

1 Questions de cours

1.1 Affirmations

Pour chacune des affirmations suivantes dites si elle est vraie ou fausse en justifiant brièvement et de façon convaincante votre réponse.

1. Les grammaires LR ne sont pas ambiguës.
2. La grammaire avec les règles suivantes est $LR(1)$: $\{S \rightarrow X|Y, X \rightarrow a, Y \rightarrow a\}$
3. La grammaire avec les règles suivantes est $LR(1)$: $\{S \rightarrow Xb|Yc, X \rightarrow a, Y \rightarrow a\}$
4. Les grammaires hors contexte ambiguës ne peuvent pas être reconnues par un automate à pile.
5. La grammaire $A \rightarrow XY, X \rightarrow a|\varepsilon, Y \rightarrow a$ n'est pas ambiguë.
6. Seules les grammaires récurives peuvent générer des langages infinis (une grammaire est récurive si elle contient un non-terminal A tel que $A \xRightarrow{*} \alpha A \beta$ avec $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$).
7. Le langage généré par la grammaire $\langle \{S, X\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow X, X \rightarrow a, X \rightarrow b\}, S \rangle$ peut être reconnu par un automate à pile déterministe.
8. Il est possible qu'un même mot possède deux dérivations gauches différentes avec une grammaire ambiguë.

1.2 Premier, Suivant, dérivation, ambiguïté

Soit la grammaire G_1 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A X D \\ A &\rightarrow a \mid \varepsilon \\ X &\rightarrow B C \mid B \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \\ C &\rightarrow c \mid \varepsilon \\ D &\rightarrow d \mid \varepsilon \end{aligned}$$

1. Calculez les ensembles PREMIER et SUIVANT pour les symboles non terminaux de G_1 .
2. Démontrez que la grammaire G_1 est ambiguë.

2 Grammaires réduites

2.1 Définitions

Définition : Un symbole A est dit *utile* dans une grammaire $\langle N, \Sigma, P, S \rangle$ si $S \xRightarrow{*} \alpha A \beta$ pour $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$. Une règle $A \rightarrow \beta$ est dite *utile* si A est utile.

Exemple : On considère la grammaire $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ avec $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{x, y, z\}$ et P les règles de réécriture suivantes :

1. $S \rightarrow Axx$
2. $A \rightarrow Ay$
3. $A \rightarrow Az$
4. $A \rightarrow \varepsilon$
5. $B \rightarrow Cz$
6. $C \rightarrow By$

Les symboles B et C ne sont pas utiles et les règles associées ne sont pas utiles.

Définition : Une grammaire G est dite *réduite* si elle ne contient aucune règle inutile.

Exemple : On considère la grammaire $G' = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ avec $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{x, y, z\}$ et P les règles de réécriture suivantes :

1. $S \rightarrow Aaa$
2. $A \rightarrow Ab$
3. $A \rightarrow Ac$
4. $A \rightarrow \varepsilon$

Cette grammaire G' est réduite et elle est équivalente à la grammaire G définie ci-dessus.

2.2 Exercices

On considère la grammaire $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ avec $N = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ et P les règles de réécriture suivantes :

1. $S \rightarrow Aaa$
2. $A \rightarrow Ab$
3. $A \rightarrow AD$
4. $A \rightarrow \varepsilon$
5. $B \rightarrow Cc$
6. $B \rightarrow Cc$
7. $C \rightarrow Bb$
8. $C \rightarrow Cc$
9. $D \rightarrow cd$
10. $D \rightarrow abD$

Questions :

1. Cette grammaire est-elle réduite ?
2. Si la réponse est négative, donnez une grammaire équivalente (reconnaissant le même langage) qui est réduite.

3 Grammaires factorisées à gauche

3.1 Définitions

Définition : Une grammaire G , avec un ensemble de ses symboles non-terminaux N et un ensemble de symboles terminaux Σ est *factorisée à gauche* si elle **ne** contient **pas** deux règles, utiles et distinctes, ayant la forme suivante :

- $X \rightarrow \alpha\beta$
- $X \rightarrow \alpha\gamma$

où α, β et γ appartiennent à $(N \cup \Sigma)^*$ et où α ne se dérive pas en ϵ .

