Aix*Marseille université	Domaine Sciences et Technologies LICENCE D'INFORMATIQUE **Automates et circuits : TD 6** **Code UE : ENSIN2U2**
Année 2012-13	**Ordres, Treillis et Algèbre de Boole**

Exercice 1 Soit E un ensemble ordonné. A tout élément de $x \in E$ on associe $M(x)$ l'ensemble des majorants de x, ce qui définit une application $M : E \to \mathcal{P}(E)$.

Question 1.1 Caractériser les éléments maximaux de E en fonction de M.

Solution : *Un élément maximal est un élément qui n'a pas de majorant autre que lui-même. Les éléments maximaux sont donc les x tels que $M(x)$ est un singleton ($M(x) = \{x\}$).*

Question 1.2 Caractériser le plus petit élément de E en fonction de M.

Solution : *Un plus petit élément est majoré par tous les éléments de l'ensemble. Le plus petit élément de E est donc l'élément x tel que $M(x) = E$.*

Question 1.3 L'application M est-elle injective ?

Solution : *On peut remarquer que le plus petit élément de $M(x)$ est toujours l'élément x. En effet, $x \in M(x)$ car x se majore toujours lui-même et x est par définition plus petit que tous les éléments de $M(x)$. Par conséquent, si $x \neq y$ alors $M(x) \neq M(y)$ car $M(x)$ et $M(y)$ ont des plus petit éléments différents. L'application M est donc injective.*

Exercice 2 Soit la relation $\preceq$ définie sur $\{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $x \leq y\}$ de la façon suivante : $(x, y) \preceq (x', y') \Leftrightarrow x \geq x'$ et $y \leq y'$

Question 2.1 Prouver que $\preceq$ est une relation d'ordre.

Solution : *Il suffit de prouver les trois propriétés d'une relation d'ordre.*
- *réflexivité : $(x, y) \preceq (x, y)$ car $x \geq x$ et $y \leq y$*
- *antisymétrie : $(x, y) \preceq (x', y')$ et $(x, y) \preceq (x', y') \Rightarrow x' = x$ et $y = y'$*
- *transitivité : $(x, y) \preceq (x', y')$ et $(x', y') \preceq (x'', y'') \Rightarrow (x, y) \preceq (x'', y'')$*

Question 2.2 Donner le ou les élément minimaux de $\preceq$.

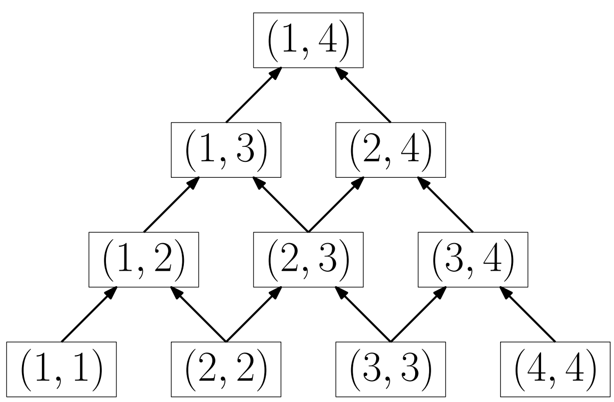
Solution : *Les éléments minimaux sont $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ et $(4, 4)$.*

Question 2.3 Est-ce-que $\preceq$ a un plus grand élément ?

Solution : *$(1, 4)$ est un plus grand élément.*

Question 2.4 Dessiner le diagramme de Hasse de la relation d'ordre $\preceq$.

Solution :



Exercice 3 On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{B}^*$ (mots binaires) de la façon suivante.

Soit $\mathbb{B}^*$ les mots binaires (les suites de 0,1), avec $0 < 1$. Soit ϵ le mot de longueur nulle. Soit $m \in \mathbb{B}^*$, $m = m_1 m_2 m_3 \ldots m_p$ et $w \in \mathbb{B}^*$, $w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_q$ (pour tout i, $m_i, w_i \in \{0, 1\}$).

1. pour tout w de $\mathbb{B}^*$, $\epsilon \preceq w$.
2. pour tout m différent de ϵ,

$$m \preceq w \text{ si } \begin{cases} p \leq q \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq p,\ w_i = m_i \\ \textit{ou} \\ \text{il existe } s, 1 \leq s \leq p, q \text{ tel que pour tout } 1 \leq i \leq s-1,\ w_i = m_i \text{ et } m_s < w_s \end{cases}$$

Question 3.1 Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Solution : *On va prouver que la relation $\preceq$ est réflexive, anti-symétrique et transitive.*

