

1 Conventions

Pour répondre aux questions ci-dessous, respectez les conventions suivantes :

- Utilisez des lettres *MAJUSCULES* pour les symboles non terminaux, et des lettres *minuscules* ou symboles spéciaux pour les symboles terminaux.
- Chaque règle de la grammaire aura exactement un symbole non terminal en partie gauche.
- Vous pouvez écrire $A \rightarrow \alpha \mid \beta$ si des règles $A \rightarrow \alpha$ et $A \rightarrow \beta$ partagent leur partie gauche.
- La flèche simple \rightarrow dénote une règle de grammaire, la flèche double \Rightarrow dénote une dérivation.
- L'axiome est le symbole qui correspond à la partie gauche de la première règle.

2 Listes et Séquences

2.1 Nombres

1. Écrire deux grammaires permettant de générer les nombres entiers positifs, par exemple 14592 ou encore 543.
2. Donner les dérivations gauche et droite du mot 543 pour chacune des deux grammaires.
3. Dessiner l'arbre de dérivation (ou les arbres de dérivations) du mot 543 pour chacune des deux grammaires.

2.2 Listes avec séparateur

1. Écrire une grammaire permettant de générer des listes, éventuellement vides, de chiffres séparés par deux-points, par exemple 1:4:5:9:2 ou encore 5:4:3.
2. Donner les dérivations gauche et droite du mot 5:4:3.
3. Dessiner l'arbre de dérivation (ou les arbres de dérivations) du mot 5:4:3.

2.3 Listes avec séparateur et parenthèses

1. Écrire une grammaire permettant de générer des listes, éventuellement vides, de chiffres séparés par deux-points et encadrés par des parenthèses, par exemple (1:4:5:9:2) ou encore (5:4:3).
2. Dessiner l'arbre de dérivation (ou les arbres de dérivations) du mot (5:4:3).

2.4 Listes imbriquées

1. Écrire une grammaire permettant de générer des listes, éventuellement vides, d'éléments séparés par deux-points et encadrés par des parenthèses. Ces éléments peuvent être des chiffres ou des listes. Par exemple, (1:(2:(3:4))) ou encore (5:(4:3):()).
2. Donner les dérivations gauche et droite du mot (5:(4:3):()).
3. Dessiner l'arbre de dérivation (ou les arbres de dérivations) du mot (5:(4:3):()).

3 Expressions

3.1 Associativité

1. Écrire une grammaire, la plus simple possible, éventuellement ambiguë, permettant de générer des expressions composées de chiffres et de l'opérateur de soustraction, par exemple 1-2-3.
2. Dessiner les arbres syntaxiques du mot 2-1-1. Parmi les arbres générés, lequel vous semble correct ? Autrement dit, lequel de ces arbres correspond à l'interprétation habituelle de la soustraction associative à gauche $(2 - 1) - 1 = 0$?
3. On souhaite empêcher la génération d'arbres incorrects de l'exemple précédent, qui pourraient être faussement interprétés comme $2 - (1 - 1) = 2$. Comment peut-on modifier la grammaire pour y arriver ?

3.2 Priorité

1. Écrire une grammaire, la plus simple possible (ambiguë), permettant de générer des expressions composées de chiffres et des opérateurs d'addition et de multiplication, par exemple 1+2+3 ou 3+2*6.
2. Dessiner les arbres syntaxiques du mot 3+2*6. Parmi les arbres générés, lequel vous semble correct ? Autrement dit, lequel de ces arbres correspond à l'interprétation habituelle de la multiplication prioritaire par rapport à l'addition $3 + (2 \times 6) = 15$?
3. On souhaite empêcher la génération d'arbres incorrects de l'exemple précédent, qui pourraient être faussement interprétés comme $(3 + 2) \times 6 = 30$. Comment peut-on modifier la grammaire pour y arriver ?

4 Ambiguïté

Définition Soit \mathcal{L} un langage hors-contexte. Soit G une grammaire définissant \mathcal{L} . G est dite *ambigüe* s'il existe un mot m de \mathcal{L} tel que m admet plus d'un arbre de dérivation G .

Remarque Le problème de l'ambiguïté en général d'une grammaire est indécidable, ce qui signifie qu'il n'est pas possible d'élaborer un algorithme qui soit capable de dire, après un temps fini, si une grammaire qu'on lui soumet est ambigüe ou non.

4.1 Grammaire ambigüe

Soit la grammaire :

$$P \longrightarrow \epsilon \mid (P) \mid P P$$

1. Montrez qu'elle est ambigüe.
2. Proposez une grammaire équivalente qui ne l'est pas.

4.2 Grammaire pour si alors sinon

Soit la grammaire :

$$\begin{array}{lcl}
\text{INSTR} & \rightarrow & \text{si Expr alors INSTR} \\
& & | \quad \text{si Expr alors INSTR sinon INSTR} \\
& & | \quad \text{i} \\
\text{Expr} & \rightarrow & \text{e}
\end{array}$$

1. Dessiner les arbres de dérivation du mot `si e alors si e alors i sinon i`.
2. Modifier la grammaire précédente afin d'implémenter la règle du rattachement du `sinon` avec le `si` non clos le plus proche.
3. Dessiner l'arbre de dérivation du mot `si e alors si e alors i sinon i`.

5 Autres langages

Pour cette partie, on travaille sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

5.1 Langage rationnel

Soit le langage $\mathcal{L}_1 = \{a^*b\}$ sur Σ . Écrivez une grammaire de \mathcal{L}_1 .

5.2 Langages non-rationnels

1. Soit le langage $\mathcal{L}_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sur Σ . Écrivez une grammaire de \mathcal{L}_2 .
2. Soit le langage $\mathcal{L}_3 = \{a^n b^p \mid n > p \text{ où } (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ sur Σ . Écrivez une grammaire de \mathcal{L}_3 .