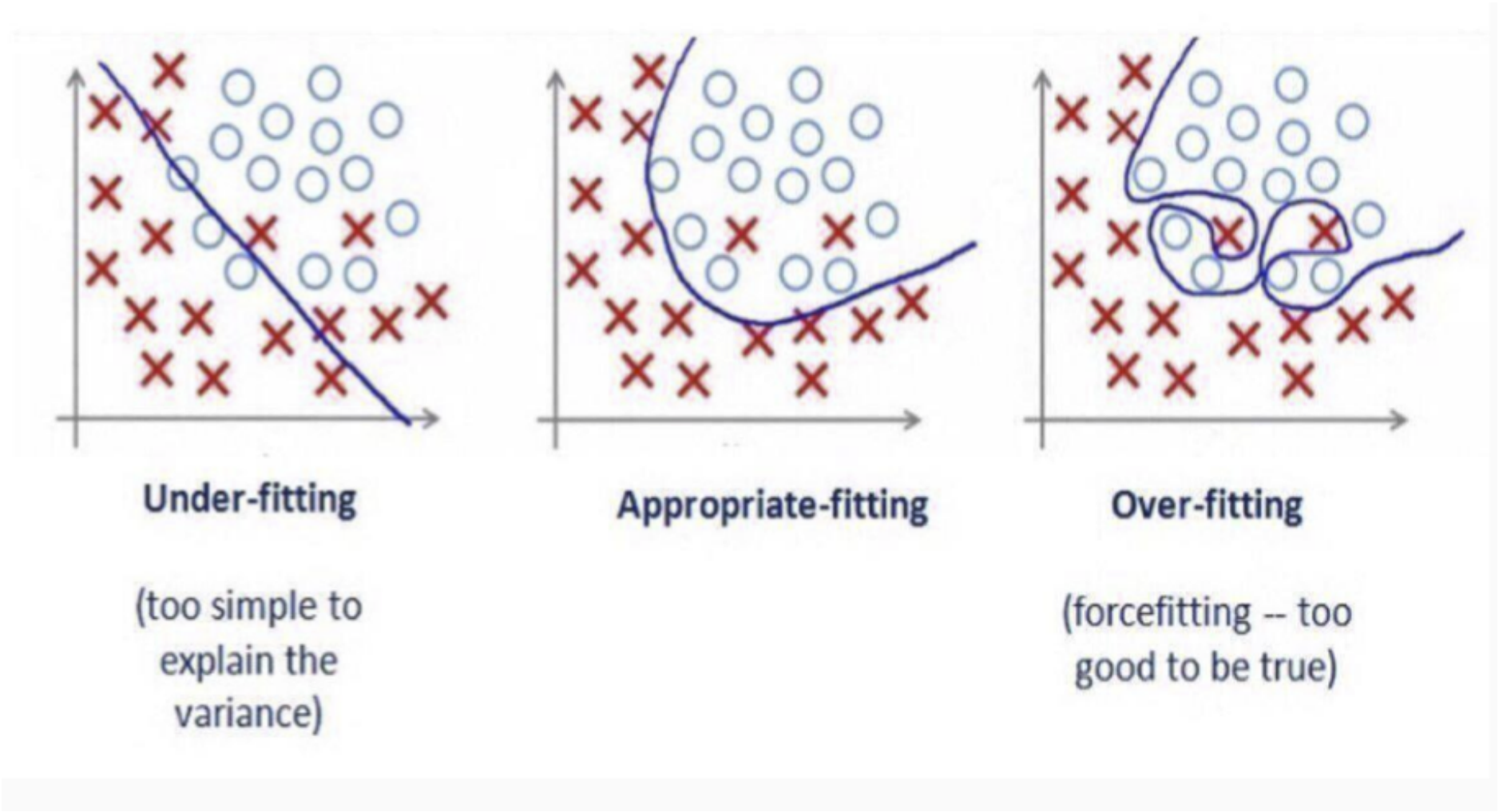
- **Analyse de données** : aller plus loin que les statistiques descriptives
- **But** : extraire automatiquement des données la connaissance permettant de prendre des bonnes décisions à l'avenir (sur d'autres / de nouvelles données)
- **Moyen** : inférer un modèle (mathématique...) qui capture les régularités observables dans les données d'apprentissage (principe de généralisation)

Exemple

Alors que vous venez juste d'atterrir au Groland pour la première fois, vous apercevez un mouton noir. Quelles conclusions en tirer ?