- ***Réflexivité :*** *Par 1, on a $\epsilon \preceq \epsilon$. Si $m \neq \epsilon$ avec $m = m_1 m_2 \dots m_p$, alors $m \preceq m$ puisque pour tout $1 \leq i \leq p, m_i = m_i$. Pour tout $m \in \mathbb{B}^*$, $m \preceq m$. La relation $\preceq$ est donc réflexive.*
- ***Anti-symétrie :*** *On considère $m, w \in \mathbb{B}^*$ avec $m = m_1 m_2 m_3 \dots m_p$ et $w = w_1 w_2 w_3 \dots w_q$ tels que $m \preceq w$ et $m \neq w$. Il y a plusieurs cas à considérer suivant les raisons pour lesquelles on a $m \preceq w$.*
  - ***Cas 1 :*** $m = \epsilon$
    On a $w \neq \epsilon$. Par conséquent pour que $w \preceq m$, il faut que la condition 2 soit vérifiée. C'est impossible car m a une longueur nulle. Par conséquent, on a $w \not\preceq m$.
  - ***Cas 2 :*** $p \leq q$ *et pour tout* $1 \leq i \leq p,\ w_i = m_i$
    Dans ce cas la longueur de w est strictement supérieure à celle de m car sinon on aurait $m = w$. On ne peux pas avoir $w \preceq m$ par la condition 1 ni par la première partie de la condition 2. De plus, il n'existe pas de s tel que $w_s < m_s$. Donc, la deuxième partie de la condition 2 ne peut jamais être satisfaite. Par conséquent, on a $w \not\preceq m$.
  - ***Cas 3 :*** *il existe $s, 1 \leq s \leq p, q$ tel que pour tout $1 \leq i \leq s-1,\ w_i = m_i$ et $m_s < w_s$*
    On a $w \neq \epsilon$. Puisque le bit m_s est différent du bit w_s, on ne peut pas avoir $w \preceq m$ par la première partie de la condition 2. La deuxième partie de la condition 2 ne peut pas être satisfaite car $1 \leq i \leq s-1,\ w_i = m_i$ et $w_s > m_s$. Par conséquent, on a $w \not\preceq m$.

  Dans tous les cas, on a $m \preceq w$ et $m \neq w \Rightarrow w \not\preceq m$. La relation $\preceq$ est donc anti-symétrique.
- ***Transitivité :*** *On considère $m, w, z \in \mathbb{B}^*$ avec $m = m_1 m_2 m_3 \dots m_p$, $w = w_1 w_2 w_3 \dots w_q$ et $z = z_1 z_2 z_3 \dots z_r$ tels que $m \preceq w$ et $w \preceq z$. Il y a plusieurs cas à considérer suivant les raisons pour lesquelles on a $m \preceq w$ et $w \preceq z$.*
  - ***Cas 1 :*** $m = \epsilon$
    Par définition de $\preceq$, on a $m \preceq z$.
  - ***Cas 2 :*** $p \leq q \leq r$ *et pour tout* $1 \leq j \leq p,\ m_j = w_j$ *et pour tout* $1 \leq i \leq q,\ z_i = w_i$
    On a $p \leq r$ et pour tout $1 \leq i \leq p,\ m_i = z_i$. Par la première partie de la condition 2, on a $m \preceq z$.
  - ***Cas 3 :*** $p \leq q$ *et pour tout* $1 \leq j \leq p,\ m_j = w_j$
    et il existe $s, 1 \leq s \leq q, r$ tel que pour tout $1 \leq i \leq s-1,\ z_i = w_i$ et $w_s < z_s$
    On distingue deux sous-cas suivant la valeur de s et p. Si $p < s$, alors $p \leq r$ et pour tout $1 \leq j \leq p,\ m_j = z_j$ et par la première partie de la condition 2, on a $m \preceq z$.
    Si $p \geq s$, alors $1 \leq i \leq s-1,\ z_i = m_i$ et $m_s < z_s$ et par la deuxième partie de la condition 2, on a $m \preceq z$.
  - ***Cas 4 :*** *il existe $s, 1 \leq s \leq p, q$ tel que pour tout $1 \leq i \leq s-1,\ w_i = m_i$ et $m_s < w_s$*
    et $q \leq r$ et pour tout $1 \leq j \leq q,\ w_j = z_j$
    On a $1 \leq i \leq s-1,\ z_i = m_i$ et $m_s < z_s$ et par la deuxième partie de la condition 2, on a $m \preceq z$.
  - ***Cas 5 :*** *il existe $s, 1 \leq s \leq p, q$ tel que pour tout $1 \leq i \leq s-1,\ w_i = m_i$ et $m_s < w_s$*
    et il existe $s', 1 \leq s' \leq q, r$ tel que pour tout $1 \leq i \leq s'-1,\ z_i = w_i$ et $w_{s'} < z_{s'}$
    On peut remarquer que s ne peut être égal à s' car on aurait sinon $m_s < w_s < z_s$ ce qui est impossible car m_s, w_s et z_s sont des bits. On distingue deux sous-cas suivant la valeur de s et s'. Si $s < s'$, alors $1 \leq i \leq s-1,\ z_i = m_i$ et $m_s < z_s$ et par la deuxième partie de la condition 2, on a $m \preceq z$. Si $s > s'$, alors $1 \leq i \leq s'-1,\ z_i = m_i$ et $m_{s'} < z_{s'}$ et par la deuxième partie de la condition 2, on a $m \preceq z$.

