Aix*Marseille université	Domaine Sciences et Technologies LICENCE D'INFORMATIQUE **Automates et circuits : TD 1** **Code UE : ENSIN2U2**
Année 2012-13	**Systèmes de numération et codage**

Exercice 1

Sur la lointaine planète Infok les Informatoks jouent à un jeu très populaire. Mais dans chaque région d'Infok où se joue un match, les Informatoks ont la mauvaise habitude de ne pas utiliser la même technique d'affichage des scores. Néanmoins les scores doivent apparaître sur toute la planète. L'objectif de cet exercice est d'aider les Informatoks chargés des affichages à s'y retrouver.

Infok est composée de quatre régions :

- Les Binoks n'utilisent que des lampes éteintes ou allumées pour afficher les résultats. Ils sont donc en base 2.
- Les Octoks, toujours étourdis, ont malencontreusement perdu les chiffres 8 et 9. Ils sont donc en base 8.
- Les Hexoks, réputés pour leur avarice, ne veulent utiliser que deux caractères pour afficher les scores par mi-temps, ainsi la base 16 leur suffit.
- Enfin les Décoks, qui sont la honte des Informatoks, n'utilisent que des chiffres dans une bête base 10.

Question 1.1 Avant tout, il faut aider les Informatoks à optimiser leurs calculs. Leur rappeler le moyen *le plus simple* pour passer :

1. d'une base 10 à une base 2

   Solution : *La méthode la plus simple consiste à utiliser les divisions successives par 2 jusqu'à qu'on trouve un reste nul. Il suffit ensuite de lire de droite à gauche les restes obtenus pour obtenir la représentation en base 2.*

2. d'une base 2 à une base 8

   Solution : *La méthode la plus simple consiste à découper la représentation en base 2 en tranche de 3 chiffres en partant de la droite. Ensuite, il suffit de convertir chaque tranche en un chiffre de la base 8 pour obtenir la représentation en base 8.*

3. d'une base 8 à une base 16

   Solution : *La méthode la plus simple consiste à convertir en base 2 puis ensuite en base 16. Pour convertir de la base 8 à la base 2, il suffit de convertir chaque chiffre de la représentation en une tranche de trois chiffres binaires correspondante. Ensuite, il suffit de découper la représentation en base 2 en tranche de 4 chiffres en partant de la droite puis de convertir les tranches en chiffre de la base 16 afin d'obtenir la représentation en base 16.*

4. d'une base 16 à une base 10

   Solution : *La solution la plus simple est d'utiliser la formule donnant la valeur d'un nombre dans une certaine base. On a donc $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i 6^i$ avec α_i la valeur du i-ème chiffre de la représentation en base 16 en partant de la droite.*

5. d'une base 2 à une base 10

   Solution : *On peut utiliser la même solution que pour la précédente question. Cela nous donne pour la base deux : $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i 2^i$.*

Question 1.2 Il y a eu un match dans chaque région ; afficher les scores pour les autres régions :

1. chez les Binoks : score 10110 à 111101,

   Solution : *Cela fait 26 à 75 pour la base 8, 16 à 3D pour la base 16 et 22 à 61 pour la base 10.*

2. chez les Octoks : score 53 à 102

   Solution : *Cela fait 101011 à 1000010, 43 à 66 pour la base 10 et 2B à 42 pour la base 16.*

3. chez les Hexoks : score 1E à 39

   Solution : *Cela fait 11110 à 111001 pour la base 2, 36 à 71 pour la base 8 et 30 à 57 pour la base 10.*

4. chez les Décoks : score 172 à 240

   Solution : *Cela fait 10101100 à 11110000, 254 à 360 pour la base 8 et AC à F0 pour la base 16.*

Question 1.3 Un indice dans l'énoncé permet de déterminer le nombre de points maximum que l'on peut marquer dans ce sport en une mi-temps. Quel est-il ?

Solution : *Les scores en base 16 par mi-temps peuvent être écrits avec seulement 2 chiffres. Le score maximum est donc de* $(FF)_{16} = 16^2 - 1 = (255)_{10}$.

