Aix*Marseille université	Domaine Sciences et Technologies LICENCE D'INFORMATIQUE
	Automates et circuits : TD 7 **Code UE : ENSIN2U2**
Année 2012-13	**Ordres, Treillis et Algèbre de Boole**

Exercice 1

Question 1.1 Soit x un élément complémenté d'un treillis A et $\bar{x}$ un de ses compléments. Démontrer que $\bar{x}$ est complémenté et donner un de ses compléments.

> ***Solution :*** *Par définition du complément, on a $x \vee \bar{x} = \sup(A)$ et $x \wedge \bar{x} = \inf(A)$. Puisque $\vee$ et $\wedge$ sont des lois commutatives, on obtient que $\bar{x} \vee x = \sup(A)$ et $\bar{x} \wedge x = \inf(A)$. $\bar{x}$ est donc complément puisque x est un de ses compléments.*

Exercice 2 Soit N un nombre entier strictement positif quelconque. On munit A, l'ensemble des diviseurs entiers positifs de N de la relation de divisibilité noté $|$.

Question 2.1 Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

> ***Solution :*** *Il suffit prouver que la relation $|$ est réflexive, anti-symétrique et transitive.*
> - ***Réflexivité :*** *On a $\forall n \in \mathbb{N}, n \mid n$ car un entier est toujours un de ses propres diviseurs. La relation $|$ est donc réflexive.*
> - ***Anti-symétrie :*** *Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \mid m$ et $n \neq m$, on a que $n < m$ et donc $n \neq m$. La relation $|$ est donc anti-symétrique.*
> - ***Transitivité :*** *Pour tout $n, m, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \mid m$ et $m \mid p$, on a que $n \mid p$. La relation $|$ est donc transitive.*

Question 2.2 Dessiner le diagramme de Hasse quand $N = 25$ et $N = 6409$.

> ***Solution :***

Diagramme de Hasse pour $N = 25$

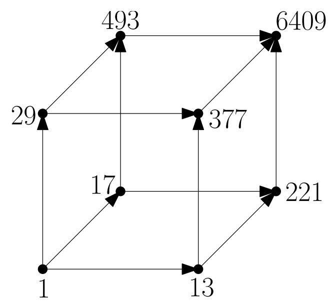


Diagramme de Hasse pour $N = 6409$

Question 2.3 Que sont $x \vee y$ et $x \wedge y$? Démontrer que A est un treillis distributif.

> ***Solution :*** *$x \vee y$ est par définition un entier z qui est divisible par x et y et tel que tout autre entier divisible par x et y est divisible par z. Un tel entier z existe toujours et est connu sous le nom de plus petit commun multiple de x et y noté ppcm(x, y). $x \wedge y$ est par définition un entier t qui divise x et y et tel que tout autre entier qui divise x et y divise t. Un tel entier t existe toujours et est connu sous le nom de plus grand diviseur commun de x et y noté pgcd(x, y). Puisque quelque soit $x, y \in A$, $x \vee y$ et $x \wedge y$ existe toujours, A est un treillis.*
>
> *Pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$, il est connu que : $\mathrm{pgcd}(a, \mathrm{ppcm}(b, c)) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{pgcd}(a, b), \mathrm{pgcd}(a, c))$ et $\mathrm{ppcm}(a, \mathrm{pgcd}(b, c)) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{ppcm}(a, b), \mathrm{ppcm}(a, c))$.*
> *On a donc que pour tout $a, b, c \in A$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. A est donc un treillis distributif.*

Question 2.4 Quels sont les éléments complémentés de A ? Quel est le complément d'un élément x ?

Solution : *Le plus petit élément de A est $\perp = 1$. Le plus grand élément de A est $\top = N$. Soit $\bar{x}$ un complément de $x \in A$. On a que $\text{pgcd}(x, \bar{x}) = 1$ et $\text{ppcm}(x, \bar{x}) = N$. x et $\bar{x}$ sont donc premiers entre eux et leur produit vaut N. Les éléments complémentés de A sont donc les diviseurs de N qui sont premiers avec N/x. Le complément de x s'il existe est égal à N/x.*

Question 2.5 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur N pour que le treillis soit complémenté.

