Compilation : Analyse syntaxique LR

Arnaud Labourel

Faculté
des sciences
Aix Marseille Université

Section 1

Analyse syntaxique

Grammaire hors-contexte (rappel)

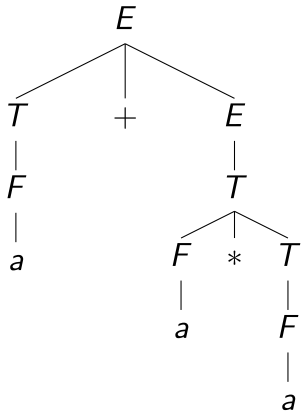
Une grammaire hors-contexte est un 4-uplet $\langle N, \Sigma, P, S\rangle$ où :

- N est un ensemble de *symboles non terminaux*, appelé l'*alphabet non terminal*.
- Σ est un ensemble de *symboles terminaux*, appelé l'*alphabet terminal*, tel que N et Σ soient disjoints.
- P est un sous ensemble *fini* de : $N \times (N \cup \Sigma)^*$
  - un élément (α, β) de P, que l'on note $\alpha \rightarrow \beta$ est appelé une *règle de production* ou *règle de réécriture*.
  - α est appelé partie gauche de la règle
  - β est appelé partie droite de la règle
- S est un élément de N appelé l'*axiome* de la grammaire.

Analyse syntaxique : construire arbre de dérivation

Étant donné $m \in \Sigma^*$ et $G = \langle \Sigma, N, P, A \rangle$, analyser m consiste à trouver pour m son (et éventuellement ses) arbre de dérivation.

$$
\begin{array}{rcl}
E & \rightarrow & T + E \mid T \\
T & \rightarrow & F * T \mid F \\
F & \rightarrow & (E) \mid a
\end{array}
$$



Sens d'analyse

- **Analyse descendante**

  L'arbre de dérivation est construit depuis la racine vers les feuilles

  Séquence de dérivations gauches à partir de l'axiome

  $E \Rightarrow T + E \Rightarrow F + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + T \Rightarrow a + F * T \Rightarrow a + a * T \Rightarrow a + a * F \Rightarrow a + a * a$

- **Analyse ascendante**

  L'arbre de dérivation est construit des feuilles vers la racine

  Séquence de dérivation telle que la séquence inverse soit une dérivation droite de m.

  $a+a*a \Leftarrow F+a*a \Leftarrow T+a*a \Leftarrow T+F*a \Leftarrow T+F*F \Leftarrow T+F*T \Leftarrow T+E \Leftarrow E$

Utilisation d'une pile

- Pour l'analyse descendante, comme pour l'analyse ascendante on utilise une pile
- Cette dernière permet de stocker les résultats intermédiaires du processus d'analyse

Théorème

Les langages reconnus par les automates à piles sont exactement les langages hors-contextes.

Section 2

Analyse Descendante

Analyse Descendante

Idée de l'algorithme

1. Empiler l'axiome S
2. Remplacer S par la partie droite d'une règle de la forme $S \to \alpha$ de telle sorte que le premier symbole x de α se trouve en sommet de pile.
   - Si x est un terminal alors on le compare avec le caractère se trouvant sous la tête de lecture. S'ils sont égaux alors on dépile.
   - Si x est un non-terminal alors on le remplace par la partie droite β d'une règle de P de la forme $x \to \beta$ et on répète le processus.

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

$\boxed{E}$

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned}
E &\rightarrow T + E \mid T \\
T &\rightarrow F * T \mid F \\
F &\rightarrow (E) \mid a
\end{aligned}$$

$$\boxed{E} \quad \begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline + \\ \hline E \\ \hline \end{array}$$

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline E \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline T \\ \hline + \\ \hline E \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline F \\ \hline + \\ \hline E \\ \hline \end{array}$$

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline E \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline + \\ \hline E \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline + \\ \hline E \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline + \\ \hline E \\ \hline \end{array}$$

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline E\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline T\\\hline +\\\hline E\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline F\\\hline +\\\hline E\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline a\\\hline +\\\hline E\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline +\\\hline E\\\hline\end{array}$$

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

	T	F	a		
	$+$	$+$	$+$	$+$	
E	E	E	E	E	E

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

	T	F	a			
	$+$	$+$	$+$	$+$		
E	E	E	E	E	E	T

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

	T	F	a				F
	$+$	$+$	$+$	$+$			$*$
E	E	E	E	E	E	T	T

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

	T	F	a				F	a
	$+$	$+$	$+$	$+$			$*$	$*$
E	E	E	E	E	E	T	T	T

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

$$\begin{array}[b]{|c|}\hline E\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline T\\\hline +\\\hline E\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline F\\\hline +\\\hline E\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline a\\\hline +\\\hline E\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline +\\\hline E\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline E\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline T\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline F\\\hline *\\\hline T\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline a\\\hline *\\\hline T\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}[b]{|c|}\hline *\\\hline T\\\hline\end{array}$$

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T + E \mid T \\ T &\rightarrow F * T \mid F \\ F &\rightarrow (E) \mid a \end{aligned}$$

	T	F	a				F	a		
	$+$	$+$	$+$	$+$			$*$	$*$	$*$	
E	E	E	E	E	E	T	T	T	T	T

Exemple d'analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

	T	F	a				F	a			
	$+$	$+$	$+$	$+$			$*$	$*$	$*$		
E	E	E	E	E	E	T	T	T	T	T	F

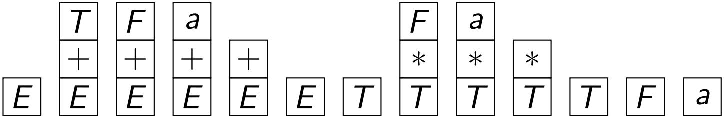
Exemple d’analyse descendante

Reconnaissance du mot :

$$a + a * a$$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$



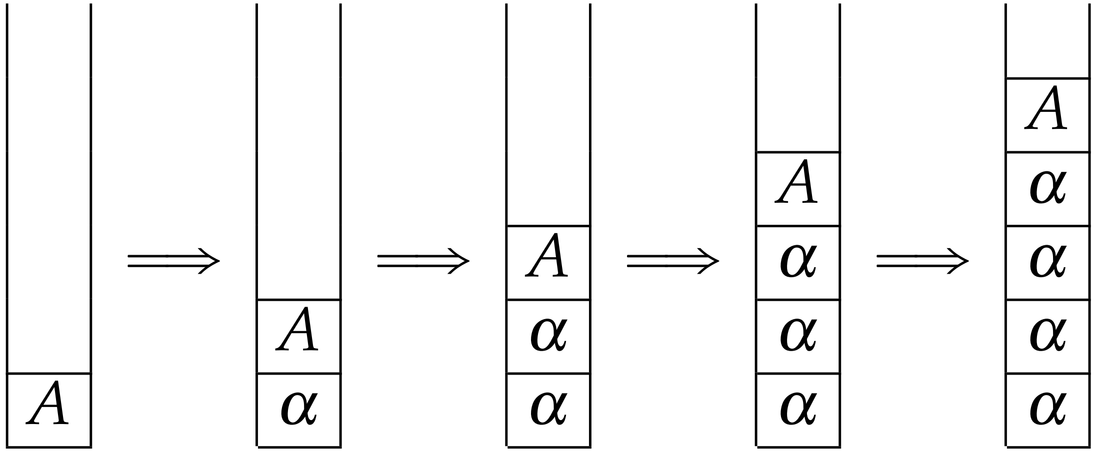
Non déterminisme

- Lorsqu'un non terminal X doit être remplacé au sommet de la pile, il peut l'être par la partie droite d'une règle de la forme $X \to \beta$.
- Plusieurs règles de cette forme peuvent exister dans la grammaire.
- L'automate correspondant est généralement non déterministe.

On peut aussi remarquer que si G est récursive à gauche, P risque de ne jamais s'arrêter lors de la reconnaissance d'un mot.

Problème de la récursivité à gauche

Si la grammaire possède une règle de la forme $A \to A\alpha$, l'automate à pile bouclera



Récursivité à gauche/droite

Définition

Un symbole non-terminal A est dit récursif si $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A \beta$ (on peut réécrire A en $\alpha A \beta$ en appliquant une ou plusieurs règles)

- Si $\alpha = \varepsilon$, A est dit récursif à gauche.
- Si $\beta = \varepsilon$, A est dit récursif à droite.

- Une grammaire comportant *au moins un symbole récursif à gauche* est dite grammaire *récursive à gauche*.
- Une grammaire comportant *au moins un symbole récursif à droite* est dite grammaire *récursive à droite*.

Section 3

Analyse Ascendante

Analyse Ascendante ou analyse par décalage-réduction

Idée de l'algorithme :

- On empile les terminaux au fur et à mesure qu'ils sont lus (on commence avec une pile vide).
- L'opération qui consiste à empiler un terminal est appelée **décalage**.
- Lorsque les k symboles au sommet de la pile constituent la partie droite d'une règle de réécriture, ils peuvent être dépilés et remplacés par la partie gauche de la règle.
- Cette opération s'appelle **réduction**.
- Lorsque la pile ne comporte que l'axiome et que tous les symboles de la chaîne d'entrée ont été lus, l'analyse a réussi.

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T + E \mid T \\ T &\rightarrow F * T \mid F \\ F &\rightarrow (E) \mid a \end{aligned}$$

$\square$

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\to T + E \mid T \\ T &\to F * T \mid F \\ F &\to (E) \mid a \end{aligned}$$

$\boxed{}$ $\boxed{a}$

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow T + E \mid T \\
T &\rightarrow F * T \mid F \\
F &\rightarrow (E) \mid a
\end{aligned}
$$

$\boxed{}$ $\boxed{a}$

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T + E \mid T \\ T &\rightarrow F * T \mid F \\ F &\rightarrow (E) \mid a \end{aligned}$$

$\boxed{}$ $\boxed{a}$ $\boxed{F}$

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

$\boxed{}$ $\boxed{a}$ $\boxed{F}$

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

$\boxed{}$ $\boxed{a}$ $\boxed{F}$ $\boxed{T}$

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

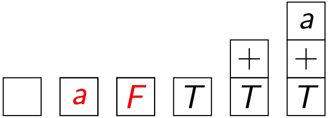
$$\boxed{} \quad \boxed{a} \quad \boxed{F} \quad \boxed{T} \quad \begin{array}{|c|}\hline + \\ \hline T \\ \hline\end{array}$$

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T\\
T &\to F * T \mid F\\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

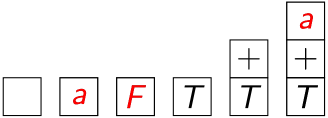


Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow T + E \mid T \\
T &\rightarrow F * T \mid F \\
F &\rightarrow (E) \mid a
\end{aligned}
$$



Exemple d’analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T + E \mid T \\ T &\rightarrow F * T \mid F \\ F &\rightarrow (E) \mid a \end{aligned}$$

$$\begin{array}[b]{|c|}\hline \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}[b]{|c|}\hline a \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}[b]{|c|}\hline F \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}[b]{|c|}\hline T \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}[b]{|c|}\hline + \\ \hline T \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}[b]{|c|}\hline a \\ \hline + \\ \hline T \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}[b]{|c|}\hline F \\ \hline + \\ \hline T \\ \hline\end{array}$$

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow T + E \mid T \\
T &\rightarrow F * T \mid F \\
F &\rightarrow (E) \mid a
\end{aligned}
$$