Question 1.4 Lors d'un match particulièrement serré, les supporters n'étaient pas d'accord sur le total des scores des mi-temps et donc sur le vainqueur. Donner le score final et le vainqueur des différents matchs (Les opérations seront à effectuer dans la base correspondant au score, en évitant de revenir à la base honteuse des Décoks !).

Région	Equipe	1ère mi-temps	2ème mi-temps	— total —
Binoks	Biclars	1001011	11001	
	Bihell	101110	10001001	
Octoks	Octeurs	156	75	
	Ocarinas	23	134	
Hexoks	Hexoux	90	BB	
	Hextoir	F1	76	

Solution :

Région	*Equipe*	*1ère mi-temps*	*2ème mi-temps*	*— total —*
Binoks	*Biclars*	*1001011*	*11001*	***1100100***
	Bihell	*101110*	*10001001*	***10110111***
Octoks	*Octeurs*	*156*	*75*	***253***
	Ocarinas	*23*	*134*	***157***
Hexoks	*Hexoux*	*90*	*BB*	***14B***
	Hextoir	*F1*	*76*	***167***

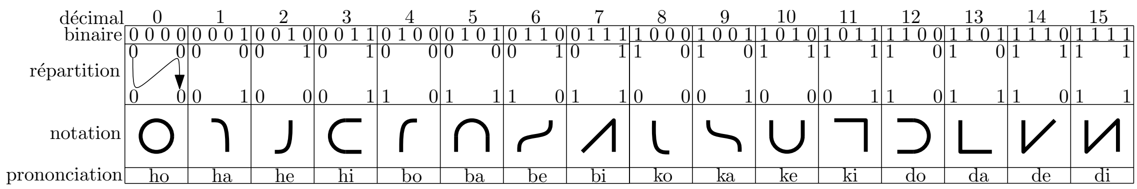
Exercice 2

Parce que seize peut s'écrire 2^{2^2}, et puisque l'on parle de binaire pour la base 2, Boby Lapointe estimait qu'on pouvait parler de *Bi-Binaire* pour la base 4, et de *Bi-Bi-Binaire* pour la base 16, terme qu'il abrègea en **Bibi**.

A partir de ce postulat, Boby Lapointe inventa la notation et la prononciation de seize chiffres. A l'aide de quatre consonnes et de quatre voyelles, on obtient les seize combinaisons nécessaires :

HO	HA	HE	HI	BO	BA	BE	BI	KO	KA	KE	KI	DO	DA	DE	DI
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

La figure ci-après indique le moyen de conversion du décimal vers le bibinaire, en passant par le binaire et l'héxadécimal.



Pour définir un nombre, il suffit d'énumérer les chiffres (hexadécimaux) qui le composent. Par exemple, le nombre 2000 se traduit 7D0 en hexadécimal, et ainsi BIDAHO en Bibi.

Question 2.1 Quel jour sommes-nous en bibinaire ?

Solution : *06/09/2012* $\Rightarrow$ 06/09/7DC_{16} $\Rightarrow$ *BE/KA/BIDADO*

Question 2.2 Convertir les nombres suivants de la base 10 au bibinaire, et vice-versa :

Décimal	— Bibinaire —
0	
3	
89	
4875	
1048577	

Bibinaire	— Décimal —
DODO	
KOKA	
BIBADE	
HAHIKIDO	
KIHADIDODO	

Solution :

Décimal	*— Bibinaire —*
0	***HO***
3	***HI***
89	***BAKA***
4875	***HAHIHOKI***
1048577	***HAHOHOHOHOHA***

Bibinaire	*— Décimal —*
DODO	***204***
KOKA	***137***
BIBADE	***1886***
HAHIKIDO	***5052***
KIHADIDODO	***729036***

Question 2.3 Calculs en bibinaire :

1. Calculer DO+BE, puis HAHE+HA. Poser alors l'addition DODO+BEBE et la calculer à partir des deux sommes précédentes.

   Solution : *On a DO+BE = HAHE et HAHE+HA = HAHI. On obtient que :*

$$\begin{aligned} DODO + BEBE &= (DO + BE) \times 16_{10} + DO + BE \\ &= HAHE \times 16_{10} + HAHE \\ &= (HAHE + HA) \times 16_{10} + HE \\ &= HAHI \times 16_{10} + HE \\ &= HAHIHE \end{aligned}$$

2. Calculer BE×DO, puis BOKO+BO. Poser alors la multiplication DODO×BEBE et la calculer à partir des deux résultats précédents.

