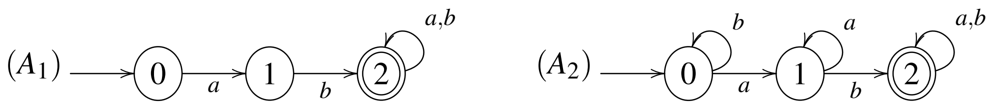
AMU — L2 d'Informatique Théorie des Langages

A. Nasr, F. Nouioua, F. Olive

TD n° 1

Automates finis

Exercice 1.1 On considère deux automates A_1 et A_2 sur l'alphabet $\{a,b\}$.



(a) Dans quel état se trouve l'automate A_1 après lecture des mots a, ab, abb, $abba$? Après lecture du mot ε ?

(b) Lesquels de ces mots sont reconnus par l'automate A_1 ?

(c) Que se passe-t-il quand on donne le mot aab à lire à l'automate A_1 ?

(d) Les mots aba^2b, a^2ba^2b, ab^4 et b^3a^2 sont-ils reconnus par l'automate A_1 ?

(e) Décrire les mots reconnus par l'automate A_1.

(f) Après lecture du mot b^3a^2, dans quel état se trouve l'automate A_2 ?

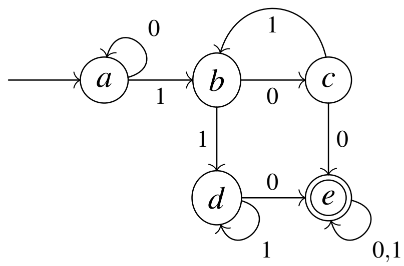
(g) Y a-t-il des mots que l'automate A_2 ne peut pas lire jusqu'au bout ?

(h) S'il n'a lu aucun a, dans quel état se trouve l'automate A_2 ?

(i) Dans quels cas l'automate A_2 se trouve-t-il dans l'état 1 ?

(j) Dans quels cas arrive-t-il à l'état final 2 ? Quels mots reconnaît-il ?

Exercice 1.2 On considère l'automate $\mathscr{A} = (V, Q, \delta, q_0, F)$ suivant.



$i)$ Expliciter V, Q, δ, q_0 et F (on représentera δ par sa table de transition).

$ii)$ Donner 4 mots acceptés par $\mathscr{A}$ et 4 mots refusés par $\mathscr{A}$.

$iii)$ Donner une expression régulière α dénotant $L(\mathscr{A})$.

$iv)$ L'expression régulière suivante dénote-t-elle $L(\mathscr{A})$? (Vous tenterez d'argumenter votre réponse à cette question.)

$$\beta = (0+1)^*1(0+1)0(0+1)^*$$

Exercice 1.3 Pour chacune des expressions régulières qui suivent, dessinez un automate reconnaissant le langage qu'elle dénote :

$$\alpha = aab\,; \qquad \beta = abba + bbab\,; \qquad \gamma = (aba)^* + (bab)^*.$$

Exercice 1.4 Déterminer pour chacun des langages suivants un automate qui le reconnaît :

(a) $\varnothing$

(b) $\{\varepsilon, 0\}$

(c) $\{u00 \,|\, u \in \{0,1\}^*\}$

(d) $\{0^m 1^n 2^p \,|\, m,n,p \geq 0\}$

(e) $\{a^{2n} \,|\, n \geq 0\}$

(f) $\{w \,|\, w$ contient au moins trois 1$\}$

(g) $\{w \,|\, w$ ne contient pas le facteur 110$\}$

Exercice 1.5 Pour chacun des langages suivants, donner une expression régulière qui le dénote et un automate qui le reconnaît.

(a) $\{u \in \{a,b\}^* |$ dans u, tout bloc de a est de longueur $\geq 2\}$.

(b) $\{u \in \{a,b\}^* |$ dans u, tout a est suivi d'un seul $b\}$.

Exercice 1.6 Déterminer un AFD pour les langages suivants :

(a) l'ensemble des réprésentations binaires des nombres pairs

(b) l'ensemble des représentations décimales des multiples de 3

Exercice 1.7 On désire modéliser le comportement d'un distributeur de cannettes. La machine accepte les pièces de 10, 20, 50 centimes et 1 euro, représentées respectivement par les symboles a, b, c et d. Lorsque l'utilisateur introduit une somme correspondant à un euro, la machine laisse tomber une cannette.

Représenter une telle machine sous la forme d'un automate.

Exercice 1.8 Soit $L \subset V^*$ un langage reconnaissable. Montrer que les langages suivants sont reconnaissables :

(a) $\{w \in L |$ aucun préfixe strict de w n'est dans $L\}$

(b) $\{w \in V^* |$ aucun préfixe strict de w n'est dans $L\}$

(c) $\{w \in L |$ w n'est préfixe strict d'aucun mot de $L\}$

(d) $\{w \in V^* |$ w est préfixe d'un mot de $L\}$

Exercice 1.9 Un passeur doit faire passer d'une rive à l'autre un loup, une chèvre et une salade. Toutefois, son bateau ne peut transporter qu'un seul passager en dehors de lui-même. Bien entendu, il ne peut laisser le loup et la chèvre seuls sans surveillance, sinon le loup mangera la chèvre. Même chose pour le couple chèvre-salade, car la chèvre rêve de manger la salade.

Chaque état représente les protagonistes sur la rive opposée. Ainsi l'état CP signifie et que la chèvre et le passeur sont sur la rive opposée (et que le loup et la salade n'ont pas encore traversé). Comme le précise l'énoncé, certains états sont interdits. L'état initial est $\varnothing$ et l'état final est CLPS. Les actions possibles (qui constituent donc l'alphabet de l'automate) sont les suivantes :

1. traverser seul (P)
2. traverser avec le loup (L)
3. traverser avec la chèvre (C)
4. traverser avec la salade (S)

Dessinez un automate déterministe possèdant le moins d'états possibles permettant de trouver toutes les solutions au problème.

Exercice 1.10

1. On appelle L_i le langage des mots de longueur i sur l'alphabet $\{a,b\}$ possédant autant de a que de b.
   — Dessiner l'automate ayant un nombre minimal d'états reconnaissant le langage L_2
   — Même question pour L_4
   — Même question pour L_6
2. Combien d'états comporte l'automate minimal reconnaissant le langage L_{10} ? Même question pour le langage L_{100}.
3. Quelle conclusion en tirez vous sur la nature du langage $L = \cup_{i=0}^{\infty} L_i$?