Solution : *La condition nécessaire et suffisante est que N soit un produit de nombres premiers distincts $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Cette condition est suffisante car dans ce cas pour tout $x \in A$, x est un produit de nombres premiers d'un sous-ensemble B de P, et N/x est le produit des entiers de $P \setminus B$. Par conséquent, x et N/x sont premiers entre eux et donc sont compléments l'un de l'autre.*
La condition est aussi nécessaire car si elle n'est pas vraie alors N est le multiple d'un carré nombre premier p. Dans ce cas tout élément x de A divisible par p mais pas par p^2 n'est pas complémenté. En effet, dans ce cas, x est divisible par p et N/x est divisible par p. Par la réponse à la question précédente x n'est pas complémenté car x et N/x ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 3 Un treillis est modulaire si l'on a toujours $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ quand $x \preceq z$.

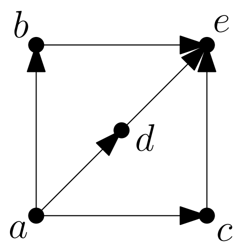
Question 3.1 Démontrer que les treillis distributifs sont modulaires.

Solution : *On a pour tout treillis distributifs et pour tout élément x, y, z de ce treillis tels que $x \preceq z$:*

$$\begin{array}{rcll} x \vee (y \wedge z) & = & (x \vee y) \wedge (x \vee z) & \text{par distributivité} \\ & = & (x \vee y) \wedge z & \text{car } z = x \vee z \text{ quand } x \preceq z \end{array}$$

Un treillis distributif est donc toujours modulaire.

Question 3.2 Le treillis ci-dessous est-il modulaire ? Est-il distributif ?



Solution : *Oui, ce treillis est modulaire. Il suffit de vérifier toutes les possibilités. Par contre, ce treillis n'est pas distributif. En effet, on a $c \vee (b \wedge d) = c \vee a = c$ et $(c \vee b) \wedge (c \vee d) = e \wedge e = e$.*

Exercice 4 Soit B et X deux algèbres de Boole. Sur l'ensemble $B \times X$, on définit les trois opérations :

$$(a, x) \blacktriangledown (b, y) = (a \wedge b, x \wedge y)$$

$$(a, x) \blacktriangle (b, y) = (a \vee b, x \vee y)$$

$$\widetilde{(a, x)} = (\bar{a}, \bar{x})$$

Question 4.1 Démontrer qu'avec ces opérations, $B \times X$ est une algèbre de Boole.

Solution : *Les opérations* $\blacktriangledown$ *et* $\blacktriangle$ *sont clairement associatives et commutatives car* $\vee$ *et* $\wedge$ *le sont. La borne supérieure de* $B \times X$ *est* $\top = (\top_B, \top_X)$ *où* $\top_B$ *et* $\top_X$ *sont respectivement les bornes supérieures de* B *et* X. *Sa borne inférieure est* $\perp = (\perp_B, \perp_X)$ *où* $\perp_B$ *et* $\perp_X$ *sont respectivement les bornes inférieures de* B *et* X. *Pour tout* $(a, x), (b, y), (c, z) \in B \times X$ *on a :*

$$(a, x) \blacktriangledown \perp = (a \vee \perp_B, x \vee \perp_X) = (a, x)$$

$$(a, x) \blacktriangle \top = (a \wedge \top_B, x \wedge \top_X) = (a, x)$$

$$(a, x) \blacktriangledown \widetilde{(a, x)} = (a \vee \bar{a}, x \vee \bar{x}) = (\top_B, \top_X) = \top$$

$$(a, x) \blacktriangle \widetilde{(a, x)} = (a \wedge \bar{a}, x \wedge \bar{x}) = (\perp_B, \perp_X) = \perp$$

$$\begin{aligned} (a, x) \blacktriangle ((b, x) \blacktriangledown (c, z)) &= (a \wedge (b \vee c), x \wedge (y \vee z)) \\ &= ((a \wedge b) \vee (a \wedge c), (x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \quad \textit{par distributivité de } \vee \textit{ et } \wedge \\ &= ((a, x) \blacktriangle (b, y)) \blacktriangledown ((a, x) \blacktriangle (c, z)) \end{aligned}$$

