Théorie des langages

Alexis Nasr

Plan du cours

- Langages résiduels
- Automate des résiduels
- Théorème de Myhill-Nerode

Langages résiduels

- On appelle résiduel d'un langage $L \subseteq \Sigma^*$ par rapport à un mot $u \in \Sigma^*$, noté L/u, l'ensemble des mots de L qui commencent par u auxquels on a retiré ce préfixe u.
- Autrement dit :

$$L/u = \{v \in \Sigma^* \mid uv \in L\}$$

- Exemple : Si $L = aa(bb+c)^*$ alors :
  - $L/a = a(bb+c)^*$
  - $L/b = \emptyset$
  - $L/c = \emptyset$

Quelques propriétés des langages résiduels

Soient $X, Y \subseteq \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, on a :

Quelques propriétés des langages résiduels

Soient $X, Y \subseteq \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, on a :

1. $X/uv = (X/u)/v$

Quelques propriétés des langages résiduels

Soient $X, Y \subseteq \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, on a :

1. $X/uv = (X/u)/v$
2. $(X \cup Y)/u = (X/u) \cup (Y/u)$

Quelques propriétés des langages résiduels

Soient $X, Y \subseteq \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, on a :

1. $X/uv = (X/u)/v$
2. $(X \cup Y)/u = (X/u) \cup (Y/u)$
3. si $\varepsilon \notin X$ alors $(XY)/a = (X/a)Y$

Quelques propriétés des langages résiduels

Soient $X, Y \subseteq \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, on a :

1. $X/uv = (X/u)/v$
2. $(X \cup Y)/u = (X/u) \cup (Y/u)$
3. si $\varepsilon \notin X$ alors $(XY)/a = (X/a)Y$
4. si $\varepsilon \in X$ alors $(XY)/a = (X/a)Y \cup Y/a$

Quelques propriétés des langages résiduels

Soient $X, Y \subseteq \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, on a :

1. $X/uv = (X/u)/v$
2. $(X \cup Y)/u = (X/u) \cup (Y/u)$
3. si $\varepsilon \notin X$ alors $(XY)/a = (X/a)Y$
4. si $\varepsilon \in X$ alors $(XY)/a = (X/a)Y \cup Y/a$
5. $\forall n > 0, X^n/a = (X/a)X^{n-1}$

Quelques propriétés des langages résiduels

Soient $X, Y \subseteq \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, on a :

1. $X/uv = (X/u)/v$
2. $(X \cup Y)/u = (X/u) \cup (Y/u)$
3. si $\varepsilon \notin X$ alors $(XY)/a = (X/a)Y$
4. si $\varepsilon \in X$ alors $(XY)/a = (X/a)Y \cup Y/a$
5. $\forall n > 0, X^n/a = (X/a)X^{n-1}$
6. $X^*/a = (X/a)X^*$

Résiduels d'un langage décrit par une expression régulière

Soient X, Y des expressions régulières sur Σ, $u, v \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$. On a :

Résiduels d'un langage décrit par une expression régulière

Soient X, Y des expressions régulières sur Σ, $u, v \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$. On a :

1. $a/a = \varepsilon$

Résiduels d'un langage décrit par une expression régulière

Soient X, Y des expressions régulières sur Σ, $u, v \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$. On a :

1. $a/a = \varepsilon$
2. $a/b = \emptyset$

Résiduels d'un langage décrit par une expression régulière

Soient X, Y des expressions régulières sur Σ, $u, v \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$. On a :

1. $a/a = \varepsilon$
2. $a/b = \emptyset$
3. $(X+Y)/u = (X/u) + (Y/u)$

Résiduels d'un langage décrit par une expression régulière

Soient X, Y des expressions régulières sur Σ, $u, v \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$. On a :

1. $a/a = \varepsilon$
2. $a/b = \emptyset$
3. $(X + Y)/u = (X/u) + (Y/u)$
4. $(XY)/a = (X/a)Y$ si $\varepsilon \notin L(X)$

Résiduels d'un langage décrit par une expression régulière

Soient X, Y des expressions régulières sur Σ, $u, v \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$. On a :

1. $a/a = \varepsilon$
2. $a/b = \emptyset$
3. $(X + Y)/u = (X/u) + (Y/u)$
4. $(XY)/a = (X/a)Y$ si $\varepsilon \notin L(X)$
5. $(XY)/a = (X/a)Y + Y/a$ si $\varepsilon \in L(X)$