  Dans tous les cas, on a $m \preceq w$ et $w \preceq z \Rightarrow m \preceq z$. La relation $\preceq$ est donc transitive.

Question 3.2 Le mot 111 a-t-il un successeur immédiat ? Est-il le successeur immédiat d'un autre mot ?

Solution : *Le mot* 111 *a un successeur immédiat qui est* 1110*. On peux vérifier qu'il n'y a aucun mot de longueur* 4 *ou moins compris entre ces deux mots. Tout mot de longueur plus que* 4 *qui est plus grand que* 111 *commence par* 111 *car seule la première partie de la condition* 2 *peut s'appliquer dans ce cas. On considère deux cas suivant le quatrième bit du mot. Si le mot commence par* 1110*, il est plus grand que* 1110 *par la première partie de la condition* 2*. Si le mot commence par* 1111*, il est plus grand que* 1110 *par la deuxième partie de la condition* 2*. Il n'y a donc aucun mot compris entre* 111 *et* 1110*.*
Le mot 111 *n'est le successeur immédiat d'aucun mot. Considérons $w \preceq 111$. On a $110 \preceq 111$. On peut donc supposer que $110 \preceq w \preceq 111$. Cela signifie que w commence par* 110 *comme par exemple* 1100*. Pour tout w, on peut construire w' en rajoutant un* 0 *à la fin du mot. On obtient que $w \preceq w' \preceq 111$ avec $w' \neq w$. Il n'existe donc pas de prédécesseur de* 111*.*

Question 3.3 Quels mots se trouvent entre 111 et 1111 ?

Solution : *Tous les mots commençant par* 1110*, de n'importe quelle longueur sont compris entre* 111 *et* 1111*.*

Exercice 4 Parmi les dessins de la figure 1, lesquels sont des diagrammes de Hasse ?

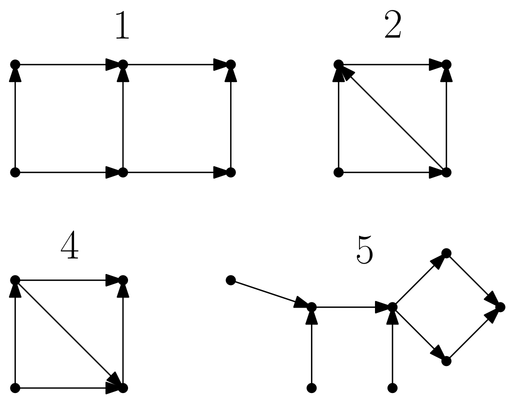


Figure 1 – Six diagrammes : sont-ils des diagrammes de Hasse ?

Solution :

1. *Oui, on peut vérifier les trois propriétés d'un ordre en reconstruisant le diagramme sagittal.*
2. *Non, car les flèches montantes peuvent être déduites de la transitivité.*
3. *Non, car il y a un circuit ce qui est impossible puisqu'une relation d'ordre est anti-symétrique.*
4. *Non, car les flèches allant de gauche à droite peuvent être déduites de la transitivité.*
5. *Oui, on peut vérifier les trois propriétés d'un ordre en reconstruisant le diagramme sagittal.*
6. *Oui, on peut vérifier les trois propriétés d'un ordre en reconstruisant le diagramme sagittal.*

Exercice 5 Les relations définies par les représentations cartésiennes de la figure 2 sont-elles des relations d'ordre ? Si oui, dessiner leur diagramme de Hasse.