							$*$
					a	F	F
				$+$	$+$	$+$	$+$
	a	F	T	T	T	T	T

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

								a
							$*$	$*$
					a	F	F	F
				$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	a	F	T	T	T	T	T	T

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

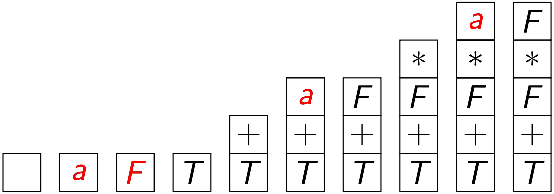
								a
							$*$	$*$
					a	F	F	F
				$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	a	F	T	T	T	T	T	T

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow T + E \mid T \\
T &\rightarrow F * T \mid F \\
F &\rightarrow (E) \mid a
\end{aligned}
$$



Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

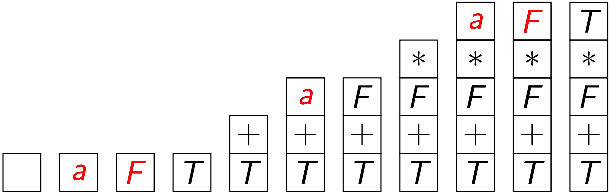
								a	F
							$*$	$*$	$*$
					a	F	F	F	F
				$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	a	F	T	T	T	T	T	T	T

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

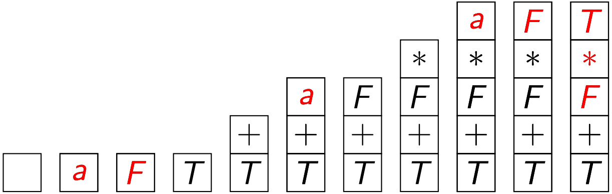


Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

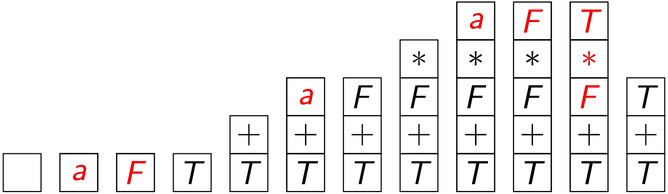
$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$



Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$



Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\to T + E \mid T \\
T &\to F * T \mid F \\
F &\to (E) \mid a
\end{aligned}
$$

								a	F	T	
							$*$	$*$	$*$	$*$	
					a	F	F	F	F	F	T
				$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	a	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow T + E \mid T \\
T &\rightarrow F * T \mid F \\
F &\rightarrow (E) \mid a
\end{aligned}
$$

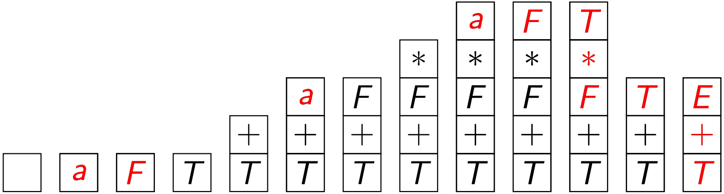
								a	F	T		
							$*$	$*$	$*$	$*$		
					a	F	F	F	F	F	T	E
				$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	a	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow T + E \mid T\\
T &\rightarrow F * T \mid F\\
F &\rightarrow (E) \mid a
\end{aligned}
$$



Exemple d'analyse ascendante

Reconnaissance du mot : $a + a * a$

avec la grammaire :

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow T + E \mid T \\
T &\rightarrow F * T \mid F \\
F &\rightarrow (E) \mid a
\end{aligned}
$$

								a	F	T			
							$*$	$*$	$*$	$*$			
					a	F	F	F	F	F	T	E	
				$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
	a	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	E

Non déterminisme : deux types de conflits

Conflit réduction/réduction

Si les symboles au sommet de la pile constituent la partie droite de deux règles de réécriture distinctes alors chacune de ces deux règles peut être utilisée pour effectuer une réduction.

Conflit décalage/réduction

Lorsque les symboles au sommet de la pile constituent la partie droite d'une ou plusieurs règles de réécriture, on peut réduire tout de suite ou bien continuer à décaler, afin de permettre ultérieurement une autre réduction.

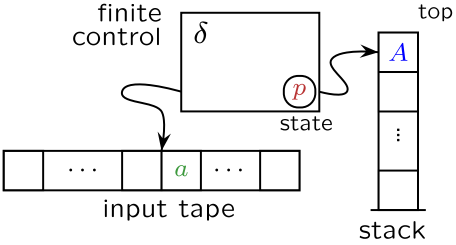
Section 4

Automates à pile et grammaires

Principes d'un automate à pile

Principes :

- lit une entrée comme un automate fini
- manipule une pile lors des transitions :
  - dépilement (lecture) de la tête pour autoriser ou non la transition
  - empilement de la pile si la transition est prise
- Accepte les mots dans les états terminaux que si la pile est vide



Définition formelle d'un automate à pile

Un automate à pile est un 6-uplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, T)$, où :

- Q est l'ensemble d'états ;
- Σ est l'alphabet d'entrée ;
- Γ est l'alphabet de pile ;
- δ est la fonction de transition :

  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \wp(Q \times \Gamma^*)$
- $q_0 \in Q$ est l'état initial ;
- $T \subset Q$ est l'ensemble des états terminaux/acceptants.

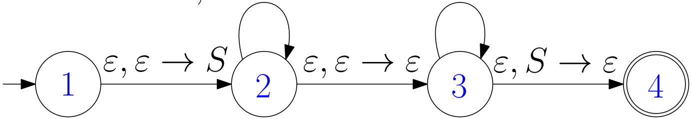
$\wp(E)$: ensemble des sous-ensembles de E

Exemple d'automate à pile

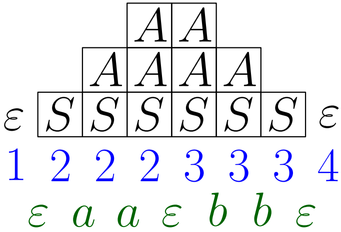
Automate à pile $\mathcal{A}$ pour
$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, T)$, où :

- $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ (états)
- $\Sigma = \{a, b\}$ (alphabet entrée)
- $\Gamma = \{A, S\}$ (alphabet pile)
- $q_0 = 1$ (état initial)
- $T = \{4\}$ (état terminal)

Acceptation via état terminal



lecture du mot $aabb$



(état,	entrée,	pile)
(1,	$aabb$,	ε)
(2,	$aabb$,	S)
(2,	abb,	AS)
(2,	bb,	AAS)
(3,	bb,	AAS)
(3,	b,	AS)
(3,	ε,	S)
(4,	ε,	ε)

Grammaires hors-contextes $\Leftrightarrow$ Automate à pile

Un langage est hors-contexte si et seulement si il existe un automate à pile qui le reconnaît.

- Si un langage est hors-contexte alors il existe un automate à pile qui le reconnaît.
- Si un langage est reconnu par un automate à pile alors il est hors-contexte.

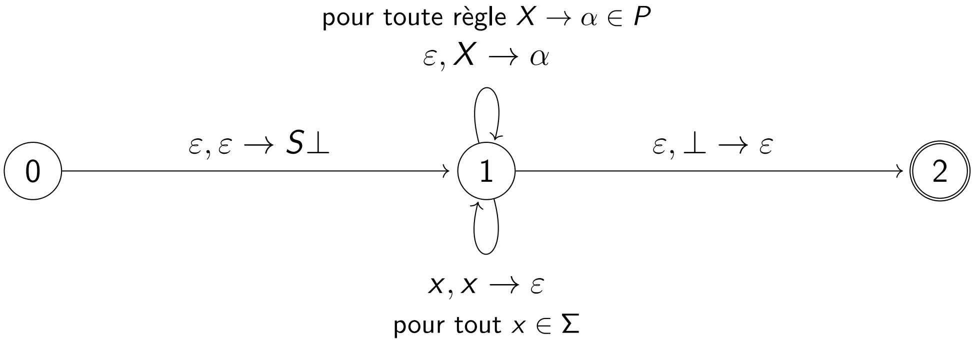
Sens facile à prouver : Grammaires hors-contextes $\Rightarrow$ Automates à pile

Autre sens plus complexe.

Grammaires hors-contexte $\Rightarrow$ Automate gauche

- Soit $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ une grammaire hors-contexte, on construit un automate à pile A qui accepte un mot m s'il existe une dérivation pour m dans G ($S \overset{+}{\Rightarrow} m$).
- A est conçu de telle sorte à déterminer une dérivation gauche conduisant de S à m.
- **Idée clef :** écrire dans la pile de A les proto-mots qui constituent la dérivation recherchée.

Automate gauche correspondant à la grammaire $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$



Construction de l'automate gauche

Automate à pile A correspondant à la grammaire $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$:

$A = \langle \{0, 1, 2\}, \Sigma, N \cup \Sigma \cup \{\perp\}, \delta, 0, \{2\} \rangle$

La fonction de transition δ est définie de la façon suivante :

- $\delta(0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(1, S\perp)\}$ (on empile l'axiome)
- $\delta(1, \varepsilon, X) = \{(1, \alpha)$ pour tout $X \to \alpha \in P\}$ (si un symbole non terminal X occupe le sommet de la pile, on le remplace par la partie droite α d'une règle $X \to \alpha$)
- $\delta(1, a, a) = \{(1, \varepsilon) \mid$ avec $a \in \Sigma\}$ (Si le même symbole terminal occupe le sommet de la pile et la case courante de la bande d'entrée, on dépile)
- $\delta(1, \varepsilon, \perp) = \{(2, \varepsilon)\}$ (Si le mot en entrée a été reconnu et que la pile ne contient que le symbole de fond de pile, on passe à l'état d'acceptation)

Exemple de construction

Grammaire : $\langle\{E, T, F\}, \{a, +, *(,)\}, P, E\rangle$

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} E & \rightarrow & T + E \mid T, \\ T & \rightarrow & F * T \mid F, \\ F & \rightarrow & (E) \mid a \end{array} \right\}$$

Automate: $A_1 = \langle\{0, 1, 2\}, \{a, +, *, (,)\}, \{a, +, *, (,), E, T, F, \perp\}, \delta, 0, \{2\}\rangle$

$$\begin{array}{rcl} \delta(0, \varepsilon, \varepsilon) & = & \{(1, E\perp)\} \\ \delta(1, \varepsilon, E) & = & \{(1, T + E), (1, T)\} \\ \delta(1, \varepsilon, T) & = & \{(1, F * T), (1, F)\} \\ \delta(1, \varepsilon, F) & = & \{(1, (E)), \quad (1, a)\} \\ \delta(1, \varepsilon, \perp) & = & \{(2, \varepsilon)\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \delta(1, +, +) & = & \{(1, \varepsilon)\} \\ \delta(1, *, *) & = & \{(1, \varepsilon)\} \\ \delta(1, (, () & = & \{(1, \varepsilon)\} \\ \delta(1,),)) & = & \{(1, \varepsilon)\} \\ \delta(1, a, a) & = & \{(1, \varepsilon)\} \end{array}$$

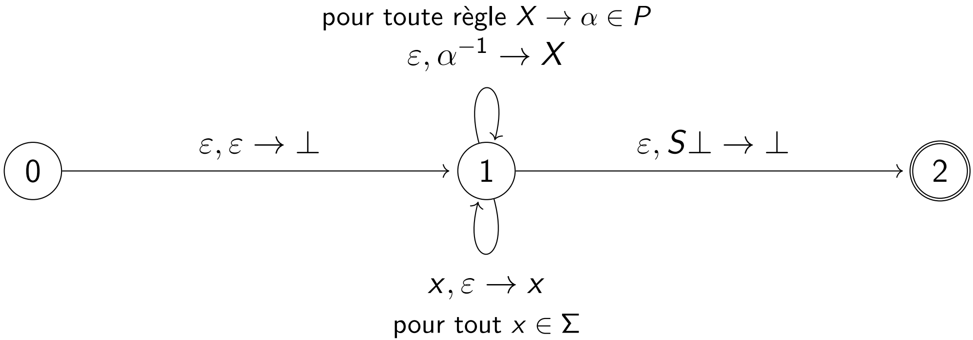
Grammaires hors-contexte $\Rightarrow$ Automate droit

- Soit $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ une grammaire hors-contexte, on construit un automate à pile A qui accepte un mot m s'il existe une dérivation pour m dans G ($S \overset{+}{\Rightarrow} m$).
- A$ est conçu de telle sorte à déterminer une réduction droite conduisant de m à S.