Résiduels d'un langage décrit par une expression régulière

Soient X, Y des expressions régulières sur Σ, $u, v \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$. On a :

1. $a/a = \varepsilon$
2. $a/b = \emptyset$
3. $(X + Y)/u = (X/u) + (Y/u)$
4. $(XY)/a = (X/a)Y$ si $\varepsilon \notin L(X)$
5. $(XY)/a = (X/a)Y + Y/a$ si $\varepsilon \in L(X)$
6. $X^*/a = (X/a)X^*$

Résiduels d'un langage décrit par une expression régulière

Soient X, Y des expressions régulières sur Σ, $u, v \in \Sigma^*$ et $a, b \in \Sigma$. On a :

1. $a/a = \varepsilon$
2. $a/b = \emptyset$
3. $(X + Y)/u = (X/u) + (Y/u)$
4. $(XY)/a = (X/a)Y$ si $\varepsilon \notin L(X)$
5. $(XY)/a = (X/a)Y + Y/a$ si $\varepsilon \in L(X)$
6. $X^*/a = (X/a)X^*$
7. $X/uv = (X/u)/v$

Exemple

$(a+b)^*aba/ab$

$X/uv = (X/u)/v$

Exemple

$$
\begin{array}{lll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{rll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X \\
= & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X)
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{rll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X \\
= & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X) \\
= & (((a+b)^*/a)aba + (a/a)ba)/b & X^*/a = (X/a)({}^*X)
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{rll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(\\
= & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X) \\
= & (((a+b)^*/a)aba + (a/a)ba)/b & X^*/a = (X/a)({}^*X) \\
= & ((a+b)/a(a+b)^*aba + \varepsilon ba)/b & (X+Y)/u = (X/u) + (Y/u)
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{lll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X \\
= & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X) \\
= & (((a+b)^*/a)aba + (a/a)ba)/b & X^*/a = (X/a)(^*X) \\
= & ((a+b)/a(a+b)^*aba + \varepsilon ba)/b & (X+Y)/u = (X/u) + (Y/u) \\
= & ((a/a + b/a)(a+b)^*aba + ba)/b &
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{lll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X \\
= & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X) \\
= & (((a+b)^*/a)aba + (a/a)ba)/b & X^*/a = (X/a)({}^*X) \\
= & ((a+b)/a(a+b)^*aba + \varepsilon ba)/b & (X+Y)/u = (X/u) + (Y/u) \\
= & ((a/a + b/a)(a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & ((\varepsilon + \emptyset)(a+b)^*aba + ba)/b &
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
& (a+b)^*aba/ab && X/uv = (X/u)/v \\
= \; & ((a+b)^*aba/a)/b && (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X \\
= \; & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b && (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X) \\
= \; & (((a+b)^*/a)aba + (a/a)ba)/b && X^*/a = (X/a)(^*X) \\
= \; & ((a+b)/a(a+b)^*aba + \varepsilon ba)/b && (X+Y)/u = (X/u) + (Y/u) \\
= \; & ((a/a + b/a)(a+b)^*aba + ba)/b && \\
= \; & ((\varepsilon + \emptyset)(a+b)^*aba + ba)/b && \\
= \; & ((a+b)^*aba + ba)/b &&
\end{aligned}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{rll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X \\
= & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X) \\
= & (((a+b)^*/a)aba + (a/a)ba)/b & X^*/a = (X/a)({}^*X) \\
= & ((a+b)/a(a+b)^*aba + \varepsilon ba)/b & (X+Y)/u = (X/u) + (Y/u) \\
= & ((a/a + b/a)(a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & ((\varepsilon + \emptyset)(a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & ((a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & (a+b)^*aba/b + ba/b &
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{rll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X \\
= & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X) \\
= & (((a+b)^*/a)aba + (a/a)ba)/b & X^*/a = (X/a)(^*X) \\
= & ((a+b)/a(a+b)^*aba + \varepsilon ba)/b & (X+Y)/u = (X/u) + (Y/u) \\
= & ((a/a+b/a)(a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & ((\varepsilon + \emptyset)(a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & ((a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & (a+b)^*aba/b + ba/b & \\
= & ((a+b)^*/b)aba + aba/b + ba/b &
\end{array}
$$