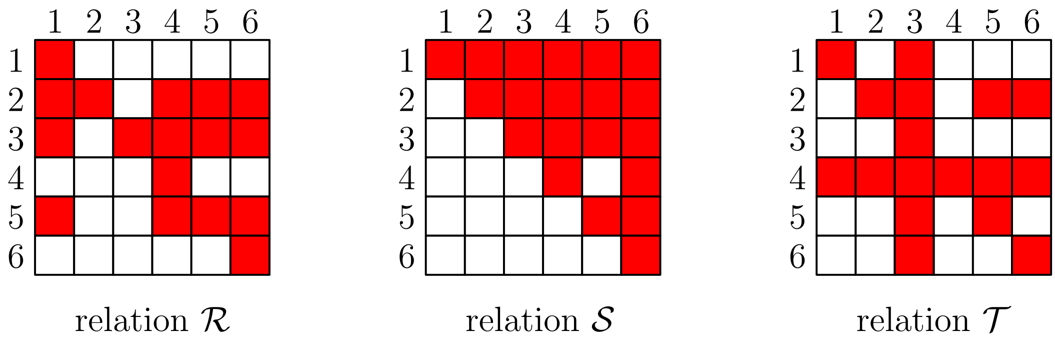
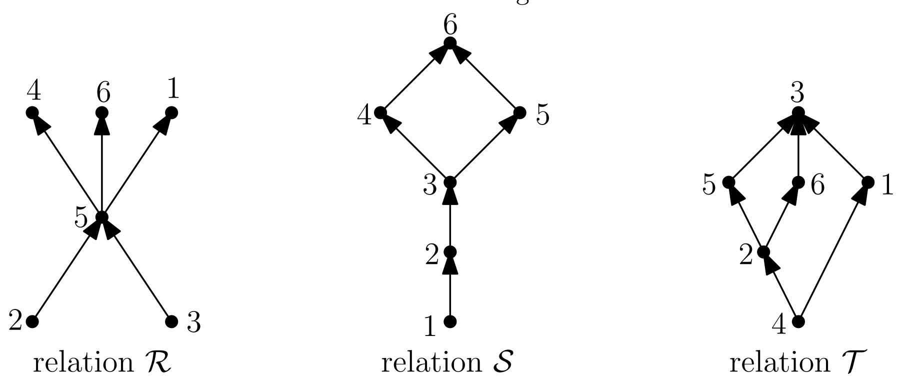


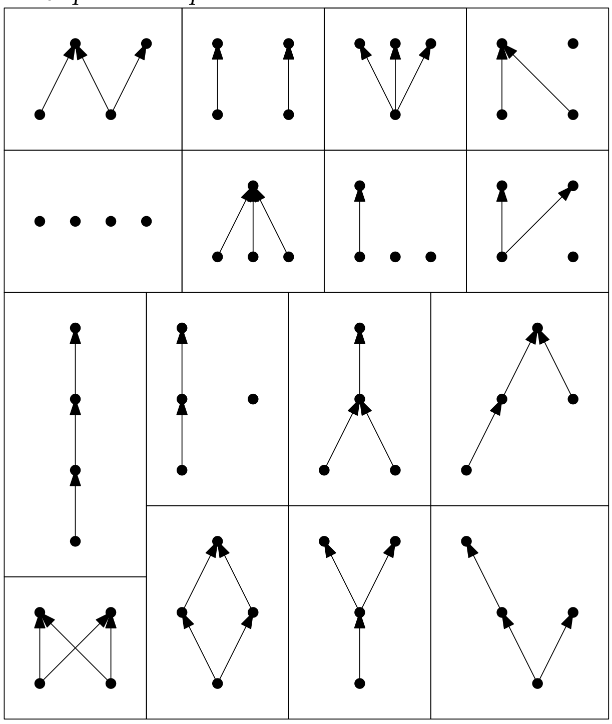
FIGURE 2 – Trois relations sur $\mathbb{N}_6^*$

Solution : *Les quatre relations sont des relations d'ordre. On peut vérifier que les trois propriétés d'une relation d'ordre (réflexivité, anti-symétrie, transitivité) sont vérifiées sur les trois matrices. Leur diagramme de Hasse sont les suivants.*



Exercice 6 Combien y a-t-il de formes différentes du diagramme de Hasse pour un ensemble à quatre éléments ?

Solution : *Il y a en 16 qui sont représentée ci-dessous.*



Voir `http://oeis.org/A000112` *pour l'énumération des formes différentes des diagrammes de Hasse sur n éléments. Il n'existe pas de formule connue pour calculer le nombre d'ordres à isomorphisme près. Il faut donc les énumérer. On peut le faire en énumérant toutes les matrices qui représente un ordre. Ce sont les matrices booléennes symétriques, réflexives et transitives. Ensuite, si une matrice M est représente un ordre isomorphe à un ordre d'une autre matrice M' déjà choisie on enlève la matrice M. Deux ordres $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont isomorphes s'il existe une bijection f avec $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{S}f(y)$.*

Exercice 7 On considère deux ensembles ordonnés A et B. On note $\preceq$ leur relation d'ordre. Sur le produit $A \times B$, on définit une relation $\mathcal{R}$ en déclarant : $(a, b)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ si $a \preceq \alpha$ et $b \preceq \beta$.