Idées clefs :

- empiler les symboles terminaux
- dépiler les symbole pour appliquer des règles de réécriture

Automate droit correspondant à la grammaire $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$



Section 5

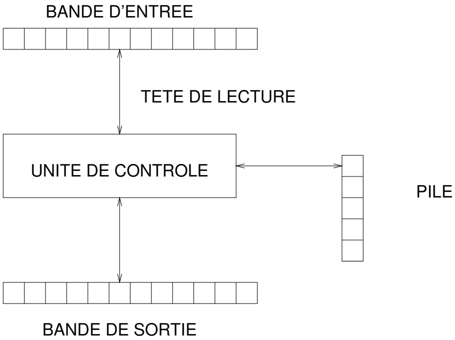
Transducteur à pile

Transducteur à pile

Problème

Comment faire produire la dérivation à l'automate ?

Solution : utiliser un transducteur au lieu d'un simple automate



- Un transducteur à pile est un automate à pile qui **émet**, à chaque déplacement, une suite finie de symboles de sortie.
- Une configuration d'un transducteur à pile est un quadruplet (q, w, α, y) où y est une séquence de symboles de sortie.

Définition : transducteur à pile

Un transducteur à pile est un 7-uplet $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, F\rangle$:

- Q est l'ensemble des états
- Σ est l'alphabet d'entrée
- Γ est l'alphabet de symboles de pile
- **Δ est l'alphabet de sortie**
- δ est la fonction de transition : $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to \wp(Q \times \Gamma^* \times \Delta^*)$
- $q_0 \in Q$ est l'état initial
- $\perp \in \Gamma$ est le symbole de fond de pile
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants

Analyseur gauche

$$
\begin{array}{llllllll}
1: & E & \rightarrow & T + E & 2: & E & \rightarrow & T \\
3: & T & \rightarrow & F * T & 4: & T & \rightarrow & F \\
5: & F & \rightarrow & (E) & 6: & F & \rightarrow & a
\end{array}
$$

- Dérivation gauche de $a + a * a$:

  $E \Rightarrow T + E \Rightarrow F + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + T \Rightarrow a + F * T \Rightarrow a + a * T \Rightarrow a + a * F \Rightarrow a + a * a$

- Elle correspond à l'application des règles suivantes : $1, 4, 6, 2, 3, 6, 4, 6$

Analyseur gauche

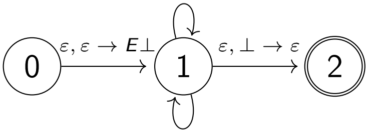
Soit une grammaire hors contexte G dont les règles ont été numérotées de 1 à p. On appelle un **analyseur gauche** de G, un transducteur à pile non déterministe T_G^g qui produit pour un mot $m \in L(G)$, une dérivation gauche de m.

Performances :

- Espace : $\mathcal{O}(|m|)$
- Temps : $\mathcal{O}(c^{|m|})$

Analyseur gauche : Exemple

$$\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}$$

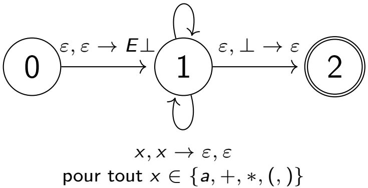


$x, x \rightarrow \varepsilon, \varepsilon$

pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

Analyseur gauche : Exemple

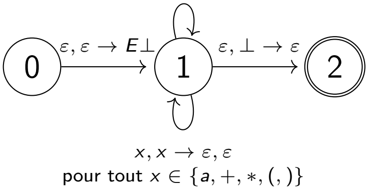
$$\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \to & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \to & T, 2 \\
\varepsilon, T & \to & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \to & F, 4 \\
\varepsilon, F & \to & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \to & a, 6
\end{array}$$



$$(0, \quad a + a * a, \qquad \varepsilon, \quad \varepsilon)$$

Analyseur gauche : Exemple

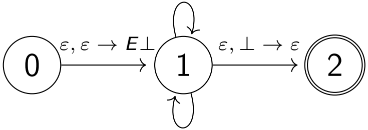
$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \to & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \to & T, 2 \\
\varepsilon, T & \to & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \to & F, 4 \\
\varepsilon, F & \to & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \to & a, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lcrr}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\bot, & \varepsilon)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$

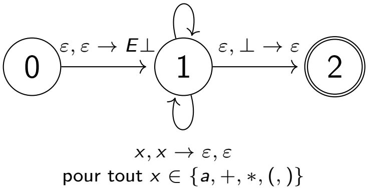


$x, x \rightarrow \varepsilon, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & T + E\perp, & 1)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

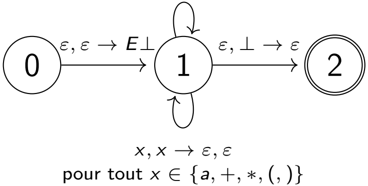
$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\bot, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & T + E\bot, & 1) \\
(1, & a + a * a, & F + E\bot, & 14)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

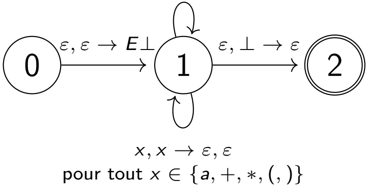
$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\bot, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & T + E\bot, & 1) \\
(1, & a + a * a, & F + E\bot, & 14) \\
(1, & a + a * a, & a + E\bot, & 146)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

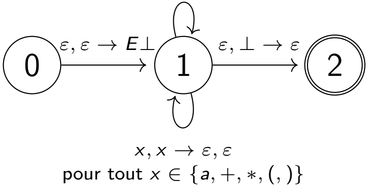
$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & T + E\perp, & 1) \\
(1, & a + a * a, & F + E\perp, & 14) \\
(1, & a + a * a, & a + E\perp, & 146) \\
(1, & +a * a, & +E\perp, & 146)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

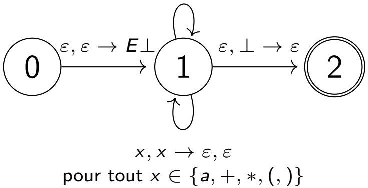
$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T+E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F*T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lrrr}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & T+E\perp, & 1) \\
(1, & a+a*a, & F+E\perp, & 14) \\
(1, & a+a*a, & a+E\perp, & 146) \\
(1, & +a*a, & +E\perp, & 146) \\
(1, & a*a, & E\perp, & 146)
\end{array}
$$

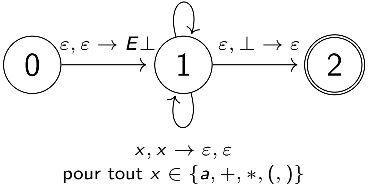
Analyseur gauche : Exemple

$$\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T+E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F*T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}$$



$$\begin{array}{lrrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & T+E\perp, & 1) \\
(1, & a+a*a, & F+E\perp, & 14) \\
(1, & a+a*a, & a+E\perp, & 146) \\
(1, & +a*a, & +E\perp, & 146) \\
(1, & a*a, & E\perp, & 146) \\
(1, & a*a, & T\perp, & 1462)
\end{array}$$

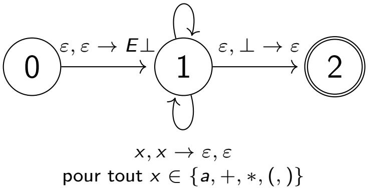
$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & T + E\perp, & 1) \\
(1, & a + a * a, & F + E\perp, & 14) \\
(1, & a + a * a, & a + E\perp, & 146) \\
(1, & +a * a, & +E\perp, & 146) \\
(1, & a * a, & E\perp, & 146) \\
(1, & a * a, & T\perp, & 1462) \\
(1, & a * a, & F * T\perp, & 14623)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

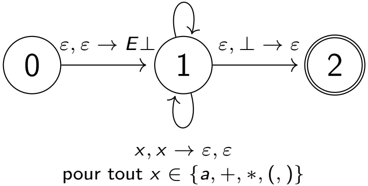
$$\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T+E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F*T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}$$



$$\begin{array}{llrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & T+E\perp, & 1) \\
(1, & a+a*a, & F+E\perp, & 14) \\
(1, & a+a*a, & a+E\perp, & 146) \\
(1, & +a*a, & +E\perp, & 146) \\
(1, & a*a, & E\perp, & 146) \\
(1, & a*a, & T\perp, & 1462) \\
(1, & a*a, & F*T\perp, & 14623) \\
(1, & a*a, & a*T\perp, & 146236)
\end{array}$$

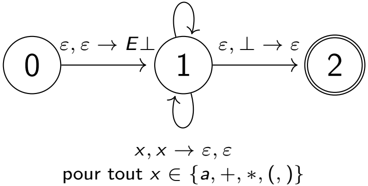
Analyseur gauche : Exemple

$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \to & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \to & T, 2 \\
\varepsilon, T & \to & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \to & F, 4 \\
\varepsilon, F & \to & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \to & a, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lrrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & T + E\perp, & 1) \\
(1, & a + a * a, & F + E\perp, & 14) \\
(1, & a + a * a, & a + E\perp, & 146) \\
(1, & +a * a, & +E\perp, & 146) \\
(1, & a * a, & E\perp, & 146) \\
(1, & a * a, & T\perp, & 1462) \\
(1, & a * a, & F * T\perp, & 14623) \\
(1, & a * a, & a * T\perp, & 146236) \\
(1, & *a, & *T\perp, & 146236)
\end{array}
$$

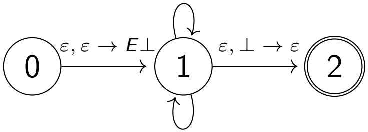
$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \to & T+E, 1 \\
\varepsilon, E & \to & T, 2 \\
\varepsilon, T & \to & F*T, 3 \\
\varepsilon, T & \to & F, 4 \\
\varepsilon, F & \to & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \to & a, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llrrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & T+E\perp, & 1) \\
(1, & a+a*a, & F+E\perp, & 14) \\
(1, & a+a*a, & a+E\perp, & 146) \\
(1, & +a*a, & +E\perp, & 146) \\
(1, & a*a, & E\perp, & 146) \\
(1, & a*a, & T\perp, & 1462) \\
(1, & a*a, & F*T\perp, & 14623) \\
(1, & a*a, & a*T\perp, & 146236) \\
(1, & *a, & *T\perp, & 146236) \\
(1, & a, & T\perp, & 146236)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$