Exemple

$$
\begin{array}{lll}
 & (a+b)^*aba/ab & X/uv = (X/u)/v \\
= & ((a+b)^*aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y + Y/a \text{ si } \varepsilon \in L(X \\
= & (((a+b)^*/a)aba + aba/a)/b & (XY)/a = (X/a)Y \text{ si } \varepsilon \notin L(X) \\
= & (((a+b)^*/a)aba + (a/a)ba)/b & X^*/a = (X/a)(^*X) \\
= & ((a+b)/a(a+b)^*aba + \varepsilon ba)/b & (X+Y)/u = (X/u) + (Y/u) \\
= & ((a/a+b/a)(a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & ((\varepsilon + \emptyset)(a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & ((a+b)^*aba + ba)/b & \\
= & (a+b)^*aba/b + ba/b & \\
= & ((a+b)^*/b)aba + aba/b + ba/b & \\
= & (a+b)^*aba + a &
\end{array}
$$

Langages L_q

- Pour chaque état q d'un automate $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, on note L_q l'ensemble des mots w tels que le calcul de A sur w à partir de q aboutit à un état d'acceptation.
- Autrement dit :

$$L_q = \{ w \in \Sigma^* \mid (q, w) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon) \text{ avec } q_f \in F \}$$

- En particulier : $L_{q_0} = L(A)$

Langages L_q et résiduels

- Soient $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un automate déterministe et $L = L(A)$.
- $\forall u \in \Sigma^*$ et $\forall q \in Q$, on a :

$$\text{si } (q_0, u) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon) \text{ alors } L/u = L_q$$

Langages L_q et résiduels

- Soient $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un automate déterministe et $L = L(A)$.
- $\forall u \in \Sigma^*$ et $\forall q \in Q$, on a :

$$\text{si } (q_0, u) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon) \text{ alors } L/u = L_q$$

- Preuve

$$\begin{array}{rcl}
x \in L/u & \Leftrightarrow & ux \in L \\
 & \Leftrightarrow & (q_0, ux) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon) \text{ avec } q_f \in F \\
 & \Leftrightarrow & (q_0, ux) \overset{*}{\vdash} (q, x) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon) \\
 & \Leftrightarrow & (q, x) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon) \\
 & \Leftrightarrow & x \in L_q
\end{array}$$

Langages L_q et résiduels

- L'ensemble des résiduels d'un langage reconnaissable est égal à ses langages L_q
- Autrement dit, si $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ est un automate déterministe complet. Alors :

$$\{L(A)/w \mid w \in \Sigma^*\} = \{L_q \mid q \in Q\}$$

Par conséquent

- Le nombre de résiduels de $L(A)$ est fini
- le nombre de résiduels de $L(A)$ est inférieur ou égal à $|Q|$ car il peut exister deux états $q, q' \in Q$ tels que $L_q = L_{q'}$.

Automate des résiduels

- Lorsqu'un langage n'a qu'un nombre fini de résiduels, on peut lui associer un automate particulier appelé automate des résiduels de L
- Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage tel que $L/w, w \in \Sigma^*$ est fini.
- L'automate des résiduels de L est l'automate déterministe $A_L = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ défini par :
  - $Q = \{L/w, w \in \Sigma^*\}$
  - $\delta(L/w, a) = L/wa$ pour tout $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$
  - $q_0 = L$
  - $F = \{L/w, w \in L\}$
- L'automate des résiduels de L reconnaît L

Exemple

Les résiduels du langage L dénoté par l'expression régulière $ab^* + ba^*$ sont :

- $L = L/\varepsilon$
- $L/a = L/ab = b^*$
- $L/b = L/ba = a^*$
- $L/aa = L/bb = \emptyset$

Ce qui donne pour L l'automate des résiduels suivant :

Théorème de Myhill-Nerode

- Un langage est reconnaissable si et seulement s'il n'a qu'un nombre fini de résiduels

Théorème de Myhill-Nerode

- Un langage est reconnaissable si et seulement s'il n'a qu'un nombre fini de résiduels

Preuve :

- Un langage reconnaissable a un nombre fini de résiduels
- Réciproquement, pour tout langage L comportant un nombre fini de résiduels, on peut construire son automate des résiduels