Question 7.1 Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Solution : *Il suffit prouver que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, anti-symétrique et transitive.*
- ***Réflexivité :*** *Pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times B$, on a $\alpha \preceq \alpha$ et $\beta \preceq \beta$ car $\preceq$ est réflexive. On a donc $(\alpha, \beta)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$. La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.*
- ***Anti-symétrie :*** *Soit (a, b) et (α, β) dans $A \times B$ tels que $(a, b)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ et $(a, b) \neq (\alpha, \beta)$. On a $a \neq \alpha$ ou $b \neq \beta$. Dans le premier cas, on obtient que $\alpha \not\preceq a$ et dans le deuxième cas, on obtient que $\beta \not\preceq b$ car $\preceq$ est anti-symétrique. Dans les deux cas, on a $(\alpha, \beta)\not\mathcal{R}(a, b)$. La relation $\mathcal{R}$ est donc anti-symétrique.*
- ***Transitivité :*** *Soit (a, b), (α, β) et (a', b') dans $A \times B$ tels que $(a, b)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ et $(\alpha, \beta)\mathcal{R}(a', b')$. On a $a \preceq \alpha \preceq a'$ et $a \preceq a'$ car $\preceq$ est transitive. De même, on a $b \preceq \beta \preceq b'$ et $b \preceq b'$. On a donc $(a, b)\mathcal{R}(a', b')$. La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.*

Question 7.2 Est-ce que que $A \times B$ est totalement ordonné si A et B le sont ?

Solution : *Non, par exemple si on considère $A = B = \mathbb{N}$ munis de l'ordre total $\leq$. Les ensembles A et B sont totalement ordonnés et pourtant les couples $(4, 6)$ et $(2, 7)$ dans $A \times B$ sont incomparables par $\mathcal{R}$.*

Question 7.3 Quels sont les éléments minimaux et maximaux de $A \times B$?

Solution : *Soit (α, β), un élément maximal de $A \times B$. Par définition, il n'existe pas d'éléments (a, b) tels que $(\alpha, \beta)\mathcal{R}(a, b)$. Plus spécifiquement, il n'existe pas de $a \in A$ tel que $(\alpha, \beta)\mathcal{R}(a, \beta)$ et donc $\alpha \preceq a$. Par conséquent, α est un élément maximal de A. De même, il n'existe pas de $b \in B$ tel que $(\alpha, \beta)\mathcal{R}(\alpha, b)$ et donc $\beta \preceq b$. Par conséquent, β est un élément maximal de B. Les éléments maximaux de $A \times B$ sont donc les couples composés d'éléments maximaux de A et de B. Par le même argument, les éléments minimaux de $A \times B$ sont les couples composés d'éléments minimaux de A et de B. Par exemple si $A = B = \mathbb{N}_{50}$, les éléments minimaux sont $\{(0, 0)\}$ et les élément maximaux sont $\{(50, 50)\}$.*

Question 7.4 A quelle condition $A \times B$ a-t-il un plus grand élément ?

Solution : *Soit (α, β) un plus grand élément de $A \times B$. Pour tout $a \in A$ et $b \in B$, on a $(a, b)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ et donc $a \preceq \alpha$ et $b \preceq \beta$. Par conséquent, α et β sont respectivement des plus grands éléments de A et B. $A \times B$ a un plus grand élément si A et B ont chacun un plus grand élément.*

Exercice 8 Soient A un ensemble non vide quelconque et B un ensemble non-vide ordonné par une relation d'ordre $\mathcal{R}$. Si f et g sont deux applications de A dans B, on écrit $f\Sigma g$ si l'on a $f(x)\mathcal{R}g(x)$ pour tout $x \in A$.

Question 8.1 Démontrer que Σ est une relation d'ordre sur B^A.

Solution : *Il suffit prouver que la relation Σ est réflexive, anti-symétrique et transitive.*
- ***Réflexivité :*** *Soit $f \in B^A$. On a pour tout $x \in A$, $f(x)\mathcal{R}f(x)$ car $\mathcal{R}$ est réflexive. On a donc $f\Sigma f$. La relation Σ est donc réflexive.*
- ***Anti-symétrie :*** *Soient $f, g \in B^A$ tels que $f\Sigma g$ et $f \neq g$. Il existe $x \in A$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Puisque $f(x)\mathcal{R}g(x)$, on a $g(x)\not\mathcal{R}f(x)$ car $\mathcal{R}$ est anti-symétrique. Par conséquent, on a $g(x)\not\Sigma f(x)$. La relation Σ est donc anti-symétrique.*
- ***Transitivité :*** *Soient $f, g, h \in B^A$ tels que $f\Sigma g$ et $g\Sigma h$. Pour tout $x \in A$, on a $f(x)\mathcal{R}g(x)$ et $g(x)\mathcal{R}h(x)$. On obtient que pour tout $x \in A$, on a $f(x)\mathcal{R}h(x)$ car la relation $\mathcal{R}$ est transitive. Par conséquent, on a $f\Sigma h$. La relation Σ est donc transitive.*

Question 8.2 A quelle condition B^A est-il totalement ordonné par cette relation ?