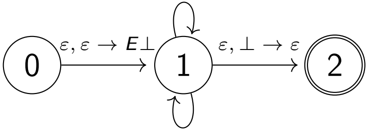


$x, x \rightarrow \varepsilon, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{lrrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & T + E\perp, & 1) \\
(1, & a + a * a, & F + E\perp, & 14) \\
(1, & a + a * a, & a + E\perp, & 146) \\
(1, & +a * a, & +E\perp, & 146) \\
(1, & a * a, & E\perp, & 146) \\
(1, & a * a, & T\perp, & 1462) \\
(1, & a * a, & F * T\perp, & 14623) \\
(1, & a * a, & a * T\perp, & 146236) \\
(1, & *a, & *T\perp, & 146236) \\
(1, & a, & T\perp, & 146236) \\
(1, & a, & F\perp, & 1462364)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$

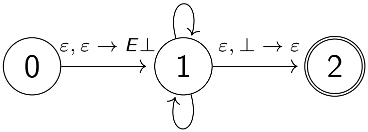


$x, x \rightarrow \varepsilon, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{lrrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & E\perp, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & T + E\perp, & 1) \\
(1, & a + a * a, & F + E\perp, & 14) \\
(1, & a + a * a, & a + E\perp, & 146) \\
(1, & +a * a, & +E\perp, & 146) \\
(1, & a * a, & E\perp, & 146) \\
(1, & a * a, & T\perp, & 1462) \\
(1, & a * a, & F * T\perp, & 14623) \\
(1, & a * a, & a * T\perp, & 146236) \\
(1, & *a, & *T\perp, & 146236) \\
(1, & a, & T\perp, & 146236) \\
(1, & a, & F\perp, & 1462364) \\
(1, & a, & a\perp, & 14623646)
\end{array}
$$

Analyseur gauche : Exemple

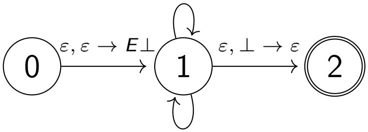
$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \to & T+E, 1 \\
\varepsilon, E & \to & T, 2 \\
\varepsilon, T & \to & F*T, 3 \\
\varepsilon, T & \to & F, 4 \\
\varepsilon, F & \to & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \to & a, 6
\end{array}
$$



$x, x \to \varepsilon, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & E\bot, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & T+E\bot, & 1) \\
(1, & a+a*a, & F+E\bot, & 14) \\
(1, & a+a*a, & a+E\bot, & 146) \\
(1, & +a*a, & +E\bot, & 146) \\
(1, & a*a, & E\bot, & 146) \\
(1, & a*a, & T\bot, & 1462) \\
(1, & a*a, & F*T\bot, & 14623) \\
(1, & a*a, & a*T\bot, & 146236) \\
(1, & *a, & *T\bot, & 146236) \\
(1, & a, & T\bot, & 146236) \\
(1, & a, & F\bot, & 1462364) \\
(1, & a, & a\bot, & 14623646) \\
(1, & \varepsilon, & \bot, & 14623646)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\varepsilon, E & \rightarrow & T + E, 1 \\
\varepsilon, E & \rightarrow & T, 2 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F * T, 3 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & F, 4 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & (E), 5 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & a, 6
\end{array}
$$



$x, x \rightarrow \varepsilon, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$(0,$	$a + a * a,$	$\varepsilon,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$a + a * a,$	$E\perp,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$a + a * a,$	$T + E\perp,$	$1)$
$(1,$	$a + a * a,$	$F + E\perp,$	$14)$
$(1,$	$a + a * a,$	$a + E\perp,$	$146)$
$(1,$	$+a * a,$	$+E\perp,$	$146)$
$(1,$	$a * a,$	$E\perp,$	$146)$
$(1,$	$a * a,$	$T\perp,$	$1462)$
$(1,$	$a * a,$	$F * T\perp,$	$14623)$
$(1,$	$a * a,$	$a * T\perp,$	$146236)$
$(1,$	$*a,$	$*T\perp,$	$146236)$
$(1,$	$a,$	$T\perp,$	$146236)$
$(1,$	$a,$	$F\perp,$	$1462364)$
$(1,$	$a,$	$a\perp,$	$14623646)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$\perp,$	$14623646)$
$(2,$	$\varepsilon,$	$\varepsilon,$	$14623646)$

Analyseur droit

$$\begin{array}{llllllll} 1: & E & \rightarrow & T+E & 2: & E & \rightarrow & T \\ 3: & T & \rightarrow & F*T & 4: & T & \rightarrow & F \\ 5: & F & \rightarrow & (E) & 6: & F & \rightarrow & a \end{array}$$

- Réduction droite de $a + a * a$:

  $a{+}a{*}a \Leftarrow F{+}a{*}a \Leftarrow T{+}a{*}a \Leftarrow T{+}F{*}a \Leftarrow T{+}F{*}F \Leftarrow T{+}F{*}T \Leftarrow T{+}E \Leftarrow E$

- Elle correspond à l'application des règles suivantes : $6, 4, 6, 6, 4, 3, 2, 1$

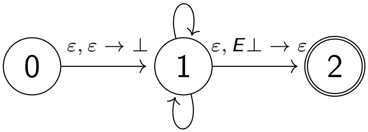
Analyseur droit

Soit une grammaire hors contexte G dont les règles ont été numérotées de 1 à p. On appelle un **analyseur droit** de G, un transducteur à pile non déterministe T_G^d qui produit pour un mot $m \in L(G)$, une dérivation droite de m à l'envers.

Performances :

- Espace : $\mathcal{O}(|m|)$
- Temps : $\mathcal{O}(c^{|m|})$

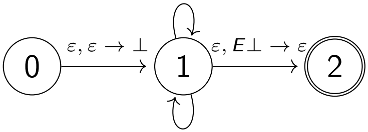
$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E + T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T * F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}$$



$x, \varepsilon \rightarrow x, \varepsilon$

pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E + T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T * F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}
$$

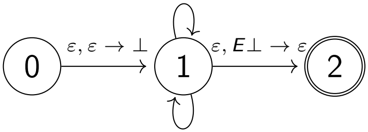


$x, \varepsilon \rightarrow x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$(0, \quad a + a * a, \qquad \varepsilon, \quad \varepsilon)$$

Analyseur droit : Exemple

$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E + T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T * F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}$$

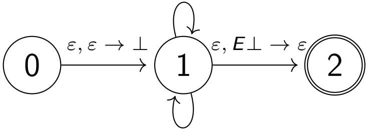


$x, \varepsilon \rightarrow x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$\begin{array}{llrr}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & \perp, & \varepsilon)
\end{array}$$

Analyseur droit : Exemple

$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}$$

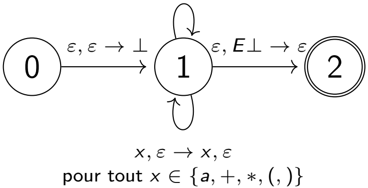


$x, \varepsilon \rightarrow x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$\begin{array}{llrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon)
\end{array}$$

Analyseur droit : Exemple

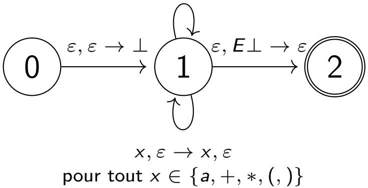
$$
\begin{aligned}
\varepsilon, E+T &\rightarrow E, 1\\
\varepsilon, T &\rightarrow E, 2\\
\varepsilon, T*F &\rightarrow T, 3\\
\varepsilon, F &\rightarrow T, 4\\
\varepsilon, (E) &\rightarrow F, 5\\
\varepsilon, a &\rightarrow F, 6
\end{aligned}
$$



$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon)\\
(1, & a+a*a, & \bot, & \varepsilon)\\
(1, & +a*a, & a\bot, & \varepsilon)\\
(1, & +a*a, & F\bot, & 6)
\end{array}
$$

Analyseur droit : Exemple

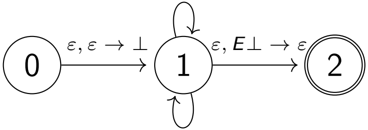
$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a*a, & T\perp, & 64)
\end{array}
$$

Analyseur droit : Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \to & E, 1 \\
\varepsilon, T & \to & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \to & T, 3 \\
\varepsilon, F & \to & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \to & F, 5 \\
\varepsilon, a & \to & F, 6
\end{array}
$$

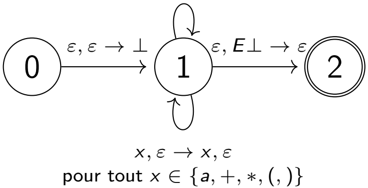


$x, \varepsilon \to x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{lrrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a*a, & T\perp, & 64) \\
(1, & a*a, & +T\perp, & 64)
\end{array}
$$

Analyseur droit : Exemple

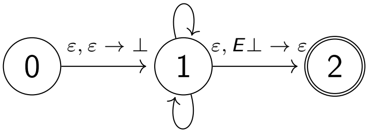
$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a*a, & T\perp, & 64) \\
(1, & a*a, & +T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & a+T\perp, & 64)
\end{array}
$$

Analyseur droit : Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}
$$

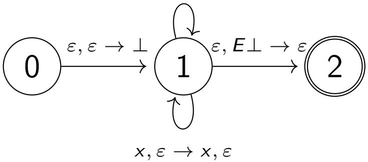


$x, \varepsilon \rightarrow x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{lrrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a*a, & T\perp, & 64) \\
(1, & a*a, & +T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & a+T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & F+T\perp, & 646)
\end{array}
$$

Analyseur droit : Exemple

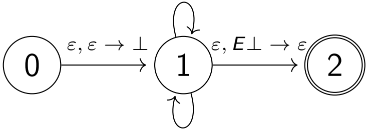
$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}
$$



pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{lrrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a*a, & T\perp, & 64) \\
(1, & a*a, & +T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & a+T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & F+T\perp, & 646) \\
(1, & a, & *F+T\perp, & 646)
\end{array}
$$

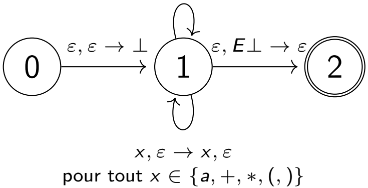
$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \to & E, 1 \\
\varepsilon, T & \to & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \to & T, 3 \\
\varepsilon, F & \to & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \to & F, 5 \\
\varepsilon, a & \to & F, 6
\end{array}$$



$x, \varepsilon \to x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$\begin{array}{lrrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a*a, & T\perp, & 64) \\
(1, & a*a, & +T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & a+T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & F+T\perp, & 646) \\
(1, & a, & *F+T\perp, & 646) \\
(1, & \varepsilon, & a*F+T\perp, & 646)
\end{array}$$

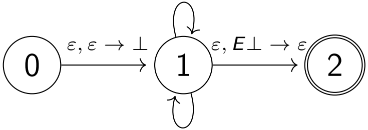
$$\begin{aligned}
\varepsilon, E+T &\rightarrow E, 1\\
\varepsilon, T &\rightarrow E, 2\\
\varepsilon, T*F &\rightarrow T, 3\\
\varepsilon, F &\rightarrow T, 4\\
\varepsilon, (E) &\rightarrow F, 5\\
\varepsilon, a &\rightarrow F, 6
\end{aligned}$$