De même on a :

$$(a, x) \blacktriangledown ((b, x) \blacktriangle (c, z)) = ((a, x) \blacktriangledown (b, y)) \blacktriangle ((a, x) \blacktriangledown (c, z))$$

$B \times X$ *muni de* $\blacktriangledown$, $\blacktriangle$ *et* $\tilde{}$ *est donc une algèbre de Boole.*

Exercice 5 Sur toute algèbre de Boole on peut définir une quatrième opération notée Λ, en posant :

$$x \Lambda y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$$

Question 5.1 Démontrer que Λ possède les propriétés suivantes :

1. $x \Lambda x = \perp$
2. $x \Lambda y = y \Lambda x$
3. $x \Lambda \perp = x$
4. $(x \Lambda y) \Lambda z = x \Lambda (y \Lambda z)$
5. $x \wedge (y \Lambda z) = (x \wedge y) \Lambda (x \wedge z)$

Solution :

1. $x \Lambda x = (x \wedge \bar{x}) \vee (\bar{x} \wedge x) = \perp \vee \perp = \perp$
2. $x \Lambda y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) = (y \wedge \bar{x}) \vee (\bar{y} \wedge x) = y \Lambda x$
3. $x \Lambda \perp = (x \wedge \bar{\perp}) \vee (\bar{x} \wedge \perp) = (x \wedge \top) \vee \perp = x \vee \perp = x$
4. *On a :*
$$\begin{aligned} (x \Lambda y) \Lambda z &= (((x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \wedge \bar{z}) \vee (\overline{((x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y))} \wedge z) \\ &= (((x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \wedge \bar{z}) \vee (((\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})) \wedge z) \\ &= ((x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})) \vee ((\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge z) \\ &= (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} x \Lambda (y \Lambda z) &= (((x \wedge \overline{((y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge z))}) \vee (\bar{x} \wedge ((y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge z))) \\ &= (((x \wedge ((\bar{y} \vee z) \wedge (y \vee \bar{z}))) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \\ &= (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \\ &= (x \Lambda y) \Lambda z \end{aligned}$$
5. *On a :* $$\begin{aligned} x \wedge (y \Lambda z) &= x \wedge ((y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge z)) \\ &= (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} (x \wedge y) \Lambda (x \wedge z) &= ((x \wedge y) \wedge \overline{(x \wedge z)}) \vee (\overline{(x \wedge y)} \wedge (x \wedge z)) \\ &= ((x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})) \vee ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \wedge z)) \\ &= (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \\ &= x \wedge (y \Lambda z) \end{aligned}$$

Question 5.2 Réciproquement, une opération Λ qui possède ces propriétés est-elle nécessairement définie par $x\Lambda y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$?

Solution : *Montrons qu'une opérations Λ qui possède les cinq propriétés de la question précédente est nécessairement définie par $x\Lambda y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$. Posons $z = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$.*
On a :

$$\begin{array}{rcll} (\bar{x} \wedge y) \wedge (x\Lambda y) & = & ((\bar{x} \wedge y) \wedge x)\Lambda((\bar{x} \wedge y) \wedge y) & \textit{par la propriété 5} \\ & = & \bot\Lambda(\bar{x} \wedge y) & \\ & = & (\bar{x} \wedge y)\Lambda\bot & \textit{par la propriété 2} \\ & = & \bar{x} \wedge y & \textit{par la propriété 3} \end{array}$$

De même, on a :

$$\begin{array}{rcll} (x \wedge \bar{y}) \wedge (x\Lambda y) & = & ((x \wedge \bar{y}) \wedge x)\Lambda((x \wedge \bar{y}) \wedge y) & \textit{par la propriété 5} \\ & = & (x \wedge \bar{y})\Lambda\bot & \\ & = & x \wedge \bar{y} & \textit{par la propriété 3} \end{array}$$

On obtient donc que :

$$\begin{array}{rcll} z & = & (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) & \\ & = & ((x \wedge \bar{y}) \wedge (x\Lambda y)) \vee ((\bar{x} \wedge y) \wedge (x\Lambda y)) & \\ & = & ((x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \wedge (x\Lambda y) & \\ & = & z \wedge (x\Lambda y) & (1) \end{array}$$