Solution : *On va considérer 4 cas suivant la cardinalité de A et B et le fait que $\mathcal{R}$ soit un ordre total.*
- ***Cas 1 :*** *$|B| = 1$*
  Dans ce cas $|B^A| = 1$ car il existe une unique application f qui associe à tout élément de A, l'unique élément de B. $|B^A|$ est donc totalement ordonné dans ce cas.
- ***Cas 2 :*** *$|B| > 1$, $|A| = 1$ et B est totalement ordonné.*
  Dans ce cas, $A = \{x\}$. Pour tout $f, g \in B^A$ on a $f\Sigma g$ si et seulement si $f(x)\mathcal{R}g(x)$. Puisque $\mathcal{R}$ est un ordre total sur B, pour $f, g \in B^A$, on a $f(x)\mathcal{R}g(x)$ ou $g(x)\mathcal{R}f(x)$ et donc $f\Sigma g$ ou $g\Sigma f$. $|B^A|$ est donc totalement ordonné dans ce cas.
- ***Cas 3 :*** *$|B| > 1$, $|A| > 1$ et B est totalement ordonné.*
  Puisque $|B| > 1$, il existe $y, z \in B$ tels que $y\not\mathcal{R}z$. De plus, il existe $u, v \in A$ tels que $u \neq v$ car $|A| > 1$. On considère $f \in B^A$ définie par : $f(u) = y$ et pour tout $x \in A \setminus \{u\}, f(x) = z$. On considère $g \in B^A$ définie par : $g(u) = z$ et pour tout $x \in A \setminus \{u\}, g(x) = y$. On a $f(u)\not\mathcal{R}g(u)$ et $g(v)\not\mathcal{R}f(v)$. Par conséquent, on a $f\not\Sigma g$ et $g\not\Sigma f$. $|B^A|$ n'est donc pas totalement ordonné dans ce cas.
- ***Cas 4 :*** *$|B| > 1$ et B n'est pas totalement ordonné.*
  Puisque B n'est pas totalement ordonné, il existe $y, z \in B$ tel que $y\not\mathcal{R}z$ et $z\not\mathcal{R}y$. Soient $f, g \in B^A$ définies par : pour tout $x \in A$ $f(x) = y$ et $g(x) = z$. Pour tout $x \in A$, on a $f(x)\not\mathcal{R}g(x)$ et $g(x)\not\mathcal{R}f(x)$. Par conséquent, on a $f\not\Sigma g$ et $g\not\Sigma f$. $|B^A|$ n'est donc pas totalement ordonné dans ce cas.

B^A est totalement ordonné si $|B| = 1$ (condition du cas 1), ou $|A| = 1$ et B est totalement ordonné (condition du cas 2).

Exercice 9

Question 9.1 Combien peut-on mettre de relations d'ordre total sur $\mathbb{N}_n^*$?

> ***Solution :*** *Choisir un ordre total sur $\mathbb{N}_n^*$ consiste à choisir un plus petit élément, son successeur (deuxième plus petit élément), le successeur de son successeur (troisième plus petit élément), ... Cela revient donc à choisir un position différente pour chaque élément de $\mathbb{N}_n^*$. Il y a donc autant d'ordres totals que de permutations de $\mathbb{N}_n^*$ soit $n!$.*

Exercice 10 On note $E = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Autrement dit, E est l'ensemble des entiers naturels, plus un élément ω qui n'est pas un entier. On munit E d'une relation d'ordre notée $\preceq$ en déclarant que ω est le plus grand élément de E et que si x et y sont deux entiers naturels, on a $x \preceq y$ si et seulement si $x \leq y$ dans $\mathbb{N}$.

Question 10.1 Démontrer que $\preceq$ est bien une relation d'ordre.

> ***Solution :*** *Il suffit prouver que la relation $\preceq$ est réflexive, anti-symétrique et transitive.*
> - ***Réflexivité :*** *Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $x \leq x$ et donc $x \preceq x$. On a $\omega \preceq \omega$ car ω majore tous les élément de E, y compris lui-même. Pour tout $x \in E$, on a $x \preceq x$. La relation $\preceq$ est donc réflexive.*
> - ***Anti-symétrie :*** *Soient $x, y \in E$ tels que $x \preceq y$ et $x \neq y$. Si $x, y \in \mathbb{N}$ alors $y \not\leq x$ et donc $y \not\preceq x$. Si $y = \omega$ alors $y \not\preceq x$ puisque $x \neq \omega$. Dans tous les cas, on a $y \not\preceq x$. La relation $\preceq$ est donc anti-symétrique.*
> - ***Réflexivité :*** *Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \preceq y$ et $y \preceq z$. Si $x, y, z \in \mathbb{N}$ alors $x \leq z$ car $\leq$ est une relation transitive. Si x, y ou z est égal à ω, alors $z = \omega$ et $x \preceq z$. Dans tous les cas, on a $x \preceq z$. La relation $\preceq$ est donc transitive.*

Question 10.2 Démontrer que E muni de $\preceq$ est un ensemble *bien ordonné*, c'est-à-dire que toute partie non vide de E possède un plus petit élément par $\preceq$.