   Solution : *On a BE × DO = BOKO et BOKO+BO = BODO*
   DODO×BEBE=BAHABOKO

Question 2.4 On admet que HAHAHA = 273_{10}. En déduire rapidement les valeurs de HAHAHAHA et de HAHAHAHAHA en justifiant la méthode utilisée. Qu'en est-il du calcul de HIHIHIHIHI à partir de HIHIHI ? Généraliser cette méthode à toute base β.

Solution : *Pour passer de HAHAHA à HAHAHAHA, on décale vers la gauche et on rajoute un HA à droite. Cela revient donc à multiplier la valeur du nombre par 16 et à rajouter $HA = 1$. On obtient que HAHAHAHA* = 273×16+1 = 4369 *et HAHAHAHAHA* = 4369×16+1 = 69905. *On a HIHIHI*= 819. *Pour passer de HIHIHIHI à HIHIHI, il suffit multiplier la valeur du nombre par 16 et à rajouter $HI = 3$. On obtient que HAHAHAHA* = 819×16+3 = 13107. *On considère un nombre $(x)_\beta = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta^i$ où α_i est le i-ième chiffre de x en partant de la droite. On rajoute un chiffre c à la droite de $(x)_\beta$, ce qui nous donne le nombre $(y)_\beta$. On a $(y)_\beta = \sum_{i=0}^{m} \gamma_i \beta^i$ où γ_i est le i-ième chiffre de y en partant de la droite. On obtient $m = n + 1, \forall i, 0 \leq i \leq n, \alpha_i = \gamma_{i+1}$ et $\gamma_0 = c$. On obtient donc que : $(y)_\beta = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i \beta^i + c\beta^0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta^{i+1} + c = x\beta + c$. Pour obtenir y à partir de x, il suffit donc de multiplier x par β et d'ajouter c.*

Exercice 3

Question 3.1 Donner la représentation de $(-122)_{10}$ en binaire. On utilisera la représentation des entiers négatifs avec un bit pour le signe sur 1 octet.

Solution : $122 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = (1111010)_2$ *On a donc* 11111010 *pour la représentation de* -122

Question 3.2 Donner la représentation de $(-122)_{10}$ en binaire. On utilisera la représentation des entiers négatifs avec le complément à 2 sur 1 octet.

Solution : $122 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = (01111010)_2$
Le complément à 2 *de* $(01111010)_2$ *est* $(10000101 + 00000001)_2 = (10000110)_2$.

Exercice 4

Question 4.1 Montrer que dans tout système de numération de base $\beta > 3$, le nombre 1331 est un cube.

Solution : *En base* β, *on a* $1331_\beta = 1 + 3\beta + 3\beta^2 + \beta^3 = (1 + \beta)^3 = (1\beta^1 + 1\beta^0)^3$. 1331_β *est donc toujours le cube de* 11_β.

Question 4.2 Soit $x = (12321)_\beta$ un nombre représenté en base $\beta \geq 4$. Pour quelles valeurs de β, x est-il un nombre premier ?

Solution : *Aucune,* x *n'est jamais un nombre premier.* $12321 = 11100 + 1110 + 111 = 111 \times (100 + 10 + 1) = 111 \times 111$ *quelque soit la base* $\beta > 4$.

Question 4.3 Quelles sont les bases $\beta > 3$ pour lesquelles $1_\beta + 10_\beta \times 11_\beta \times 12_\beta \times 13_\beta = (131_\beta)^2$?