De plus, on a :

$$\begin{array}{rcll} \bar{z} \wedge (x\Lambda y) & = & \overline{(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)} \wedge (x\Lambda y) & \\ & = & ((\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})) \wedge (x\Lambda y) & \\ & = & (x \vee \bar{y}) \wedge ((\bar{x} \vee y) \wedge (x\Lambda y)) & \\ & = & (x \vee \bar{y}) \wedge ((\bar{x} \vee y) \wedge x)\Lambda((\bar{x} \vee y) \wedge y) & \textit{par la propriété 5} \\ & = & (x \vee \bar{y}) \wedge ((x \wedge y)\Lambda y) & \\ & = & ((x \vee \bar{y}) \wedge (x \wedge y))\Lambda((x \vee \bar{y}) \wedge y) & \textit{par la propriété 5} \\ & = & (x \vee y)\Lambda(x \vee y) & \\ & = & \bot & \textit{par la propriété 1} \quad (2) \end{array}$$

Il en résulte que :

$$\begin{array}{rcll} x\Lambda y & = & \top \wedge (x\Lambda y) & \\ & = & (z \vee \bar{z}) \wedge (x\Lambda y) & \\ & = & (z \wedge (x\Lambda y)) \vee (\bar{z} \wedge (x\Lambda y)) & \\ & = & z \vee \bot & \textit{par (1) et (2)} \\ & = & z & \\ & = & (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) & \end{array}$$

Exercice 6 Soit x un élément d'une algèbre de Boole.

Question 6.1 Que peut-on dire d'un élément y qui vérifie $x \wedge y = \bot$?

Solution : *Si $x \wedge y = \bot$ alors $y \preceq \bar{x}$. En effet, si $x \wedge y = \bot$, on a :*

$$\begin{array}{rcl} y \wedge \bar{x} & = & (y \wedge \bar{x}) \vee \bot \\ & = & (y \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge y) \\ & = & y \wedge (x \vee \bar{x}) \\ & = & y \wedge \top \\ & = & y \end{array}$$

On a donc bien $y \leq \bar{x}$ car $y \wedge \bar{x} = y$.

Question 6.2 Que peut-on dire d'un élément y qui vérifie $x \vee y = \top$?

Solution : *On peut remarquer que la condition $x \vee y = \top$ est équivalente à $\bar{x} \wedge \bar{y} = \bot$ (obtenue en faisant le complément des deux membres de l'égalité). D'après la réponse à la question précédente, on peut donc en déduire que $\bar{y} \leq x$.*

Exercice 7

Dire si les égalités suivantes sont vérifiées dans toute algèbre de Boole :

Question 7.1 $\bar{x} \vee (x \wedge y) = \bar{x} \vee y$

Solution : Cette égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{array}{rcl} \bar{x} \vee (x \wedge y) & = & (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{x} \vee y) \\ & = & \top \wedge (\bar{x} \vee y) \\ & = & \bar{x} \vee y \end{array}$$

Question 7.2 $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) = (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y)$

Solution : Cette égalité n'est pas toujours vérifiée. Par exemple, pour $x = y = z = \top$ on a :

$$\begin{array}{rcl} (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) & = & (\top \vee \top) \wedge (\bar{\top} \vee \bar{\top}) \\ & = & \top \wedge \bot \\ & = & \bot \\ & & \\ (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y) & = & (\top \vee \bar{\top}) \wedge (\bar{\top} \vee \top) \\ & = & (\top \vee \bot) \wedge (\bot \vee \top) \\ & = & \top \wedge \top \\ & = & \top \end{array}$$

Question 7.3 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$

Solution :

$$\begin{array}{rl} (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) & = \\ ((x \wedge x) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{z} \wedge x) \vee (\bar{z} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{z} \wedge z)) \wedge (x \vee y \vee z) & = \\ (x \vee ((x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)) \vee ((x \wedge z) \vee (x \wedge \bar{z})) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z})) \wedge (x \vee y \vee z) & = \\ (x \vee ((x \wedge (\bar{y} \vee y)) \vee ((x \wedge (\bar{z} \vee z)) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z})) \wedge (x \vee y \vee z) & = \\ (x \vee ((x \wedge \top) \vee ((x \wedge \top) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z})) \wedge (x \vee y \vee z) & = \\ (x \vee (y \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z})) \wedge (x \vee y \vee z) & = \\ (x \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) & = \\ (x \vee (x \wedge (y \wedge z)) \vee (x \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z})) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) & = \\ x \vee (y \wedge z) & = \\ \textit{par loi d'absorption} & \end{array}$$