Algorithme de factorisation à gauche

Entrée : une grammaire $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$

Sortie : une grammaire équivalente factorisée à gauche

Méthode :

1. Pour chaque symbole non terminal A , trouver le plus long préfixe α commun à deux règles ou plus ayant A pour partie gauche ;
2. Remplacer toutes les règles ayant A pour partie gauche :

— $A \rightarrow \alpha\beta_1|\alpha\beta_2|\dots|\alpha\beta_n|\gamma$, où γ représente toutes les parties droites qui ne commencent pas par α ,

par :

— $A \rightarrow \alpha A'|\gamma$ et $A' \rightarrow \beta_1|\beta_2|\dots|\beta_n$

3. Répéter le processus si la grammaire a été modifié.

Exemple : On considère la grammaire $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ avec $N = \{E, S\}$, $\Sigma = \{i, t, e, a, b\}$ et P les règles de réécriture suivantes :

1. $S \rightarrow iEtS$
2. $S \rightarrow iEtSeS$
3. $S \rightarrow a$
4. $E \rightarrow b$

Cette grammaire n'est pas factorisée à gauche à cause des règles 1 et 2. On peut construire une grammaire G' reconnaissant le même langage avec $G' = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ avec $N = \{E, S'\}$, $\Sigma = \{i, t, e, a, b\}$ et P les règles de réécriture suivantes :

1. $S \rightarrow iEtSS'$
2. $S \rightarrow a$
3. $S' \rightarrow eS$

4. $S' \rightarrow \varepsilon$
5. $E \rightarrow b$

La factorisation gauche est l'une des conditions nécessaires pour faire une analyse descendante déterministe.

3.2 Exercices

Soit la grammaire suivante :

- $A \rightarrow aBc$
- $A \rightarrow aCBd$
- $B \rightarrow aAbc$
- $B \rightarrow cb$
- $B \rightarrow \varepsilon$
- $C \rightarrow bCaAbc$
- $C \rightarrow bCaB$

1. Cette grammaire est-elle factorisée ? Justifiez votre réponse.
2. Si la réponse est négative, quelles sont la ou les règles qu'il conviendrait de factoriser pour la simplifier ? Opérez les opérations de factorisation adéquates.

Soit maintenant un grand classique, avec l'échantillon de grammaire suivant :

- $I \rightarrow \text{if } C \ I$
- $I \rightarrow \text{if } C \text{ then } I$
- $I \rightarrow \text{while } C \ I$

3. Que peut-on dire de ce morceau de grammaire ? Comment l'arranger ?

4 Grammaires pour polynômes

4.1 Grammaire attribuée

Soit la grammaire G suivante :

$$\begin{aligned}
 P &\rightarrow M + P \mid M \\
 M &\rightarrow NT \\
 M &\rightarrow -NT \\
 T &\rightarrow x \wedge N \mid \varepsilon \\
 N &\rightarrow NC \mid C \\
 C &\rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9
 \end{aligned}$$

G permet de générer des polynômes d'une variable, notée x . Dans ces polynômes, l'opération puissance est représentée par le symbole $\wedge$ (x^2 s'écrit donc $x \wedge 2$).

1. Écrire l'arbre de dérivation du polynôme $-3x \wedge 5 + 6x \wedge 2 + 13$
2. On appelle degré d'un polynôme P le degré le plus élevé de ses termes (le degré du polynôme $-3x \wedge 5 + 6x \wedge 2 + 13$, par exemple, est 5). Écrire une grammaire attribuée à partir de G qui définit un attribut d permettant de calculer le degré du polynôme.
3. On souhaite calculer la valeur d'un polynôme pour une valeur donnée de la variable x . Pour cela on définit les attributs vx et vp . vx est la valeur de x et vp est la valeur du polynôme. Indiquer pour ces deux attributs s'ils sont hérités ou synthétisés et écrire une grammaire attribuée à partir de G permettant de calculer leurs valeurs.

Étant donné un polynôme P , on souhaite construire le polynôme P' , qui est le polynôme dérivé de P . Pour cela on rappelle les règles de dérivation suivantes :

$$\begin{aligned}
& \text{--- } (f + g)' = f' + g' \\
& \text{--- } (c \times f)' = c \times f' \\
& \text{--- } (c)' = 0 \\
& \text{--- } (x^c)' = \begin{cases} c \times x^{c-1} & \text{si } c > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Où, c est une constante, x la variable et f et g des fonctions. Si on applique ces règles à l'exemple précédent, on obtient $-15x \wedge 4 + 12x \wedge 1$.

