Université de Provence
Année 2011/12

Licence Math Info 2ème année S3
Fondements de l'Informatique

TD: Relations

1 Relations, relations d'équivalence

1. Sur l'ensemble des mots de la langue française, on définit la relation : `le mot M est lié au mot N s'ils coïncident après qu'on ait inversé l'ordre des lettres de M`. Déterminer quelques couples de mots en relation, ainsi que des mots en relation avec eux-mêmes (ces derniers sont appelés des *palindromes*).

2. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on définit deux relations, notées respectivement Σ et Δ, de la façon suivant :

   - $x\Sigma y$ quand la somme $x+y$ est paire
   - $x\Delta y$ quand la différence $x-y$ est paire

   Ces relations sont-elles égales ?

3. En identifiant l'ensemble des relations entre A et B à l'aide de $\mathcal{P}(A\times B)$, déterminer le nombre de relations entre A et B en fonction du nombre d'éléments de A et de B.

4. Soient A et B deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation entre A et B. On associe à $\mathcal{R}$ une fonction $f : A \to \mathcal{P}(B)$ de la façon suivante : $f(a) = \{b \in B \mid a\mathcal{R}b\}$. On note ϕ l'application qui associe la fonction f à la relation $\mathcal{R}$. Démontrer que ϕ est bijective.

5. Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire, on lui associe la relation ${}^t\mathcal{R}$, appelée transposée de $\mathcal{R}$, définie par : $x\,{}^t\mathcal{R}y$ si $y\mathcal{R}x$.

   (a) Quelle est la transposée de ${}^t\mathcal{R}$?
   (b) Comparer les représentations cartésiennes de $\mathcal{R}$ et ${}^t\mathcal{R}$.
   (c) Que peut-on dire si $\mathcal{R}$ et ${}^t\mathcal{R}$ sont égales ?
   (d) Si $\mathcal{R}$ est transitive, en est-il de même de ${}^t\mathcal{R}$? Même question pour ll'anti-symétrie.

6. Les relations suivantes sont-elles réflexives, (anti)-symétriques et/ou transitives ?

   (a) $A=\mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si $|x|=|y|$
   (b) $A=\mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si $(\sin x)^2+(\cos y)^2=1$
   (c) $A=\mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y$ s'il existe p et q entiers strictement positifs tels que $y=px^q$
   (d) A est l'ensemble des points du plan, et $x\mathcal{R}y$ si la distance de x à y est inférieure à 52,7 km.

7. Combien y-a-t'il de relations binaires sur un ensemble à n éléments ?

8. Combien y-a-t'il de relations réflexives sur un ensemble à n éléments ?

9. Combien y-a-t'il de relations symétriques sur un ensemble à n éléments ?

10. Sur $\mathbb{Z}$ on écrit : $x\mathcal{R}y$ quand $x+y$ est pair. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire ses classes d'équivalence.

11. Sur l'ensemble des mots binaires de longueur 7, on définit la relation $m\mathcal{R}n$ quand les mots m et n diffèrent par moins de 5 bits. S'agit-il d'une relation d'équivalence ?

12. Sur l'ensemble des applications de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la relation $f\mathcal{R}g$ s'il existe deux constantes réelles *strictement positives* α et β telles que $\forall x, \alpha f(x) \leq g(x) \leq \beta f(x)$.

    (a) Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
    (b) Donner des exemples d'applications f et g qui sont équivalentes mais pas égales.

2 Relations d'ordre

1. Que peut-on dire d'une relation qui est à la fois symétrique et antisymétrique ?

2. Disons qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble A possède la propriété (P) si l'on n'a jamais en même temps $y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$.

   (a) Une telle relation est-elle antisymétrique ?

   (b) Une relation antisymétrique a-t-elle la propriété (P) ?

3. Soit E un ensemble ordonné. A tout élément de $x \in E$ on associe $M(x)$ l'ensemble des majorants de x, ce qui définit une application $M : E \to \mathcal{P}(E)$

   (a) Caractériser les éléments maximaux et le plus petit élément de E.

   (b) L'application M est-elle injective ?

4. Soit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{B}^*$ (mots binaires) tel que défini ci-dessous.

   Définition :

   Soit $\mathbb{B}^*$ les mots binaires, avec l'ordre $0 < 1$

   Soit ϵ le mot de longueur nulle

   Soit $m, w \in \mathbb{B}^*$, $m = m_1 m_2 m_3 \cdots m_p$ et $w \in \mathbb{B}^*, w = w_1 w_2 w_3 \cdots w_q$

   - $\forall m \in \mathbb{B}^*$, $\epsilon \preceq m$
   - $m \preceq w$ si : $p \leq q$ et $\forall i, 1 \leq i \leq p, m_i = w_i$ (exemple : $011 \preceq 0110$)
   - $m \preceq w$ si : $\forall i, 1 \leq i \leq s-1$ t.q. $s \leq p, q, m_i = w_i$ et $m_s < w_s$ (exemple : $001 \preceq 010$)

   Exemples :

   $100100 \preceq 1001001$, $01000111 \preceq 1100$, $01101 \preceq 01101$, $101 \preceq 110$
   fa$\preceq$fa, poule $\preceq$ poulet, avion $\preceq$ train, livraison $\preceq$ livre, foot $\preceq$ fort

   (a) Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.