$(0,$	$a+a*a,$	$\varepsilon,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$a+a*a,$	$\perp,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$+a*a,$	$a\perp,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$+a*a,$	$F\perp,$	$6)$
$(1,$	$+a*a,$	$T\perp,$	$64)$
$(1,$	$a*a,$	$+T\perp,$	$64)$
$(1,$	$*a,$	$a+T\perp,$	$64)$
$(1,$	$*a,$	$F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$a,$	$*F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$a*F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$F*F+T\perp,$	$6466)$

Analyseur droit : Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E + T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T * F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}
$$

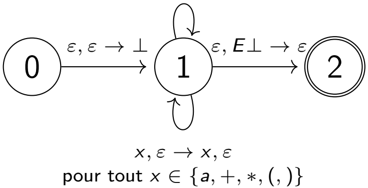


$x, \varepsilon \rightarrow x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$
\begin{array}{lrrl}
(0, & a + a * a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a + a * a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a * a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a * a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a * a, & T\perp, & 64) \\
(1, & a * a, & +T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & a + T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & F + T\perp, & 646) \\
(1, & a, & *F + T\perp, & 646) \\
(1, & \varepsilon, & a * F + T\perp, & 646) \\
(1, & \varepsilon, & F * F + T\perp, & 6466) \\
(1, & \varepsilon, & T * F + T\perp, & 64664)
\end{array}
$$

Analyseur droit : Exemple

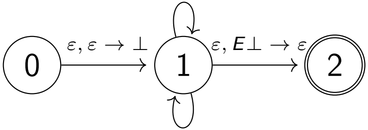
$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \to & E, 1 \\
\varepsilon, T & \to & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \to & T, 3 \\
\varepsilon, F & \to & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \to & F, 5 \\
\varepsilon, a & \to & F, 6
\end{array}$$



$$\begin{array}{lrrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a*a, & T\perp, & 64) \\
(1, & a*a, & +T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & a+T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & F+T\perp, & 646) \\
(1, & a, & *F+T\perp, & 646) \\
(1, & \varepsilon, & a*F+T\perp, & 646) \\
(1, & \varepsilon, & F*F+T\perp, & 6466) \\
(1, & \varepsilon, & T*F+T\perp, & 64664) \\
(1, & \varepsilon, & T+T\perp, & 646643)
\end{array}$$

Analyseur droit : Exemple

$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \to & E, 1 \\
\varepsilon, T & \to & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \to & T, 3 \\
\varepsilon, F & \to & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \to & F, 5 \\
\varepsilon, a & \to & F, 6
\end{array}$$

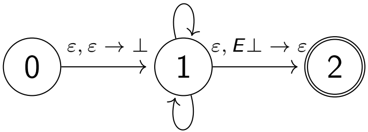


$x, \varepsilon \to x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$$\begin{array}{llrrl}
(0, & a+a*a, & \varepsilon, & \varepsilon) \\
(1, & a+a*a, & \perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & a\perp, & \varepsilon) \\
(1, & +a*a, & F\perp, & 6) \\
(1, & +a*a, & T\perp, & 64) \\
(1, & a*a, & +T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & a+T\perp, & 64) \\
(1, & *a, & F+T\perp, & 646) \\
(1, & a, & *F+T\perp, & 646) \\
(1, & \varepsilon, & a*F+T\perp, & 646) \\
(1, & \varepsilon, & F*F+T\perp, & 6466) \\
(1, & \varepsilon, & T*F+T\perp, & 64664) \\
(1, & \varepsilon, & T+T\perp, & 646643) \\
(1, & \varepsilon, & E+T\perp, & 6466432)
\end{array}$$

Analyseur droit : Exemple

$$\begin{aligned}
\varepsilon, E+T &\rightarrow E, 1\\
\varepsilon, T &\rightarrow E, 2\\
\varepsilon, T*F &\rightarrow T, 3\\
\varepsilon, F &\rightarrow T, 4\\
\varepsilon, (E) &\rightarrow F, 5\\
\varepsilon, a &\rightarrow F, 6
\end{aligned}$$

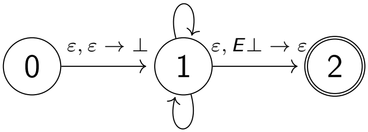


$x, \varepsilon \rightarrow x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$(0,$	$a+a*a,$	$\varepsilon,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$a+a*a,$	$\perp,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$+a*a,$	$a\perp,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$+a*a,$	$F\perp,$	$6)$
$(1,$	$+a*a,$	$T\perp,$	$64)$
$(1,$	$a*a,$	$+T\perp,$	$64)$
$(1,$	$*a,$	$a+T\perp,$	$64)$
$(1,$	$*a,$	$F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$a,$	$*F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$a*F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$F*F+T\perp,$	$6466)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$T*F+T\perp,$	$64664)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$T+T\perp,$	$646643)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$E+T\perp,$	$6466432)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$E\perp,$	$64664321)$

Analyseur droit : Exemple

$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon, E+T & \rightarrow & E, 1 \\
\varepsilon, T & \rightarrow & E, 2 \\
\varepsilon, T*F & \rightarrow & T, 3 \\
\varepsilon, F & \rightarrow & T, 4 \\
\varepsilon, (E) & \rightarrow & F, 5 \\
\varepsilon, a & \rightarrow & F, 6
\end{array}$$



$x, \varepsilon \rightarrow x, \varepsilon$
pour tout $x \in \{a, +, *, (,)\}$

$(0,$	$a+a*a,$	$\varepsilon,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$a+a*a,$	$\perp,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$+a*a,$	$a\perp,$	$\varepsilon)$
$(1,$	$+a*a,$	$F\perp,$	$6)$
$(1,$	$+a*a,$	$T\perp,$	$64)$
$(1,$	$a*a,$	$+T\perp,$	$64)$
$(1,$	$*a,$	$a+T\perp,$	$64)$
$(1,$	$*a,$	$F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$a,$	$*F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$a*F+T\perp,$	$646)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$F*F+T\perp,$	$6466)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$T*F+T\perp,$	$64664)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$T+T\perp,$	$646643)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$E+T\perp,$	$6466432)$
$(1,$	$\varepsilon,$	$E\perp,$	$64664321)$
$(2,$	$\varepsilon,$	$\varepsilon,$	$64664321)$

Analyse déterministe

Les automates non déterministes ne sont pas utilisables en pratique (trop coûteux).

Comment faire ?

Rendre déterministe un analyseur gauche ou un analyseur droit en s'autorisant à regarder les k prochains symboles de la bande d'entrée (*lookahead*)

La prochaine action à effectuer est indiquée par une **table d'analyse** qui donne à partir de l'état de l'automate et les k prochains symboles, l'action à effectuer.

$LL(k)$ et $LR(k)$

- Si l'analyseur gauche peut être rendu déterministe dans ces conditions, la grammaire est $LL(k)$ (Left to right, Leftmost derivation)
- Si l'analyseur droit peut être rendu déterministe dans ces conditions, la grammaire est $LR(k)$ (Left to right, Rightmost derivation)

Grammaires $LR(k)$

- Une grammaire est $LR(k)$ s'il est possible d'effectuer une analyse par décalage-réduction déterministe en s'autorisant à lire les k symboles suivant le symbole courant.
- La grammaire suivante n'est pas $LR(1)$ mais elle est $LR(2)$:

$$
\begin{array}{lllll}
1: & S & \rightarrow & X & b & c \\
2: & S & \rightarrow & Y & b & d \\
3: & X & \rightarrow & a \\
4: & Y & \rightarrow & a
\end{array}
$$

Table SLR (Simple LR)

Étant donné une grammaire G, on peut construire à partir de G une table SLR. Lorsque cette dernière ne contient pas de conflits, elle permet de réaliser une analyse déterministe.

$$
\begin{array}{lccl}
1: & E & \rightarrow & E * B \\
2: & E & \rightarrow & E + B \\
3: & E & \rightarrow & B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccl}
4: & B & \rightarrow & 0 \\
5: & B & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1	r4	r4	r4	r4	r4		
2	r5	r5	r5	r5	r5		
3	r3	r3	r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7	r2	r2	r2	r2	r2		
8	r1	r1	r1	r1	r1		

Structure et utilisation de la table SLR

La table d'analyse est composée de deux parties:

- Une partie $\textsc{action}[e, a]$ où e est un état et a un terminal (ou le symbole \$).
- Une partie $\textsc{goto}[e, A]$ où e est un état et A est un non terminal.

$\textsc{action}[i, a]$ peut prendre une des quatre formes suivantes :

1. **Décalage** de, où e est un état : l'analyseur consomme une unité lexicale/symbole et il empile e (qui représente l'unité lexicale/symbole)
2. **Réduction** rj, où j est le numéro de la règle $A \to \beta$:
   - l'analyseur dépile $|\beta|$ symboles de la pile
   - l'état l est maintenant au sommet de la pile
   - il empile l'état m, qui correspond à l'entrée $\textsc{goto}[l, A]$
3. `acc`: l'analyseur accepte l'entrée
4. `err`: l'analyseur signale une erreur (les cases vides)

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

Pile :

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline \bot \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllllll} 1: & E & \to & E+B & \quad 3: & E & \to & B & \quad 5: & B & \to & 1 \\ 2: & E & \to & E*B & \quad 4: & B & \to & 0 & & & & \end{array}$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

Pile :

0
$\perp$

$$
\begin{array}{llll}
1: & E & \rightarrow & E + B \\
2: & E & \rightarrow & E * B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
3: & E & \rightarrow & B \\
4: & B & \rightarrow & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
5: & B & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

1

Pile :

2
0
$\perp$

$$
\begin{array}{llll}
1: & E \rightarrow E + B & 3: E \rightarrow B & 5: B \rightarrow 1 \\
2: & E \rightarrow E * B & 4: B \rightarrow 0 &
\end{array}
$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	$+$	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

B

Pile :

0
$\perp$

$$
\begin{array}{llll}
1: & E \to E + B & 3: & E \to B \quad\quad 5: \; B \to 1\\
2: & E \to E * B & 4: & B \to 0
\end{array}
$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

B

Pile :

3
0
$\perp$

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
1: & E & \rightarrow & E+B & \quad & 3: & E & \rightarrow & B & \quad & 5: & B & \rightarrow & 1 \\
2: & E & \rightarrow & E*B & & 4: & B & \rightarrow & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	$+$	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

E

Pile :

0
$\perp$

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
1: & E & \to & E+B & \quad & 3: & E & \to & B & \quad & 5: & B & \to 1 \\
2: & E & \to & E*B & & 4: & B & \to & 0 & & & &
\end{array}
$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

E

Pile :

4
0
$\perp$

$1: \quad E \rightarrow E + B$

$2: \quad E \rightarrow E * B$

$3: \quad E \rightarrow B$

$4: \quad B \rightarrow 0$

$5: \quad B \rightarrow 1$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	\$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0\$]

Symboles :

$E+$

Pile :

6
4
0
$\perp$

$$\begin{array}{llll} 1: & E & \rightarrow & E+B \\ 2: & E & \rightarrow & E*B \end{array} \qquad \begin{array}{llll} 3: & E & \rightarrow & B \\ 4: & B & \rightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} 5: & B & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

$E + 0$

Pile :

1
6
4
0
$\perp$

$$\begin{array}{llll} 1: & E & \rightarrow & E + B \\ 2: & E & \rightarrow & E * B \end{array} \quad \begin{array}{llll} 3: & E & \rightarrow & B \\ 4: & B & \rightarrow & 0 \end{array} \quad \begin{array}{llll} 5: & B & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	\$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0\$]

Symboles :

$E + B$

Pile :

6
4
0
$\perp$

$$
\begin{array}{llll}
1: & E & \rightarrow & E + B \\
2: & E & \rightarrow & E * B \\
3: & E & \rightarrow & B \\
4: & B & \rightarrow & 0 \\
5: & B & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

E

Pile :

8
6
4
0
$\perp$

$$
\begin{array}{llll}
1: & E & \rightarrow & E + B \\
2: & E & \rightarrow & E * B \\
3: & E & \rightarrow & B \\
4: & B & \rightarrow & 0 \\
5: & B & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]
Symboles :
Pile :

0
$\perp$

$$1: \quad E \rightarrow E + B \qquad 3: \quad E \rightarrow B \qquad 5: \quad B \rightarrow 1$$
$$2: \quad E \rightarrow E * B \qquad 4: \quad B \rightarrow 0$$

Exemple d'utilisation de la table

état	action					goto	
	0	1	*	+	$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

On lit le mot : [1+0$]

Symboles :

Pile :

4
0
$\perp$

$$
\begin{array}{llll}
1: & E & \rightarrow & E+B \\
2: & E & \rightarrow & E*B \\
3: & E & \rightarrow & B \\
4: & B & \rightarrow & 0 \\
5: & B & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

Automate $LR(0)$

- La table SLR est construite à partir d'un automate appelé automate $LR(0)$.
- Le langage reconnu par cet automate est l'ensemble des séquences de symboles qui peuvent apparaître sur la pile d'un analyseur par décalage réduction pour cette grammaire.
- L'automate est utilisé pour construire la table SLR.
- La construction consiste à associer à tout état de l'automate des actions (décalage et réduction) en s'autorisant à regarder le prochain symbole.