Solution : *Toutes les bases* $\beta > 3$ *car*

$$\begin{array}{rcl} 1_\beta + 10_\beta \times 11_\beta \times 12_\beta \times 13_\beta & = & \\ 1 + \beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3) & = & 1 + 6\beta + 11\beta^2 + 6\beta^3 + \beta^4 \\ & = & (\beta^2 + 3\beta + 1)^2 \\ & = & (131)^2_\beta \end{array}$$

Exercice 5

On pose $x = 1000\ldots01_2$ (n digits 0 encadrés par deux digits 1). Comment s'écrivent x^2 et x^3 en binaire ?

Solution : $x = (1 + 2^{n+1})$ *si* n *est le nombre de* 0 *au milieu. Alors si* $n > 0$, $x^2 = 1 + 2^{n+2} + 2^{2n+2}$ *ce qui donne la représentation binaire* 1000...00010000...0001 *avec* $n+1$ *zéros à droite et* $n-1$ *zéros à gauche. Si* $n = 0$ *alors* $x = 11_2$ *et* $x^2 = 11_2 \times 11_2 = 1001_2$.
Si $n = 0$, *on a* $x^3 = 1111101$. *Si* $n > 0$, *on a* $x^3 = (1+2^{n+2}+2^{2n+2})(1+2^{n+1}) = 2^{3n+3}+2^{2n+3}+2^{2n+2}+2^{n+2}+2^{n+1}+1$ *e qui donne la représentation binaire* 1000...00011000...00011000...0001 *avec un première tranche constituée de* $(n-1)$ *zéros, d'une deuxième tranche constituée de* $(n-1)$ *zéros et d'une troisième tranche constituée de* n *zéros.*

Exercice 6

Démontrer que $(1111000001)_2$ est un carré. Quelle est sa racine carrée ?

Solution : $(1111000001)_2 = (961)_{10}$ *donc carré de* $(31)_{10} = (11111)_2$.

Exercice 7

On note x le nombre réel qui s'écrit $x = 0,\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\ldots$ en base β (où α est un chiffre de la base β). Montrer que x est rationnel et déterminer une fraction qui le représente. Que peut-on dire de plus si $\alpha = \beta - 1$?

Solution : *On compare* $\alpha + x$ *à* βx : $\alpha + x = \alpha,\alpha\alpha\alpha... = \beta x$ *donc* $x = \frac{\alpha}{\beta-1}$. *Si* $\alpha = \beta - 1$ *alors* $x = 1$.

Exercice 8 Pour poursuivre la question précédente : on note $y = 0, \alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma\alpha\gamma \ldots$ en base β. Montrer que y est rationnel et déterminer une fraction qui le représente.

Solution : *On utilise la même méthode que pour l'exercice précédent :* $\beta^2 y = y + (\alpha\beta + \gamma)$ *donc on a* $y = \frac{\alpha\beta+\gamma}{\beta^2-1}$

Exercice 9

- Soit $x = b_n b_{n-1} b_{n-2} \cdots b_2 b_1 b_0$ écrit dans la base β.
- Si $b_n \neq 0$, on note $n + 1 = N_\beta(x)$ le nombre de chiffres nécessaires pour exprimer x dans la base β.

Montrer ce théorème. vu en cours : $N_\beta(x)$ est le plus petit entier strictement supérieur à $\mathrm{Log}_\beta(x)$.

Solution : *Puisque $b_n \neq 0$, nous avons $b_n \geq 1$, et les trois nombres écrits ci-dessous sont rangés en ordre croissant :*

$$\begin{array}{c|cccccccc} \beta^n & & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ x & & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_2 & b_1 & b_0 \\ \beta^{n+1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Par conséquent, $\beta^n \leq x < \beta^{n+1}$ et $\log_\beta(\beta^n) \leq \log_\beta(x) < \log_\beta(\beta^{n+1})$. On en déduit que $n \leq \log_\beta(x) < n+1$. Donc $(n+1)$ est strictement supérieur à $\log_\beta(x)$, et comme n ne l'est pas, $(n+1) = N_\beta(x)$ est le plus petit entier strictement supérieur à $\log_\beta(x)$.