- Il y a un et un seul mouton noir au Groland : apprentissage par coeur, *sous-généralisation*
- Certains moutons sont noirs au Groland
- Tous les moutons du Groland sont noirs : *sur-généralisation*

Sous-, sur-, correcte généralisation



Classification supervisée : de vraies applications

- **But** : écarter automatiquement les SPAM et autres messages non sollicités.
- **Données** : des messages dont on sait s'ils sont des SPAMs ou non.
- **Objectif** : construire un classifieur, capable d'attribuer une de ces deux classes à un nouveau message.

Classification supervisée : de vraies applications

- **But** : écarter automatiquement les SPAM et autres messages non sollicités.
- **Données** : des messages dont on sait s'ils sont des SPAMs ou non.
- **Objectif** : construire un classifieur, capable d'attribuer une de ces deux classes à un nouveau message.

- **But** : reconnaissance de chiffres manuscrits.
- **Données** : des chiffres écrits sur une rétine de 16×16 pixels, associés à une classe parmi $\{0, 1, \cdots, 9\}$
- **Objectif** : attribuer la bonne classe (pattern recognition).

Une première méthode très simple : k-plus proches voisins

Données

- Attributs : un ensemble $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d$ où chaque X_i est le domaine d'un attribut A_i numérique.

Exemple : A_1 =age, $X_1 = [0; 122]$, A_2 =fumeur, $X_2 = \{0, 1\}$ (non/oui)

- Classes (ou étiquettes) : un ensemble fini de classes Y.

Exemple : $Y = \{$patient à risque, patient sans risque$\}$

Données

Ensemble des attributs
$\mathbf{X} = X_1 \times X_2$ avec
X_1 = age et
X_2 = Fumeur

Classes Y
Valeurs possibles : {risque, pas risque}

Age	Fumeur	Risque cardio
35	oui	risque
40	non	pas risque
60	oui	risque

Classifieur

$$f : X \to Y$$

Exemple : $f(x) =$ Si fumeur=‘oui’ et age > 59 alors ‘risque’ sinon ‘pas risque’

- Fonction de perte (*loss function*) : $L(y_i, f(x_i)) = 0$ si $y_i = f(x_i)$ et 1 sinon.

Exemple : $L('risque', f((35,' oui'))) = 1$ et $L('risque', f((65,' oui')) = 0$

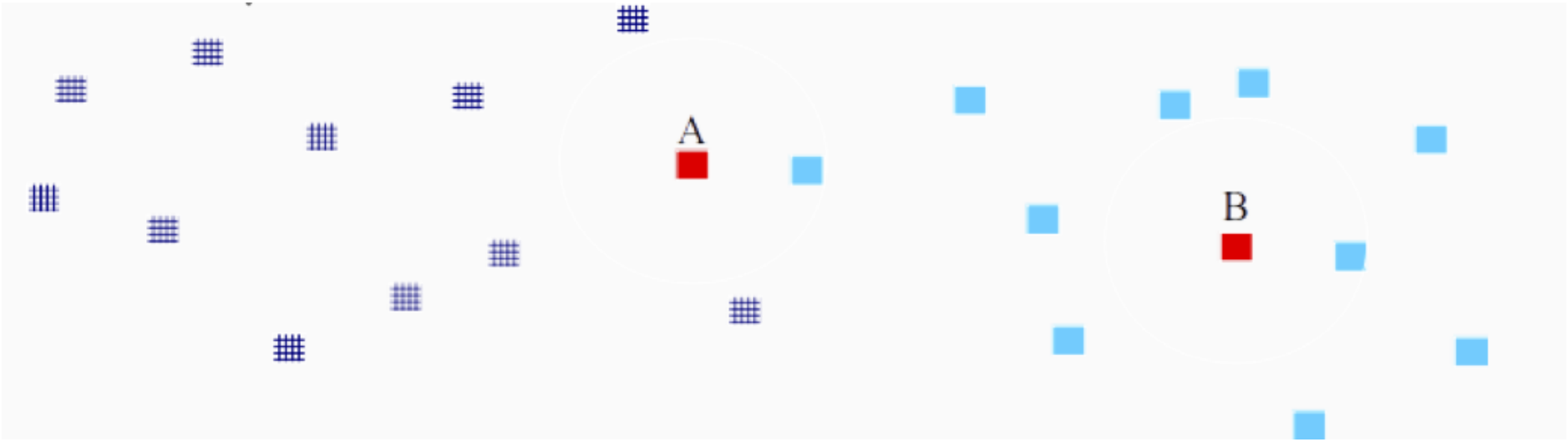
Principe

- **Objectif** : pouvoir prédire la classe d'un nouvel exemple en utilisant les exemples déjà connus
- **Principe** :
  1. Regarder la classe des k exemples *les plus proches*
  2. Affecter la classe majoritaire dans le voisinage du nouvel exemple