Construction de l'automate $LR(0)$

1. Augmentation de la grammaire
2. Construction des ensembles d'articles (FERMETURE)
3. Construction de la fonction de transition (ALLER_A)
4. Construction des SUIVANT() pour la grammaire

Augmentation de la grammaire

Soit la grammaire suivante :

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E * B \mid E + B \mid B \\ B & \rightarrow & 0 \mid 1 \end{array}$$

On ajoute un non-terminal de départ $S \rightarrow E$. La grammaire augmentée est donc :

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & E \\ E & \rightarrow & E * B \mid E + B \mid B \\ B & \rightarrow & 0 \mid 1 \end{array}$$

Articles

- Un article d'une grammaire G est une règle de G avec un marqueur $\bullet$ à une certaine position de la partie droite.
- En partant de la règle $A \rightarrow XYZ$ on peut créer les quatre articles suivants:

$$
\begin{array}{lcl}
A & \rightarrow & \bullet XYZ \\
A & \rightarrow & X \bullet YZ \\
A & \rightarrow & XY \bullet Z \\
A & \rightarrow & XYZ \bullet
\end{array}
$$

- A partir de la règle $A \rightarrow \varepsilon$ on ne peut créer que l'article suivant : $A \rightarrow \bullet$
- Un article indique quelle partie d'une règle a déjà été reconnue à un certain point de l'analyse syntaxique (la partie se trouvant à gauche du point) et ce qui reste à reconnaître (à droite du point).

La fonction $\textsc{Fermeture}$

Si I est un ensemble d'articles d'une grammaire G, alors, $\textsc{Fermeture}(I)$ est l'ensembles des articles construits à partir de I grâce aux deux règles suivantes :

- Ajouter tous les articles de I dans $\textsc{Fermeture}(I)$
- Si $A \to \alpha \bullet B\beta \in \textsc{Fermeture}(I)$ et $B \to \gamma$ est une règle de G, alors ajouter l'article $B \to \bullet\gamma$ à $\textsc{Fermeture}(I)$ s'il ne s'y trouve pas déjà. Appliquer cette règle jusqu'à ce qu'aucun nouvel article ne puisse être ajouté à $\textsc{Fermeture}(I)$.

$$\begin{array}{rcll} \textsc{Fermeture}(S \to \bullet E) & = & \{S \to \bullet E, & E \to \bullet E * B, \\ & & E \to \bullet E + B, & E \to \bullet B, \\ & & B \to \bullet 0, & B \to \bullet 1\} \end{array}$$

La fonction $\textsc{Fermeture}$ permet de définir les états de l'automate $LR(0)$

La fonction $\textsc{goto}(I, X)$

- Si I est un ensemble d'articles et X est un symbole, alors $\textsc{goto}(I, X)$ est la $\textsc{Fermeture}$ de l'ensemble de tous les articles $A \to \alpha X \bullet \beta$ tels que $A \to \alpha \bullet X\beta$ est dans I
- La fonction $\textsc{goto}(I, X)$ est utilisée pour définir les transitions de l'automate $LR(0)$ d'une grammaire.

Exemple : $I_4 = \{S \to E\bullet, E \to E \bullet *B, E \to E \bullet +B\}$

$$\begin{aligned}\textsc{goto}(I_4, *) &= \textsc{Fermeture}\{E \to E * \bullet B\}\\ &= \{E \to E * \bullet B, B \to \bullet 0, B \to \bullet 1\}\end{aligned}$$

Automate $LR(0)$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \bullet E \\ \hline \\ \\ \\ \end{array}}$$

Automate $LR(0)$

$$
\boxed{\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \bullet E \\
\hline
E & \rightarrow & \bullet E * B \\
E & \rightarrow & \bullet E + B \\
E & \rightarrow & \bullet B
\end{array}}
$$

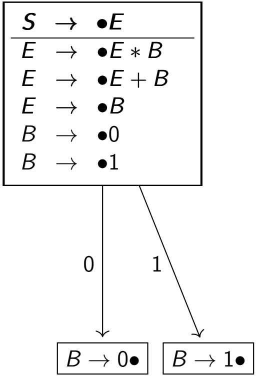
Automate $LR(0)$

$$\begin{array}{|lcl|}
\hline
S & \rightarrow & \bullet E \\
\hline
E & \rightarrow & \bullet E * B \\
E & \rightarrow & \bullet E + B \\
E & \rightarrow & \bullet B \\
B & \rightarrow & \bullet 0 \\
B & \rightarrow & \bullet 1 \\
\hline
\end{array}$$

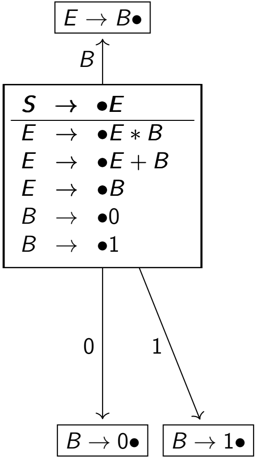
Automate $LR(0)$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{lcl} S & \to & \bullet E \\ \hline E & \to & \bullet E * B \\ E & \to & \bullet E + B \\ E & \to & \bullet B \\ B & \to & \bullet 0 \\ B & \to & \bullet 1 \end{array}} \arrow[d, "0"'] \\
\boxed{B \to 0 \bullet}
\end{tikzcd}$$