Question 7.4 $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$

Solution : Cette égalité est toujours vérifiée.

$$\begin{array}{rl} (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) & = \\ (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge x) \vee (x \wedge z \wedge z) \vee (x \wedge z \wedge x) \vee (y \wedge y \wedge z) \vee (y \wedge y \wedge x) \vee (y \wedge z \wedge z) \vee (y \wedge z \wedge x) & = \\ ((x \wedge y) \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) & = \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) & \\ \textit{par loi d'absorption} & \end{array}$$

Question 7.5 $x \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) = (x \vee y \vee z \vee u)$

Solution : *Cette égalité est toujours vérifiée.*

$$\begin{aligned}
x \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) &= \\
(x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) &= \\
(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) &= \\
(x \vee y \vee \bar{x}) \wedge (x \vee y \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y \vee z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) &= \\
(x \vee y \vee z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) &= \\
(x \vee y \vee z \vee \bar{x}) \wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z \vee u) &= \\
(x \vee y \vee z \vee u) &
\end{aligned}$$

Exercice 8 En utilisant les formules de De Morgan, déterminer les compléments de :

Question 8.1 $(\bar{y} \wedge z) \vee (z \wedge d)$

Solution :

$$\overline{(\bar{y} \wedge z) \vee (z \wedge d)} = (y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{z} \vee \bar{d})$$

Question 8.2 $(y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge x) \vee (x \wedge z)$

Solution :

$$\overline{(y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge x) \vee (x \wedge z)} = (\bar{y} \vee z) \wedge (y \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})$$

Question 8.3 $(y \wedge \overline{(x \vee y)}) \vee (\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge z})$

Solution :

$$\begin{aligned}
\overline{(y \wedge \overline{(x \vee y)}) \vee (\overline{(\bar{x} \vee y) \wedge z})} &= (\bar{y} \vee (x \vee y)) \wedge ((\bar{x} \vee y) \wedge z) \\
&= (\bar{x} \vee y) \wedge z
\end{aligned}$$

Question 8.4 $x \wedge \overline{y \vee \bar{x} \vee \overline{(x \vee (\bar{y}))}}$

Solution :

$$\begin{aligned}
\overline{x \wedge \overline{\overline{y \vee \bar{x} \vee \overline{(x \vee (\bar{y}))}}}} &= \bar{x} \vee y \vee \bar{x} \vee \overline{(x \vee (\bar{y}))} \\
&= \bar{x} \vee y \vee (\bar{x} \wedge y) \\
&= \bar{x} \vee y
\end{aligned}$$

Exercice 9 Dans une algèbre de Boole, un élément peut-il être égal à son complément ?

Solution : *Soit x un élément d'une algèbre de Boole B tel que $x = \bar{x}$. On a $x = x \wedge x = x \wedge \bar{x} = \perp$ et $x = x \vee x = x \vee \bar{x} = \top$. On obtient donc que x est le plus petit et le plus grand élément de B. Dans ce cas x est le seul élément de B. Un élément peut être égal à son complément s'il est le seul élément de l'algèbre de Boole.*

Exercice 10

Question 10.1 Que peut-on dire d'un élément x d'une algèbre de Boole qui vérifie $x \preceq \bar{x}$?

Solution : *On a $x = x \vee \bar{x} = \perp$. L'élément x est donc le plus petit élément de l'algèbre de Boole.*

Question 10.2 Que peut-on dire si deux éléments d'une algèbre de Boole vérifient $x \wedge y = x \vee y$?