4. Écrire une grammaire attribuée à partir de G qui définit un attribut δ permettant de construire la dérivée d'un polynôme sous la forme d'une chaîne de caractères.

4.2 Création de la table SLR

Soit la grammaire G_2 qui est une version simplifiée de la grammaire des polynômes :

$$\begin{aligned}
S & \rightarrow P \\
P & \rightarrow M + P \\
P & \rightarrow M \\
M & \rightarrow NT \\
T & \rightarrow x \wedge N \\
N & \rightarrow Nc \\
N & \rightarrow c
\end{aligned}$$

1. Construisez l'automate $LR(0)$ de G_2 (il y a 12 états).
2. Étant donné les ensembles SUIVANT de G_2 ci-dessous, construisez la table SLR de G_2

$$\text{SUIVANT}(P) = \{\perp\}$$

$$\text{SUIVANT}(T) = \{+, \perp\}$$

$$\text{SUIVANT}(M) = \{+, \perp\}$$

$$\text{SUIVANT}(N) = \{+, x, c, \perp\}$$

où $\perp$ représente le symbole de fond de pile et de fin de chaîne (que l'on note aussi des fois \$).

5 Analyse SLR

Soit la grammaire G_3 ci-dessous et sa table SLR correspondante :

- 1 $E \rightarrow E + T$
- 2 $E \rightarrow T$
- 3 $T \rightarrow T * F$
- 4 $T \rightarrow F$
- 5 $F \rightarrow (E)$
- 6 $F \rightarrow a$

Etat	Action						Aller à		
	a	+	*	(	)	\$	E	T	F
0	d5			d4			1	2	3
1		d6				acc			
2		r2	d7		r2	r2			
3		r4	r4		r4	r4			
4	d5			d4			8	2	3
5		r6	r6		r6	r6			
6	d5			d4				9	3
7	d5			d4					10
8		d6			d11				
9		r1	d7		r1	r1			
10		r3	r3		r3	r3			
11		r5	r5		r5	r5			

1. Simulez au moins les dix premières étapes de l'analyse LR du mot $(a + a) * a$. Les configurations sont représentées par le triplet (α, w, y) , où α est la pile avec le sommet à droite, w est la partie de la bande de lecture qui commence au caractère sous la tête de lecture (ce qui reste à analyser), et y est la séquence de symboles de sortie (numéros des productions appliquées lors des réductions).

6 Arbres

On s'intéresse dans cet exercice à des arbres dont les nœuds sont étiquetés par des entiers de 0 à 9. De tels arbres peuvent être représentés par une expression parenthésée dans laquelle un nœud est représenté par son étiquette suivie de la liste de ses fils entre parenthèses. L'expression $1(2(3())4())$, par exemple, représente l'arbre ayant 1 pour racine. Cette dernière possède elle-même deux fils (2 et 4) et 2 a un unique fils 3.

On appelle profondeur d'un nœud sa distance par rapport à la racine, dont la profondeur est 0. La hauteur d'un arbre est la profondeur maximale de ses nœuds. On appelle degré d'un nœud, le nombre de fils qu'il possède. Les nœuds de degré 0 sont appelés feuilles, les autres nœuds sont appelés nœuds internes.

Le langage des arbres est généré par la grammaire G ci-dessous (La première règle n'est pas nécessaire, mais elle sera utile pour la suite) :

$$\begin{aligned}
 R &\rightarrow N & E &\rightarrow 0 \\
 N &\rightarrow E(L) & E &\rightarrow 1 \\
 L &\rightarrow NL & &\dots \\
 L &\rightarrow \varepsilon & E &\rightarrow 9
 \end{aligned}$$

1. Dessinez l'arbre de dérivation correspondant à l'arbre $1(2(3())4())$

Dans chacune des questions suivantes on cherche à répondre à une question concernant un arbre généré par la grammaire. Pour chacune, il vous est demandé de définir des attributs ainsi que des actions sémantiques sur la grammaire G permettant de calculer la valeur des attributs. Tous les attributs correspondent soit à des entiers ou des ensembles d'entiers. Pour chacune des questions, vous pourrez utiliser les attributs que vous avez définis pour répondre aux questions précédentes.

Pour chaque attribut défini, vous indiquerez :

- ce qu'il représente
- s'il est hérité ou synthétisé
- son type (entier ou ensemble d'entier)
- sa valeur pour chaque nœud de l'arbre de dérivation de la question précédente.