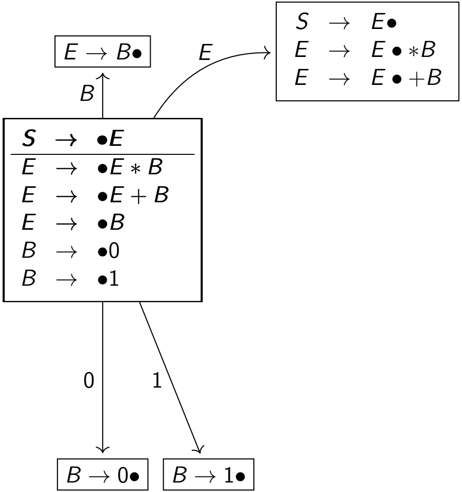
Automate $LR(0)$



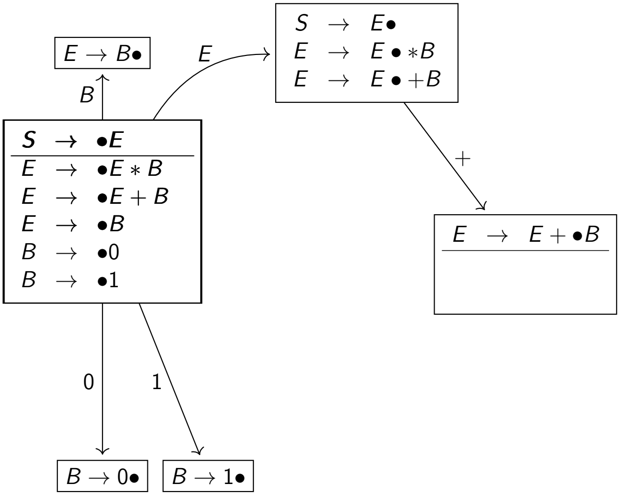
Automate $LR(0)$



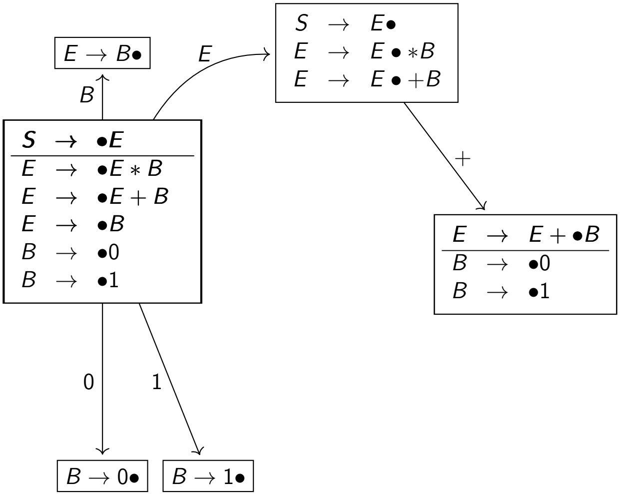
Automate $LR(0)$



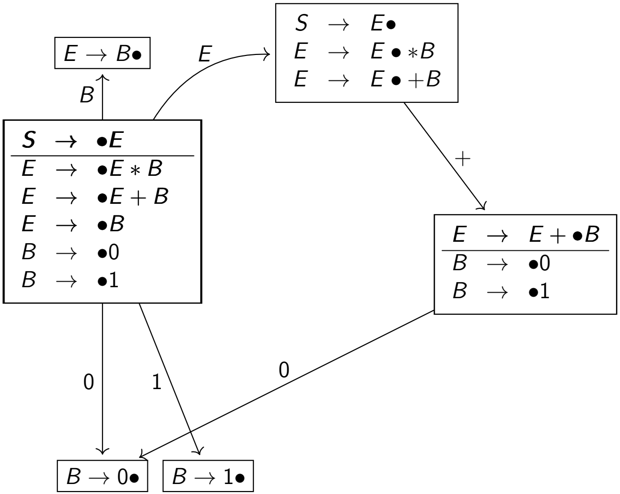
Automate $LR(0)$



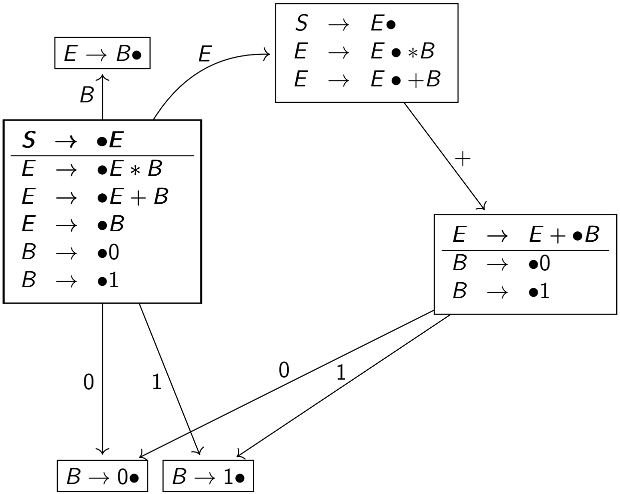
Automate $LR(0)$



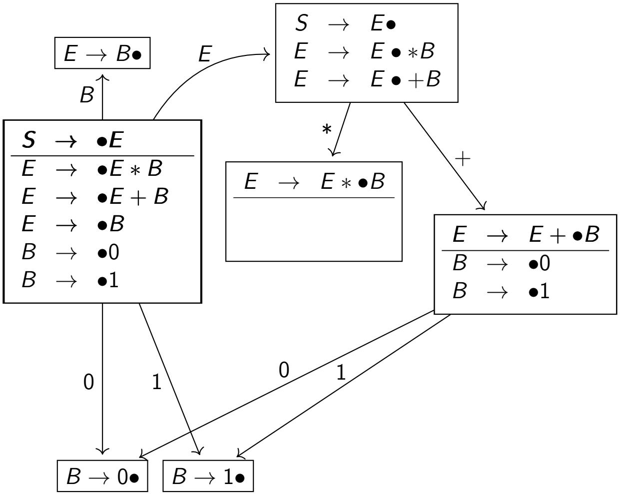
Automate $LR(0)$



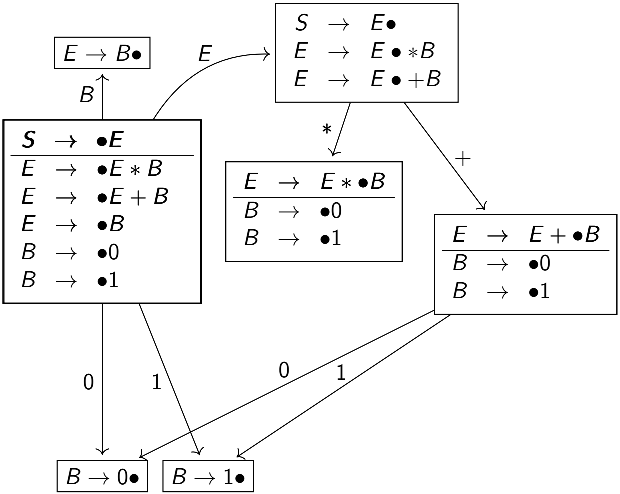
Automate $LR(0)$



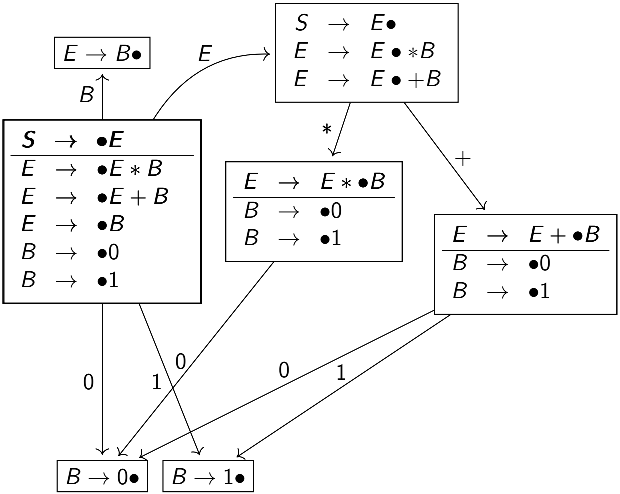
Automate $LR(0)$



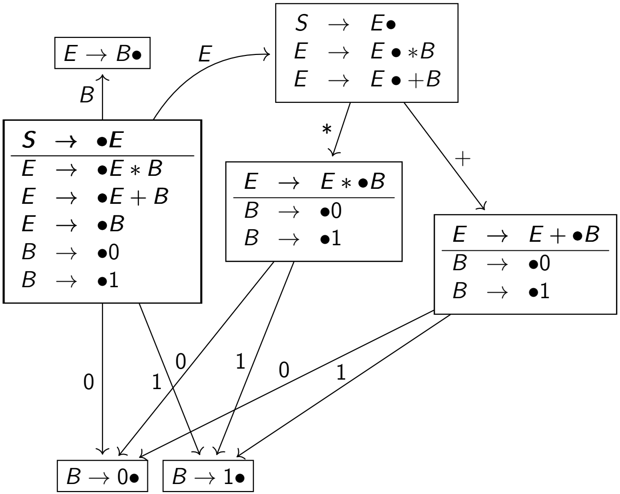
Automate $LR(0)$



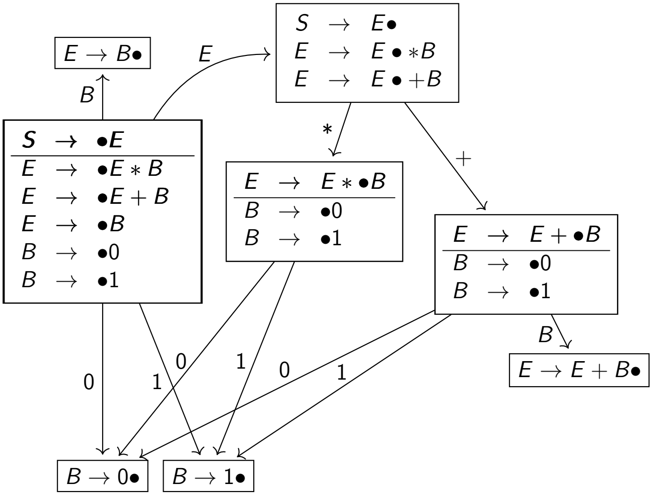
Automate $LR(0)$



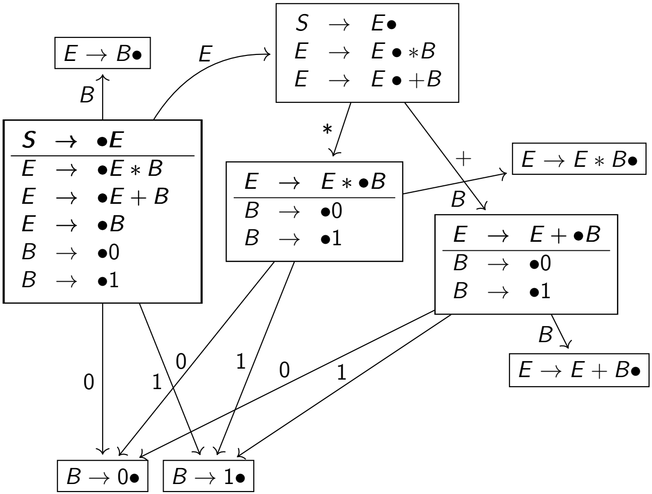
Automate $LR(0)$



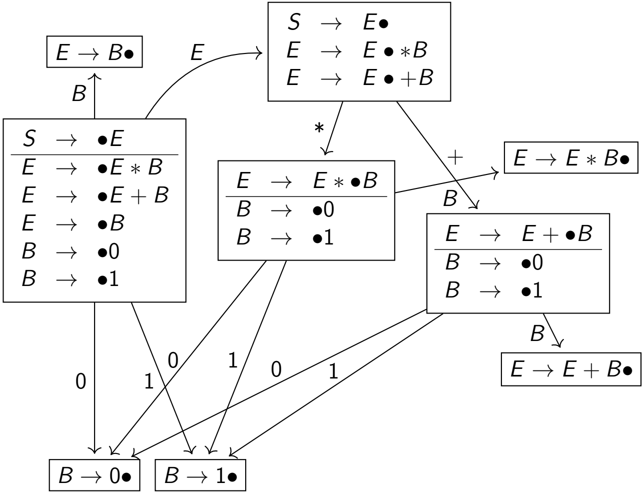
Automate $LR(0)$



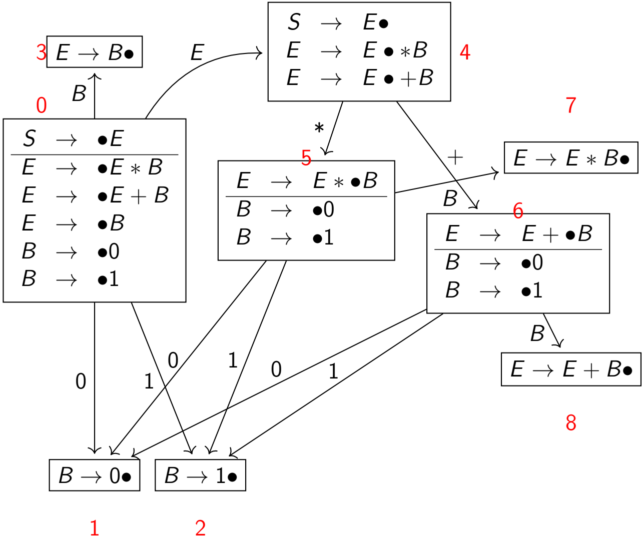
Automate $LR(0)$



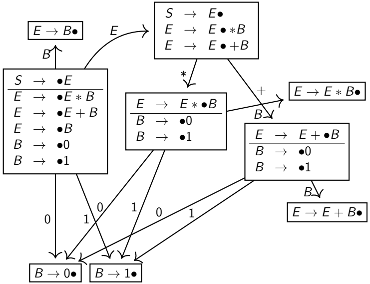
Automate $LR(0)$



Automate $LR(0)$

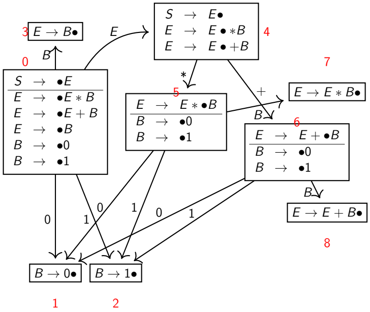


De l'automate $LR(0)$ à la table SLR



De l'automate $LR(0)$ à la table SLR

d = *décalage*, r = *réduction*, acc = *acceptation*



état	action					goto	
	0	1	*	+	\$	E	B
0	d1	d2				4	3
1			r4	r4	r4		
2			r5	r5	r5		
3			r3	r3	r3		
4			d5	d6	acc		
5	d1	d2					7
6	d1	d2					8
7			r2	r2	r2		
8			r1	r1	r1		

$$1: E \to E + B \qquad 4: B \to 0$$
$$2: E \to E * B \qquad 5: B \to 1$$
$$3: E \to B$$

Construction de la table SLR

Entrée : Une grammaire augmentée G'

1. Construire l'automate $LR(0)$, ses états correspondent à la collection d'ensemble d'articles $\{I_0, I_1, \ldots, I_n\}$.
2. L'état i correspond à l'ensemble I_i. Les actions d'analyse syntaxique pour l'état i sont déterminées comme suit :
   1. Si $(A \to \alpha \bullet a\beta \in I_i)$ et $(a \in \Sigma)$ et $(\textsc{goto}(I_i, a) = I_j)$ alors $\textsc{action}[i, a] = dj$.
   2. Si $(A \to \alpha \bullet \in I_i)$ et $(A \neq S')$ et $(a \in \textsc{suivant}(A))$ alors $\textsc{action}[i, a] = rj$ où j est le numéro de la règle $A \to \alpha$
   3. Si $S' \to S \bullet \in I_i$, alors $\textsc{action}[i, \$] = acc$
3. Les transitions de transfert pour l'état i sont construites pour tout non terminal A à l'aide de la règle suivante : si $\textsc{goto}(I_i, A) = I_j$ alors $\textsc{goto}[i, A] = j$
4. Toutes les entrées non remplies sont positionnées à err
5. L'état initial de l'analyseur est celui construit à partir de l'ensemble d'articles contenant $S' \to \bullet S$

SUIVANT(X)

Permet de savoir quels symboles terminaux peuvent suivre le symbole X dans les proto-mots de la grammaire :

$$\textsc{suivant}(X) = \{a \in \Sigma \mid S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X a \beta \text{ avec } \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

Exemple 1 : soit la règle $X \to Ya$, elle nous dit qu'un Y peut être directement suivi par un a.