Solution : *On a (par définition de $\vee$ et $\wedge$) $x \wedge y \preceq x \preceq x \vee y$. On a donc $x \wedge y = x = x \vee y$. Par conséquent, on obtient que $y \preceq x$. De même, on a $x \wedge y \preceq y \preceq x \vee y$ et $x \wedge y = y = x \vee y$. Finalement, on a que $x \preceq y$ et donc $x = y$.*

Exercice 11

Question 11.1 Si deux éléments a et b d'une algèbre de Boole vérifient $a \preceq b$, montrer que :

1. $(x \wedge a) \preceq (x \wedge b)$
2. $(x \vee a) \preceq (x \vee b)$
3. $\bar{b} \preceq \bar{a}$

Solution :

1. *Puisque $a \preceq b$, on a $b \wedge a = a$ donc $x \wedge (b \wedge a) = x \wedge a$. On obtient que $(x \wedge b) \wedge a = x \wedge a$. $x \wedge a$ est donc un minorant de $x \wedge b$ et $(x \wedge a) \preceq (x \wedge b)$.*
2. *Puisque $a \preceq b$, on a $b \vee a = b$ donc $x \vee (b \vee a) = x \vee b$. On obtient que $(x \vee a) \vee b = x \vee b$. $x \vee b$ est donc un majorant de $x \vee a$ et $(x \vee a) \preceq (x \vee b)$.*
3. *On a $b \wedge a = a$ et donc $\overline{b \wedge a} = \bar{a}$. On obtient que $\bar{b} \vee \bar{a} = \bar{a}$ et $\bar{a}$ est donc un majorant de $\bar{b}$. On a donc bien $\bar{b} \preceq \bar{a}$.*

Exercice 12 Soit B une algèbre de Boole. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour que $x \preceq y$, il faut et il suffit qu'il existe z tel que $x = y \wedge z$.
2. Pour que $x \preceq y$, il faut et il suffit qu'il existe z tel que $y = x \vee z$.
3. Pour que $x \preceq y$, il faut et il suffit qu'une des quatre conditions suivantes soit réalisée :

$$x \wedge y = x \qquad x \vee y = y \qquad x \wedge \bar{y} = \bot \qquad \bar{x} \vee y = \top$$

Solution :

1. *Si $x \preceq y$, alors $x = y \wedge x$ car x est le plus grand minorant commun de x et y et donc la propriété est vérifiée en prenant $z = x$. Réciproquement, s'il existe z tel que $x = y \wedge z$ alors x est un minorant de y et donc $x \preceq y$.*
2. *Si $x \preceq y$, alors $y = y \vee x$ car y est le plus petit majorant commun de x et y et donc la propriété est vérifiée en prenant $z = y$. Réciproquement, s'il existe z tel que $y = y \vee z$ alors y est un majorant de x et donc $x \preceq y$.*
3. *Si $x \preceq y$, alors on a $x = y \wedge x$ et $y = y \vee x$. Dans toute algèbre de Boole, on a : $(x \vee y) \wedge \bar{y} = (x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{y}) = x \wedge \bar{y}$. Si $x \preceq y$, on a $x \wedge \bar{y} = (x \vee y) \wedge \bar{y} = y \wedge \bar{y} = \bot$. Enfin ; en prenant le complément des deux membres de la condition $x \wedge \bar{y} = \bot$, on obtient que $\bar{x} \vee y = \top$ équivaut à $x \wedge \bar{y} = \bot$. Réciproquement, si $x = y \wedge x$ ou $y = y \vee x$ alors $x \preceq y$. Remarquons que dans toute algèbre de Boole, on a : $(x \wedge \bar{y}) \vee y = (x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee y) = x \vee y$. Si $x \wedge \bar{y} = \bot$ alors $y = \bot \vee y = (x \wedge \bar{y}) \vee y = x \vee y$ et donc $x \preceq y$. On a aussi $x \preceq y$ si $\bar{x} \vee y = \top$ car les conditions $\bar{x} \vee y = \top$ et $x \wedge \bar{y} = \bot$ sont équivalentes.*

Exercice 13 On étudie l'équation $a \vee x = b$ où a et b sont donnés et x est inconnu.

Question 13.1 Montrer que $a \preceq b$ est une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait au moins une solution.

Solution : *La condition $a \preceq b$ est nécessaire car pour tout x, si $a \vee x = b$ alors b est un majorant de a. Réciproquement si $a \preceq b$, alors $x = b$ est solution car $a \vee b = b$.*

Question 13.2 On pose $y = x \vee \bar{a}$. Montrer que $x = b \wedge y$ et $\top = b \vee y$.