Pour calculer la valeur des attributs, vous pourrez utiliser :

- les opérations arithmétiques,
- les opérations booléennes,
- l'opérateur binaire $\max(x, y)$,
- le prédicat binaire $\text{egal}(x, y)$ qui vaut **true** si $x = y$, et vaut **false** sinon,
- le prédicat binaire $\text{app}(x, y)$ qui vaut **true** si l'entier x appartient à l'ensemble y , et vaut **false** sinon.

2. Combien de nœuds possède l'arbre ?
3. Quel est le degré de chaque nœud N ?
4. Quelle est la profondeur de chaque nœud N ?
5. Quelle est la hauteur de l'arbre ?
6. Combien de feuilles possède l'arbre ?
7. Chaque nœud N a-t-il le même degré que la racine ?
8. L'arbre est-il régulier (tous ses nœuds internes sont de même degré) ?
9. Quel est l'ensemble des étiquettes de l'arbre ?
10. L'arbre possède-t-il deux nœuds (ou plus) de même étiquette ?

7 Chemins

On considère un point dans le plan, identifié par ses coordonnées cartésiennes (x, y) . Ce point est initialement situé aux coordonnées $(0, 0)$ et peut effectuer quatre mouvements élémentaires d'une unité, vers le haut, le bas, la gauche et la droite. À chacun de ces mouvements correspond une lettre : H , B , G et D .

Un chemin est une séquence de mouvements représentée sous la forme d'une expression arithmétique. L'expression $B + G$ correspond à une séquence d'un mouvement élémentaire vers le bas suivi d'un mouvement élémentaire vers la gauche. La répétition de mouvements peut être indiquée grâce à l'opérateur $\times$. L'expression $3 \times G$ correspond à une séquence de trois mouvements élémentaires vers la gauche. L'opérateur $\times$ est plus prioritaire que l'opérateur $+$ (l'expression $3 \times G + B$ correspond à $(3 \times G) + B$). L'usage de parenthèses permet de répéter un chemin complexe : $3 \times (H + 7 \times (B + 3 \times G))$.

Soit la grammaire G_0 suivante, d'axiome E , permettant de générer de telles expressions :

$E \rightarrow E + E$	$E \rightarrow D$
$E \rightarrow N \times E$	$N \rightarrow NC$
$E \rightarrow (E)$	$N \rightarrow C$
$E \rightarrow H$	$C \rightarrow 0$
$E \rightarrow B$	$\dots$
$E \rightarrow G$	$C \rightarrow 9$

1. Montrer que la grammaire G_0 est ambiguë
2. Dessiner un arbre de dérivation correspondant à l'expression $3 \times (H + 5 \times B)$
3. Écrire une grammaire G_1 non ambiguë telle que $L(G_1) = L(G_0)$
4. Écrire une grammaire G_2 non réursive à gauche telle que $L(G_2) = L(G_0)$
5. Écrire une grammaire G_3 factorisée à gauche telle que $L(G_3) = L(G_0)$

On repart maintenant de la grammaire G_0 . Dans chacune des questions suivantes on cherche à répondre à une question concernant une expression générée par la grammaire. Pour chacune, il vous est demandé de définir un ou plusieurs attributs ainsi que des actions sémantiques associées aux règles de G_0 permettant de calculer la valeur des attributs. Tous les attributs sont à valeurs entières. Pour chaque attribut défini, vous indiquerez : ce qu'il représente et s'il est hérité ou synthétisé. Pour chacune des questions, vous pourrez utiliser les attributs que vous avez définis pour répondre aux questions précédentes.

6. Combien de mouvements élémentaires comporte un chemin ? L'expression $3 \times (4 \times G + D)$ par exemple, comporte 15 mouvements élémentaires.
7. Quelles sont les coordonnées du point à l'issue du chemin ? L'expression $G + H + D + B$, par exemple, aboutit au point de coordonnées $(0, 0)$.
8. Quelles sont les abscisses et ordonnées maximales et minimales $x_{max}, y_{max}, x_{min}, y_{min}$ de la trajectoire suivie par le point ? Pour l'expression $G + H + D + B$, par exemple, on aura $x_{max} = 0, y_{max} = 1, x_{min} = -1, y_{min} = 0$
9. Quelle est l'abscisse maximale de la trajectoire suivie par le point ? Pour l'expression $D + H + G + B$, par exemple, l'abscisse maximale vaut 1.