   (b) Le mot 111 a-t-il un successeur immédiat ? Est-il le successeur immédiat d'un autre mot ?

   (c) Quels mots se trouvent entre 111 et 1111 ?

   (d) Généraliser en remplaçant $\mathbb{B}$ par n'importe quel ensemble fini totalement ordonné, par exemple l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.

5. Les relations définies par les représentations cartésiennes de la figure 1 sont-elles des relations d'ordre ? Si oui, dessiner leur diagramme de Hasse.

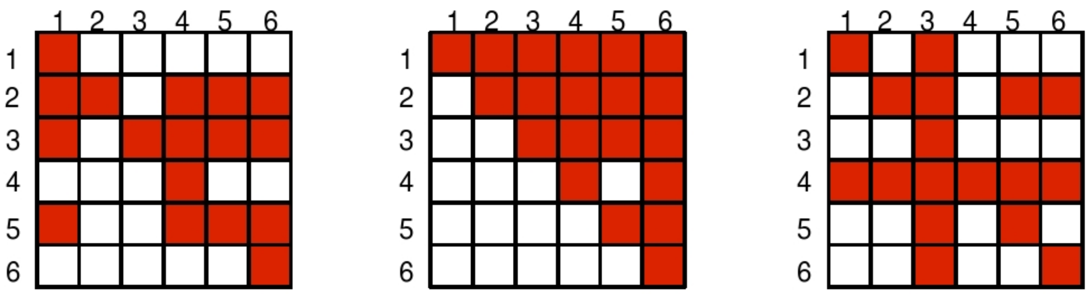

Figure 1: Trois relations sur $\mathbb{N}_6^*$

6. Combien y a-t-il de formes différentes du diagramme de Hasse pour un ensemble à quatre éléments ? Combien y a-t-il de relations d'ordre sur $\mathbb{N}_4^*$?

7. Parmi les dessins de la figure 2, lesquels sont des diagrammes de Hasse ?

8. On considère deux ensembles ordonnés A et B. On note $\preceq$ leur relation d'ordre. Sur le produit $A \times B$, on définit une relation $\mathcal{R}$ en déclarant : $(a, b)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ si $a \preceq \alpha$ et $b \preceq \beta$.

   (a) Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.

   (b) Est-ce que que $A \times B$ est totalement ordonné si A et B le sont ?

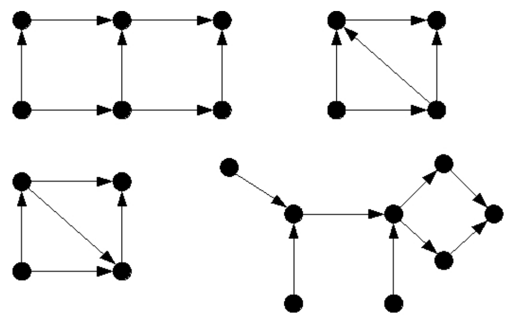

Figure 2: Quatre diagrammes : sont-ils des diagrammes de Hasse ?

   (c) Quels sont les éléments minimaux et maximaux de $A \times B$?
   (d) A quelle condition $A \times B$ a-t-il un plus grand élément ?

9. Soient A un ensemble non vide quelconque et B un ensemble ordonné par une relation d'ordre $\mathcal{R}$. Si f et g sont deux applications de A dans B, on écrit $f \Sigma g$ si l'on a $f(x)\mathcal{R}g(x)$ pour tout $x \in A$. Démontrer que Σ est une relation d'ordre sur B^A. A quelle condition B^A est-il totalement ordonné par cette relation ?

10. Combien peut-on mettre de relations d'ordre total sur $\mathbb{N}_n^*$?

11. On note $E = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Autrement dit, E est l'ensemble des entiers naturels, plus un élément ω qui n'est pas un entier. On munit E d'une relation d'ordre notée $\preceq$ en déclarant que ω est le plus grand élément de E et que si x et y sont deux entiers naturels, on a $x \preceq y$ si et seulement si $x \leq y$ dans $\mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que $\preceq$ est bien une relation d'ordre.
   (b) Démontrer que E est un ensemble *bien ordonné*
   (c) Quels éléments de E ne sont pas les successeurs d'autres éléments ?

12. On note A l'ensemble des relations sur E de cardinal n. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations, on note $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ celle dont le graphe est l'intersection des graphes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$; on note $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ celle dont le graphe est la réunion des graphes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$. Enfin, on dit qu'une relation $\mathcal{S}$ est *plus fine* qu'une relation $\mathcal{T}$ si l'on a $a\mathcal{T}b$ à chaque fois que $a\mathcal{S}b$. On écrira cette propriété $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$.
   (a) Comment voit-on que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$ sur les représentations cartésiennes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$?
   (b) Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalence, à quoi reconnaît-on, sur leurs classes d'équivalence, que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$? Est-ce que $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ sont aussi des relations d'équivalence ? Si oui, comment peut-on obtenir leurs classes d'équivalence à partir de celles de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$?
   (c) Démontrer que $\Longrightarrow$ est une relation d'ordre. Quel est son plus petit élément ? Quel est son plus grand élément ? Dans le cas où $E = \{a, b\}$, faire la liste des relations sur E et dessiner le diagramme de Hasse de A.
   (d) Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations d'ordre, en est-il de même des relations $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$?