Exemple 2 : soit la règle $X \to YZ$, elle ne nous dit pas ce qui peut suivre directement un Y, il faut pour cela savoir quels terminaux Z permet de générer.

$\Rightarrow$ Ces symboles sont déterminés par la fonction PREMIER(Z).

PREMIER

Si α est un proto-mot de G, $\textsc{premier}(\alpha)$ est l'ensemble des terminaux qui commencent les chaînes se dérivant de α :

$$\textsc{premier}(\alpha) = \{a \in \Sigma \mid \alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} a\beta \text{ avec } \beta \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

Si $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$ alors ε appartient aussi à $\textsc{premier}(\alpha)$.

Exemple

$$
\begin{aligned}
A &\to BC|a \\
B &\to b|\varepsilon \\
C &\to c|\varepsilon
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{l|l}
A \Rightarrow a & a \in \textsc{premier}(A) \\
A \Rightarrow BC \Rightarrow bC & b \in \textsc{premier}(A) \\
A \Rightarrow BC \Rightarrow C \Rightarrow c & c \in \textsc{premier}(A) \\
A \Rightarrow BC \Rightarrow C \Rightarrow \varepsilon & \varepsilon \in \textsc{premier}(A)
\end{array}
$$

- si règle $A \to B\alpha$ alors $(\textsc{premier}(B) \setminus \{\varepsilon\}) \subseteq \textsc{premier}(A)$
- si $\varepsilon \in \textsc{premier}(B)$ et règle $A \to BC\gamma$ alors $(\textsc{premier}(C) \setminus \{\varepsilon\}) \subseteq \textsc{premier}(A)$
- si règle $A \to BC$ et $\varepsilon \in \textsc{premier}(B)$ et $\varepsilon \in \textsc{premier}(C)$ alors $\varepsilon \in \textsc{premier}(A)$

Calcul de PREMIER(X)

Pour calculer $\textsc{premier}(X)$ avec $X \in N \cup \Sigma$, on applique les règles suivantes jusqu'à ce qu'aucun terminal ni ε ne puisse être ajouté aux ensembles `premier`.

1. Si $X \in \Sigma$ (X terminal), $\textsc{premier}(\mathrm{X}) = \{X\}$.
2. Si $X \rightarrow \varepsilon \in$ règles de réécriture de la grammaire, on ajoute ε à $\textsc{premier}(\mathrm{X})$.
3. Si $X \in N$ (X non terminal) et $X \rightarrow Y_1 \ldots Y_k \in P$, mettre a dans $\textsc{premier}(X)$ s'il existe i tel que a est dans $\textsc{premier}(Y_i)$ et que ε est dans tous les $\textsc{premier}(Y_1) \ldots \textsc{premier}(Y_{i-1})$. Si $\varepsilon \in \textsc{premier}(Y_j) \forall j\ ,\ 1 \leq j \leq k$, on ajoute ε à $\textsc{premier}(X)$.

PREMIER($X_1 \ldots X_n$)

On calcule $\textsc{premier}(X_1 \ldots X_n)$ de la façon suivante:

1. Ajouter à $\textsc{premier}(X_1 \ldots X_n)$ tous les symboles de $\textsc{premier}(X_1)$ différents de ε.
2. Si $\varepsilon \in \textsc{premier}(X_1)$, ajouter également les symboles de $\textsc{premier}(X_2)$ différents de ε. Si $\varepsilon \in \textsc{premier}(X_2)$, ajouter également les symboles de $\textsc{premier}(X_3)$ différents de ε, etc.
3. Finalement, si ε appartient à $\textsc{premier}(X_j)$ pour tous les $j = 1, 2, \ldots n$, on ajoute ε à $\textsc{premier}(X_1 \ldots X_n)$.

SUIVANT(X)

Si $X \in N$, $\textsc{suivant}(X)$ est l'ensemble des symboles $a \in \Sigma$ qui peuvent apparaître immédiatement à droite de X dans un proto-mot :

$$\textsc{suivant}(X) = \{a \in \Sigma \mid S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X a \beta\}$$

Si X peut être le symbole le plus à droite d'un proto-mot alors \$ est dans $\textsc{suivant}(X)$.

Exemple

$S \to Aa$

$A \to BC$

$C \to c|\varepsilon$

$$\begin{array}{l|l} S \Rightarrow Aa \Rightarrow BCa \Rightarrow Bca & c \in \textsc{suivant}(B) \\ S \Rightarrow Aa \Rightarrow BCa \Rightarrow Ba & a \in \textsc{suivant}(B) \end{array}$$

plus généralement : $\textsc{premier}(C) \subseteq \textsc{suivant}(B)$

si $\varepsilon \in \textsc{premier}(C)$ alors $\textsc{suivant}(A) \subseteq \textsc{suivant}(B)$

SUIVANT(X)

Pour calculer $\textsc{suivant}(X)$ pour tous symbole non terminal X, on applique les règles suivantes jusqu'à ce qu'aucun symbole terminal ne puisse être ajouté aux ensembles `suivant` :

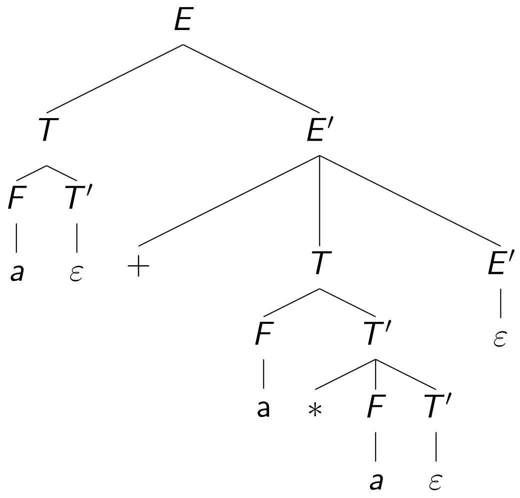
1. Mettre \$ dans $\textsc{suivant}(S)$.
2. si $X \to \alpha B \beta$, le contenu de $\textsc{premier}(\beta)$, excepté ε, est ajouté à $\textsc{suivant}(B)$.
3. s'il existe une règle $X \to \alpha B$ ou une règle $X \to \alpha B \beta$ telle que $\varepsilon \in \textsc{premier}(\beta)$ (c'est à dire $\beta \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$), les éléments de $\textsc{suivant}(X)$ sont ajoutés à $\textsc{suivant}(B)$.

Exemple de grammaire

Soit la grammaire
$G = \langle \{E, E', T, T', F\}, \{a, +, *, (,)\}, P, E \rangle$
non récursive à gauche où P est composé des règles suivantes :

1 $E \to TE'$	2 $E' \to +TE'$
3 $E' \to \varepsilon$	4 $T \to FT'$
5 $T' \to *FT'$	6 $T' \to \varepsilon$
7 $F \to (E)$	8 $F \to a$

Arbre de dérivation de $a + a * a$



Exemple de calcul de PREMIER(X) et SUIVANT(X)

$G = \langle\{E, E', T, T', F\}, \{a, +, *, (,)\}, P, E\rangle$ avec P:

1 $E \rightarrow TE'$	2 $E' \rightarrow +TE'$
3 $E' \rightarrow \varepsilon$	4 $T \rightarrow FT'$
5 $T' \rightarrow *FT'$	6 $T' \rightarrow \varepsilon$
7 $F \rightarrow (E)$	8 $F \rightarrow a$

$\text{PREMIER}(E) = \text{PREMIER}(T) = \text{PREMIER}(F) = \{(, a\}$; $\text{PREMIER}(E') = \{+, \varepsilon\}$;
$\text{PREMIER}(T') = \{*, \varepsilon\}$; $\text{SUIVANT}(E) = \{), \$\}$;
$\text{SUIVANT}(E') = \text{SUIVANT}(E) = \{), \$\}$;
$\text{SUIVANT}(T) = \{\text{PREMIER}(E') - \{\varepsilon\}\} \cup \text{SUIVANT}(E) = \{+,), \$\}$;
$\text{SUIVANT}(T') = \text{SUIVANT}(T) = \{+,), \$\}$;
$\text{SUIVANT}(F) = \{\text{PREMIER}(T') - \{\varepsilon\}\} \cup \text{SUIVANT}(T) = \{+, *,), \$\}$;

Conflits

- Si, à l'issue de la construction de la table, une case possède plusieurs actions, alors la grammaire n'est pas $SLR(1)$.
- Si une case possède deux réductions différentes, on dit qu'il y a un conflit réduction/réduction.
- Si une case possède un décalage et une réduction, on qu'il y a conflit décalage/réduction.
- Dans ce cas, soit la grammaire est ambiguë, soit il faut augmenter le regard en avant (la valeur de k).
- La majorité des langages de programmation admettent une grammaire qui est $SLR(1)$. En particulier le langage L.

Conflit réduction / réduction

$$\begin{array}{llcll} 1: & S & \rightarrow & X & b \\ 2: & S & \rightarrow & Y & b \\ 3: & X & \rightarrow & a & \\ 4: & Y & \rightarrow & a & \end{array}$$

- a se trouve au sommet de la pile, le prochain symbole est b.
- On ne sait pas s'il faut réduire par la règle 3 ou la règle 4.
- La grammaire est ambiguë !

Conflit de réduction / réduction (2)

$$
\begin{array}{llcll}
1: & S & \rightarrow & X & b \\
2: & S & \rightarrow & Y & c \\
3: & X & \rightarrow & a & \\
4: & Y & \rightarrow & a &
\end{array}
$$

- a se trouve au sommet de la pile.
- Si le prochain symbole est b, on réduit par la règle 3.
- Si le prochain symbole est c, on réduit par la règle 4.
- Il n'y a pas conflit !
- La grammaire est $LR(1)$

Conflit de décalage / réduction

$$\begin{array}{lcccc} 1: & S & \rightarrow & X & \\ 2: & S & \rightarrow & Y & b \\ 3: & X & \rightarrow & a & b \\ 4: & Y & \rightarrow & a & \end{array}$$

- a se trouve au sommet de la pile, le prochain symbole est b.
- On ne sait pas s'il faut décaler le b.
- Ou réduire par la règle 4.
- La grammaire est ambiguë.

Conflit de décalage / réduction

$$\begin{array}{lllll} 1: & S & \to & X & \\ 2: & S & \to & Y & b \\ 3: & X & \to & a & c \\ 4: & Y & \to & a & \end{array}$$

- a se trouve au sommet de la pile.
- Si le prochain symbole est b, on réduit par la règle 4.
- Si le prochain symbole est c, on le décale.
- Il n'y a pas conflit !
- La grammaire est $LR(1)$.

Grammaires $LR(2)$

$$
\begin{array}{rcccccc}
1: & S & \rightarrow & X & b & c \\
2: & S & \rightarrow & Y & b & d \\
3: & X & \rightarrow & a & & \\
4: & Y & \rightarrow & a & &
\end{array}
$$