> ***Solution :*** *La partie réduite à ω possède un plus petit élément : lui-même. Les autres parties contiennent des entiers, elles ont donc toutes un plus petit élément car $\mathbb{N}$ muni de $\leq$ est bien ordonné.*

Question 10.3 Quels éléments de E ne sont pas les successeurs d'autres éléments ?

> ***Solution :*** *0 n'est le successeur d'aucun élément. Chaque entier $x \neq 0$ est le successeur de $x - 1$. Supposons par l'absurde que ω est le successeur d'un entier x. On a $x \preceq x + 1 \preceq \omega$. Il y a donc un élément compris entre x et ω, une contradiction. 0 et ω sont donc les seuls éléments de E qui ne sont pas les successeurs d'autres éléments.*

Exercice 11 On note A l'ensemble des relations sur E de cardinal n. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations, on note $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ la relation définie par pour tout $a, b \in A$ $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})b$ ssi $a\mathcal{T}b$ et $a\mathcal{S}b$; on note $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ la relation définie par pour tout $a, b \in A$ $a(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})b$ ssi $a\mathcal{T}b$ ou $a\mathcal{S}b$. Enfin, on dit qu'une relation $\mathcal{S}$ est *plus fine* qu'une relation $\mathcal{T}$ si l'on a $a\mathcal{T}b$ à chaque fois que $a\mathcal{S}b$. On écrira cette propriété $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$.

Question 11.1 Comment voit-on que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$ sur les représentations cartésiennes de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$?

> ***Solution :*** *Puisqu'à chaque fois que l'on a $a\mathcal{S}b$, on a $a\mathcal{T}b$, toutes les cases noircies dans le diagramme de $\mathcal{S}$ sont aussi noircies dans celui de $\mathcal{T}$.*

Question 11.2 Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalence, à quoi reconnaît-on, sur leurs classes d'équivalence, que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$?

> ***Solution :*** *Chaque classe de $\mathcal{S}$ est contenue dans une classe de $\mathcal{T}$. En effet, tous les éléments d'une classe d'équivalence de $\mathcal{S}$ sont en relation dans $\mathcal{T}$ et donc dans une même classe d'équivalence dans $\mathcal{T}$.*

Question 11.3 Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalence, est-ce que $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ sont aussi des relations d'équivalence ? Si oui, comment peut-on obtenir leurs classes d'équivalence à partir de celles de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$?

Solution : *La relation $a(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})b$ n'est pas forcément transitive car si l'on a $a(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})b$ et $b(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})c$ cela peut être parce que $a\mathcal{S}b$ et $b\mathcal{T}c$, et dans ce cas, on n'a pas forcément $a\mathcal{S}c$ ou $a\mathcal{T}c$.*

Pour prouver que $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est relation d'équivalence, il suffit de prouver qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

- ***Réflexivité :*** *Pour tout $a \in A$, on a $a\mathcal{S}a$ et $a\mathcal{T}a$ car $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont réflexives. Par conséquent, on $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})a$. La relation $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est donc réflexive.*
- ***Symétrie :*** *Soient a, b tels que $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})b$. On a $b\mathcal{S}a$ et $b\mathcal{T}a$ car $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont symétriques. Par conséquent, on a $b(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})a$. La relation $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est donc symétrique.*
- ***Transitivité :*** *Soient a, b, c tels que $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})b$ et $b(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})c$. On a $a\mathcal{S}c$ et $a\mathcal{T}c$ car $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont transitives. Par conséquent, on a $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})c$. La relation $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est donc transitive.*