Solution : *On a :* $b \wedge y = b \wedge (x \vee \bar{a}) = (b \wedge x) \vee (b \wedge \bar{a})$. *On a* $b \wedge x = x$ *car l'équation de départ* $a \vee x = b$ *implique que* b *est un majorant de* x. *De plus, on a* $b \wedge \bar{a} = (a \vee x) \wedge \bar{a} = (a \wedge \bar{a}) \vee (x \wedge \bar{a}) = x \wedge \bar{a}$. *On obtient donc que* $b \wedge y = (b \wedge x) \vee (b \wedge \bar{a}) = x \vee (x \wedge \bar{a}) = x$ *par absorption. De même,* $b \vee y = b \vee (x \vee \bar{a}) = (b \vee \bar{a}) \vee x$. *On remarque que puisque* $a \preceq b$, *on a* $\bar{a} \vee b = \top$ *d'après la question 3 de l'exercice précédent. On obtient que* $b \vee y = (b \vee \bar{a}) \vee x = \top \vee x = \top$.

Question 13.3 Si x est une solution, montrer qu'on a nécessairement $(\bar{a} \wedge b) \preceq x \preceq b$. Démontrer la réciproque.

Solution : *On a* $x \vee (\bar{a} \wedge b) = (x \vee \bar{a}) \wedge (x \vee b) = y \wedge b$ *car* b *est un majorant de* x. *On a donc* $x \vee (\bar{a} \wedge b) = y \wedge b = x$. x *est donc un majorant de* $\bar{a} \wedge b$. *Au final, on a donc* $(\bar{a} \wedge b) \preceq x \preceq b$ *car* b *est un majorant de* x *puisque* $a \vee x = b$.
Réciproquement, supposons que $(\bar{a} \wedge b) \preceq x \preceq b$ *et* $a \vee x = b$. b *est donc un majorant de* a. *On a* $x = x \vee (\bar{a} \wedge b) = (x \vee \bar{a}) \wedge (x \vee b) = (x \vee \bar{a}) \wedge b$. *On obtient que* $x \vee a = ((x \vee \bar{a}) \wedge b) \vee a = (x \vee \bar{a} \vee a) \wedge (b \vee a) = \top \vee b = b$.

Question 13.4 Démontrer que les solutions de l'équation sont tous les éléments de la forme $x = b \wedge c$ avec $\bar{a} \preceq c$.

Solution : *Si* $x = b \vee c$ *et* $\bar{a} \preceq c$ *alors* $b \wedge \bar{a} \preceq b$ *et* $b \wedge \bar{a} \preceq c$ *et donc* $b \wedge \bar{a} \preceq b \wedge c$. *De plus, on a* $b \wedge c \preceq b$. *On obtient donc que* $b \wedge \bar{a} \preceq b \wedge c \preceq b$. $x = b \wedge c$ *est donc solution de l'équation d'après la réponse à la question précédente.*
Réciproquement, si x *est une solution, posons* $c = x \vee \bar{a}$. *On a bien* $\bar{a} \preceq c$. *On a :* $b \wedge c = b \wedge (x \vee \bar{a}) = (b \wedge x) \vee (b \vee \bar{a})$. *Puisque* x *est une solution, d'après la réponse à la question précédente, on a* $b \wedge \bar{a} \preceq x \preceq b$ *et donc* $b \wedge c = (b \wedge x) \vee (b \vee \bar{a}) = x \vee (b \vee \bar{a}) = x$.

Question 13.5 Reprendre l'étude pour l'équation $a \wedge x = b$.

Solution : *L'équation* $a \wedge x = b$ *est équivalente à* $\bar{a} \wedge \bar{x} = \bar{b}$. *Il suffit donc de résoudre* $\bar{a} \wedge z = \bar{b}$ *et de poser* $x = \bar{z}$. *Cette équation a des solution que si* $z \leq \bar{b}$ *(d'après la question 1) et* z *est solution si et seulement si* $(a \wedge \bar{b}) \preceq z \preceq \bar{b}$ *(d'après la question 3). En utilisant la réponse à la question 3) de l'exercice 11.1, on a que l'équation a des solutions si et seulement* $b \preceq x$ *et que* x *est solution si et seulement si* $b \preceq x \preceq \overline{(a \wedge \bar{b})} = (\bar{a} \vee b)$