Principe

- **Objectif** : pouvoir prédire la classe d'un nouvel exemple en utilisant les exemples déjà connus
- **Principe** :
  1. Regarder la classe des k exemples *les plus proches*
  2. Affecter la classe majoritaire dans le voisinage du nouvel exemple

Exemple : 2 classes, dimension 2



Algorithme des k plus proches voisins

- Entrée : $S = \{(x, y) \mid x \in X \subseteq \mathbf{R}^d, y \in Y \subseteq \mathbf{R}\}$ l'échantillon d'apprentissage de taille n, x_{test} l'exemple à classer

```
Initialiser à 0 le nombre d'occurrences de chaque classe
Pour chaque exemple (x, y) dans S :
    Calculer la distance D(x, xtest)
k-voisinage := k plus proches voisins de xtest
Pour chaque x' dans k-voisinage, associé à la classe y' :
    Ajouter 1 au nombre d'occurrences de la classe y'
Retourner la classe la plus fréquente
```

Comment calculer les k plus proches voisins ?

- Extraction des k minimums un par un : $\mathcal{O}(kn)$

Comment calculer les k plus proches voisins ?

- Extraction des k minimums un par un : $\mathcal{O}(kn)$
- Tri des voisins par distance croissante puis extraction en bloc : $\mathcal{O}(n \log n + k)$

Que faire en cas d'égalité ?

Et si 2 classes ou plus sont aussi fréquentes dans le k-voisinage ?

On peut :

- Augmenter k de 1
- Tirer une classe au hasard parmi les plus fréquentes
- Attribuer la classe majoritaire dans les données
- Pondérer les exemples par leur distance à la donnée à classer

Limites

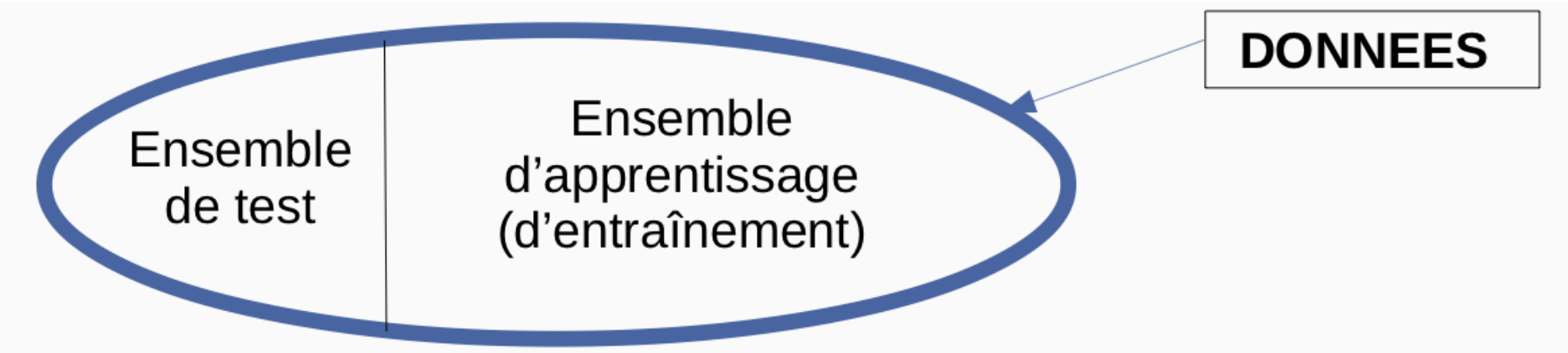
- Nécessite une notion de distance pertinente pour la classification
- Complexité en $\mathcal{O}((k+d)n)$ ne passant pas à l'échelle :
  - réduction de l'échantillon d'apprentissage a priori,
  - réduction de la taille des données (analyse en composantes principales),
  - organiser les données dans des structures permettant d'accélérer la décision...

Validation d'un apprentissage

Plusieurs méthodes permettent de valider (ou d'infirmer) la qualité d'un processus d'apprentissage.

Une des approches consiste à n'utiliser qu'une partie des données pour apprendre et à se servir des autres données pour tester le résultat.

Différentes mesures permettent alors de comparer des processus (taux d'erreur, F-score, etc.)



D'autres méthodes d'apprentissage ?

- Arbres de décision
- Perceptron
- Réseaux de neurones

Bloc 4 du DIU EIL !