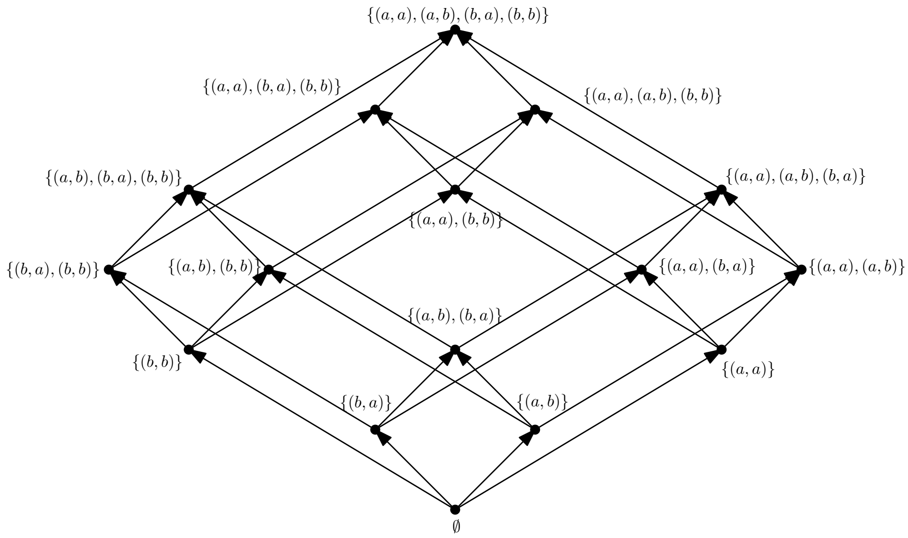
La relation $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un élément x s'obtient en faisant l'intersection de ses classes pour les deux relations car ce sont les éléments en relation avec x pour les deux relations.

Question 11.4 Démontrer que $\Longrightarrow$ est une relation d'ordre. Quel est son plus petit élément ? Quel est son plus grand élément ? Dans le cas où $E = \{a, b\}$, faire la liste des relations sur E et dessiner le diagramme de Hasse de la relation $\Longrightarrow$.

Solution : *Pour prouver que $\Longrightarrow$ est relation d'ordre, il suffit de prouver qu'elle est réflexive, anti-symétrique et transitive.*

- **Réflexivité :** *Pour tout $\mathcal{T} \in A$, on a $\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{T}$. La relation $\Longrightarrow$ est donc réflexive.*
- **Anti-symétrie :** *Soient $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ tels que $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$. D'après la réponse à la question 10.1, cela signifie qu'il existe une case noircie dans la représentation cartésienne de $\mathcal{T}$ qui n'est pas noircie dans celle de $\mathcal{S}$. Par conséquent, on a $\mathcal{T} \not\Longrightarrow \mathcal{S}$. La relation $\Longrightarrow$ est donc anti-symétrique.*
- **Transitivité :** *Soient $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T} \in A$ tels que $\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{T}$. D'après la réponse à la question 10.1, cela signifie que toute case noircie dans la représentation cartésienne de $\mathcal{R}$ est noircie dans celle de $\mathcal{S}$ et dans celle de $\mathcal{T}$. Par conséquent, on a $\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{T}$. La relation $\Longrightarrow$ est donc transitive.*

Son plus petit élément est la relation pour laquelle la représentation cartésienne n'a aucune case noircie, c'est-à-dire la relation où aucun élément n'est en relation. Son plus grand élément est la relation pour laquelle la représentation cartésienne a toutes les cases noircies, c'est-à-dire la relation où tous les éléments sont en relation. Quand $E = \{a, b\}$, l'ensemble ordonné des relations est en isomorphisme avec $\mathcal{P}(E^2)$ muni de l'inclusion. C'est un ensemble ordonné à 16 éléments dont le diagramme de Hasse est donnée ci-après.



Question 11.5 Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations d'ordre, en est-il de même des relations $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$?

Solution : *La relation $a(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})b$ n'est pas forcément transitive car si l'on a $a(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})b$ et $b(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})c$ cela peut être parce que $a\mathcal{S}b$ et $b\mathcal{T}c$, et dans ce cas, on n'a pas forcément $a\mathcal{S}c$ ou $a\mathcal{T}c$.*

Pour prouver que $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est relation d'ordre, il suffit de prouver qu'elle est réflexive, anti-symétrique et transitive.

- **Réflexivité :** *Pour tout $a \in A$, on a $a\mathcal{S}a$ et $a\mathcal{T}a$ car $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont réflexives. Par conséquent, on $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})a$. La relation $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est donc réflexive.*
- **Anti-symétrie :** *Soient a, b tels que $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})b$ et $a \neq b$. On a $b \not\mathcal{S} a$ et $b \not\mathcal{T} a$ car $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont anti-symétriques. Par conséquent, on n'a pas $b(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})a$. La relation $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est donc anti-symétrique.*
- **Transitivité :** *Soient a, b, c tels que $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})b$ et $b(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})c$. On a $a\mathcal{S}c$ et $a\mathcal{T}c$ car $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont transitives. Par conséquent, on a $a(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})c$. La relation $(\mathcal{S} \wedge \mathcal{T})$ est donc transitive.*