Exercice 14

Question 14.1 Un élément a d'une algèbre de Boole étant donné, quelles sont les solutions de l'équation

$$(a \wedge x) \vee (\bar{a} \wedge \bar{x}) = \top$$

Solution : *On a :*

$$\begin{aligned} & (a \wedge x) \vee (\bar{a} \wedge \bar{x}) = \top \\ \Leftrightarrow\quad & (a \vee \bar{a}) \wedge (a \vee \bar{x}) \wedge (x \vee \bar{a}) \wedge (x \vee \bar{x}) = \top \\ \Leftrightarrow\quad & (a \vee \bar{x}) \wedge (x \vee \bar{a}) = \top \end{aligned}$$

Pour que la condition soit vraie, il faut donc que $\top \preceq a \vee \bar{x}$ *et* $\top \preceq x \vee \bar{a}$. *Puisque* $\top$ *est le plus grand élément de l'algèbre de Boole cela équivaut à* $\top = a \vee \bar{x}$ *et* $\top = x \vee \bar{a}$. *D'après la réponse à question 3) de l'exercice 12, on obtient que cela équivaut* $x \preceq a$ *et* $a \preceq x$ *et donc* $a = x$.

Exercice 15

Question 15.1 Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de cardinal 2^n. Combien peut-on mettre de relations d'ordre sur $\mathcal{B}$ pour en faire une algèbre de Boole ?

Solution : *Il faut regarder toutes les façons de placer ces éléments pour constituer un n-cube. On choisit d'abord le plus petit élément, ce qui fait 2^n possibilités. Ensuite on choisit les n atomes parmi les $2^n - 1$ éléments restants, ce qui fait $\binom{2^n-1}{n}$ possibilités. Enfin, on place les $2^n - 1 - n$ éléments sur les sommets restants, ce qui fait $(2^n - 1 - n)!$ possibilités. La réponse est donc :*

$$2^n \binom{2^n - 1}{n} (2^n - 1 - n)! = \frac{2^n (2^n - 1)!(2^n - 1 - n)!}{n!(2^n - 1 - n)!} = \frac{(2^n)!}{n!}$$

Exercice 16 On considère une algèbre de Boole qui possède n atomes. Si x est un élément quelconque, on note $d(x)$ le plus petit nombre de flèches qu'il faut suivre pour aller de $\perp$ à x dans le diagramme de Hasse.

Question 16.1 Que valent $d(\perp), d(\top)$ et $d(a)$ quand a est un atome ?

Solution : *On a $d(\perp) = 0$. On a $d(\top) = n$ car le plus cours chemin entre deux coins opposés d'un cube de dimension n est de longueur n. $d(a) = 1$ car les atomes sont par définition les successeurs immédiat de $\perp$.*

Question 16.2 Si x est un élément quelconque, exprimer $d(x)$ en fonction du nombres d'atomes inférieurs à x.

Solution : *$d(x)$ est égale aux nombres d'atomes inférieurs à x. Pour s'en rendre compte, il suffit d'utiliser l'isomorphisme avec $\mathbb{B}^n$ introduit par le théorème de Stone. Chaque élément x est associé à un mot binaire contenant autant de 1 que le nombre d'atomes qu'il majore. Le plus court chemin entre $\perp = 00\ldots0$ et le mot correspondant à x est de longueur égal aux nombre de 1 du mot. En effet, une flèche dans le cube relie toujours un mot avec un autre mot qui contient un 1 en plus.*

Question 16.3 Démontrer la formule $d(x \vee y) = d(x) + d(y) - d(x \wedge y)$.

Solution : *On pose $x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_r$ et $y = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_s$ les décompositions de x et y en somme des atomes qui leur sont inférieurs. Si $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots a_t = b_t$ sont les atomes inférieurs à la fois à x et à y, on a $x \wedge y = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_t$ et $x \vee y = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_r \vee b_{t+1} \vee b_{t+2} \vee \cdots \vee b_s$. On obtient que $d(x) = r$, $d(y) = s$, $d(x \wedge y) = t$ et $d(x \vee y) = r + s - t = d(x) + d(y) - d(x \wedge y)$.*