Exercice 10

On cherche à graver sur un bluray un flux vidéo non compressée. On suppose que le flux vidéo est de 1920×1080 pixels, que chaque pixel est codé sur 3 octets (codage rgb), qu'il y a 30 images par secondes et qu'un bluray peut stocker 50 giga-octets de données (50×2^{30} octets).

Question 10.1 Quelle est la durée maximale de vidéo que l'on peut stocker sur le bluray ?

Solution : *Chaque image contient $1920 \times 1080 = 2073600$ pixels. Puisque chaque pixel est codé sur 3 octets, il faut $6220800/2^{20} \approx 5,9326$ méga-octets pour coder une image. Cela nous fait donc $5,9326 \times 30 = 177,9785$ méga-octets pour une seconde. On peu donc stocker $50 \times 1024/177,9785 = 287,6752$ secondes (moins de 5 minutes) de vidéo non compressée sur un bluray.*

Question 10.2 On souhaite transmettre le flux vidéo via un connexion wifi d'un débit de 100 Mégabits par seconde. Quel est le nombre d'images que l'on peut transmettre par seconde via cette connexion.

Solution : *Il faut approximativement $5,9326$ méga-octets pour coder une image d'après la réponse à la question précédente. Puisque l'on a un débit de $100/8 = 12,5$ méga-octets, on peut transmettre $12,5/5,9326 \approx 2,107$ images par seconde.*

Exercice 11

Question 11.1 Combien y a-t-il d'octets différents (mots de 8 bits) ?

Solution : *Il existe 2^8 mots de 8 bits différents.*

Question 11.2 Quel est le nombre minimum de bits nécessaires pour pouvoir coder 1000 mots différents ?

Solution : *Afin de pouvoir coder 1000 mots, il faut au moins 10 bits. Utiliser 10 bits permet en effet de coder $2^{10} = 1024$ mots différents alors que 9 bits ne permet de coder que $2^9 = 512$ mots différents.*

Exercices supplémentaires

Exercice 12

Montrer que 10101 est divisible par 111 dans tout système de numération. Exprimer le quotient au moyen de la base.

Solution : *On a* $10101_\beta = 1 + \beta^2 + \beta^4$ *et* $111 = 1 + \beta + \beta^2$. *Or* $1 + \beta^2 + \beta^4 = (1 + \beta + \beta^2)(1 - \beta + \beta^2)$. *Le quotient de la division de* 10101 *par* 111 *est donc l'entier* $C_\beta = \beta^2 - \beta + 1$ *s'écrivant en base* β : $\beta - 1.1$. *Par exemple si* $\beta = 3, (10101)_3 = (1 + 9 + 81)_{10} = (91)_{10}$ *et* $(111)_3 = (1 + 3 + 9)_{10} = (13)_{10}$ *et* $C = (21)_3 = (6 + 1)_{10} = 7_{10}$ *et on vérifie qu'en base* 10, $7 \times 13 = 91$.

Exercice 13

Existe-t-il un système de numération dans lequel le produit de 24 par 42 s'écrit 1401 ? Si oui, lequel ?

Solution : $24 * 42 = (4+2\beta)(2+4\beta)$ *et* $1401 = 1+4\beta^2+\beta^3$. *On doit donc résoudre l'équation* $(4 + 2\beta)(2 + 4\beta) = 1 + 4\beta^2 + \beta^3$ *avec* $\beta > 4$, *dont la seule solution est* $\beta = 7 > 4$.

Exercice 14

Existe-t-il une base dans laquelle le nombre 276 est un carré ?

Solution : *On doit résoudre l'équation* $x^2 = 2\beta^2 + 7\beta + 6$ *avec* $\beta > 7$ *et* $x = \sum_{i=0}^{n} a_i\beta^i$. *Il y a une infinité de solutions, les premières étant* 23, 839, 28559, *etc. Par exemple avec* $\beta = 23$, $(276)_{23} = (1225)_{10}$ *est le carré de* $(1C)_{23} = (35)_{10}$