A. Nasr, F. Nouioua, F. Olive

TD n° 1

Généralités

Exercice 1.1 Déterminer les facteurs, les préfixes et les suffixes du mot $u = abac$.

Exercice 1.2 Soit $u = a_1 \dots a_n$ un mot de longeur n, avec $a_i \neq a_j$ pour tous $i \neq j$. Combien u comporte-t-il de préfixes ? De suffixes ? De facteurs ?

Exercice 1.3

1. Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca, $aabgjdd$, $titi$, $babc$.
2. Donner l'ensemble des couples (u,v) tels que $uv = abaac$.
3. Calculer LM pour les ensembles suivants :
   — $L = \{a, ab, bb\}$ et $M = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
   — $L = \varnothing$ et $M = \{a, ba, bb\}$;
   — $L = \{\varepsilon\}$ et $M = \{a, ba, bb\}$;
   — $L = \{aa, ab, ba\}$ et $M = \{a, b\}^*$.

Exercice 1.4 Prouver les assertions suivantes, où V est un alphabet, $a, b \in V$ et $u, v, x, y \in V^*$.

1. $au = bv \Rightarrow (a = b$ et $u = v)$;
2. $xu = xv \Rightarrow u = v$;
3. $(xu = yv \wedge |x| = |y|) \Rightarrow u = v$;
4. $(xu = yv \wedge |x| \leq |y|) \Rightarrow$ (x est préfixe de y et v est suffixe de u).

Exercice 1.5 Soient u et v deux mots. Montrer que $uv = vu$ si et seulement si il existe $\gamma \in V^*$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $u = \gamma^p$ et $v = \gamma^q$.

Exercice 1.6 Montrer que $(uv)^R = v^R u^R$.

Exercice 1.7 Montrer que :

1. Il n'existe pas de mot $x \in \{a, b\}^*$ tel que $ax = xb$.
2. Il n'existe pas de mots $x, y \in \{a, b\}^*$ tel que $xay = ybx$.

Exercice 1.8 Soient A, B, C trois langages sur un même alphabet. Prouver les propriétés suivantes :

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $A(B \cup C) = AB \cup AC$.
3. $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$ et l'inclusion réciproque est fausse en général.

4. $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$.
5. $(A^*)^* = A^*$.
6. $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$.

Exercice 1.9 Soient A, B deux langages sur un même alphabet.

1. Comparer $(A \cup B)^*$ et $A^* \cup B^*$.
2. Comparer $(A \cap B)^*$ et $A^* \cap B^*$.
3. Comparer $(AB)^*$ et A^*B^*.

Exercice 1.10 Deux mots u et v sont dits conjugués s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que $u = w_1w_2$ et $v = w_2w_1$. En d'autres termes, v s'obtient à partir de u par permutation cyclique de ses lettres.

1. Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :
   — tout mot u est conjugué à lui-même ;
   — si u est conjugué à v, alors v est conjugué à u ;
   — si u est conjugué à v et v est conjugué à w, alors u est conjugué à w.
2. Montrer que u et v sont conjugués si et seulement s'il existe un mot w tel que $uw = wv$.

Exercice 1.11 On appelle *code* sur un alphabet V tout langage X sur V tel que pour tous $x_1, \ldots, x_p \in X$ et pour tous $y_1, \ldots, y_q \in X$: $x_1 \ldots x_p = y_1 \ldots y_q \Rightarrow (p = q \text{ et } \forall i \leq p : x_i = y_i)$. Autrement dit, X est un code ssi tout élément de X^* se factorise de manière unique sur X.

1. Les langages suivants sont-ils des codes ?
   — $X_1 = \{ab, baa, abba, aabaa\}$;
   — $X_2 = \{b, ab, baa, abaa, aaaa\}$;
   — $X_3 = \{aa, ab, aab, bba\}$;
   — $X_4 = \{a, ba, bba, baab\}$;
2. Soit $u \in V^*$. Montrer que le singleton $\{u\}$ est un code si et seulement si $u \neq \varepsilon$.
3. Soient u et v deux mots distincts sur V. Montrer que la paire $\{u, v\}$ est un code si et seulement si u et v ne commutent pas.
4. Soit X une partie de V^* ne contenant pas ε et telle qu'aucun mot de X n'est préfixe propre d'un autre mot de X. Montrer qu'alors X est un code. (Un tel code est appelé *code préfixe*.)