Théorie des langages

Alexis Nasr

Langages réguliers

Etant donné un alphabet Σ, on appelle langage régulier sur Σ un langage sur Σ défini de la façon suivante :

1. $\emptyset$ (l'ensemble vide) est un langage régulier sur Σ.
2. $\{\varepsilon\}$ est un langage régulier sur Σ.
3. $\{a\}$ est un langage régulier sur Σ pour tout $a \in \Sigma$.
4. Si P et Q sont des langages réguliers sur Σ, alors les langages suivants sont des langages réguliers :
    1. $P \cup Q$
    2. PQ
    3. P^*
5. rien d'autre n'est un langage régulier.

Quelques langages réguliers

- Pour tout mot $u \in \Sigma^*$, le langage $\{u\}$ est régulier.

Quelques langages réguliers

- Pour tout mot $u \in \Sigma^*$, le langage $\{u\}$ est régulier.
  - Si u s'écrit $a_1 \dots a_n$ sur Σ, alors le langage $\{u\}$ s'écrit comme la concaténation $\{u\} = \{a_1\}\{a_2\} \dots \{a_n\}$.
  - $\{u\}$ est régulier car chaque $\{a_i\}$ l'est et l'ensemble des langages réguliers est clos pour la concaténation.

Quelques langages réguliers

- Pour tout mot $u \in \Sigma^*$, le langage $\{u\}$ est régulier.
  - Si u s'écrit $a_1 \ldots a_n$ sur Σ, alors le langage $\{u\}$ s'écrit comme la concaténation $\{u\} = \{a_1\}\{a_2\} \ldots \{a_n\}$.
  - $\{u\}$ est régulier car chaque $\{a_i\}$ l'est et l'ensemble des langages réguliers est clos pour la concaténation.
- Tout langage fini est régulier.

Quelques langages réguliers

- Pour tout mot $u \in \Sigma^*$, le langage $\{u\}$ est régulier.
  - Si u s'écrit $a_1 \dots a_n$ sur Σ, alors le langage $\{u\}$ s'écrit comme la concaténation $\{u\} = \{a_1\}\{a_2\} \dots \{a_n\}$.
  - $\{u\}$ est régulier car chaque $\{a_i\}$ l'est et l'ensemble des langages réguliers est clos pour la concaténation.
- Tout langage fini est régulier.
  - Un ensemble fini de mots $L = \{u_1, \dots, u_k\}$ s'écrit : $L = \{u_1\} \cup \{u_2\} \cup \dots \cup \{u_k\}$.
  - L est régulier car chaque $\{u_i\}$ l'est et l'ensemble des langages réguliers est clos pour l'union.

Quelques langages réguliers

- L'ensemble de tous les mots, Σ^*, est régulier.

Quelques langages réguliers

- L'ensemble de tous les mots, Σ^*, est régulier.
  - $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_p\}$
  - le langage $\{a_1, \ldots, a_p\}$ est régulier.
  - Σ^* n'est autre que la fermeture de Kleene de ce langage
  - Σ^* est un langage régulier car ces derniers sont clos pour cette opération.

Quelques langages réguliers

- L'ensemble de tous les mots, Σ^*, est régulier.
  - $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_p\}$
  - le langage $\{a_1, \ldots, a_p\}$ est régulier.
  - Σ^* n'est autre que la fermeture de Kleene de ce langage
  - Σ^* est un langage régulier car ces derniers sont clos pour cette opération.
- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, l'ensemble $\{a^n b^p | n, p \in \mathcal{N}\}$ est régulier.

Quelques langages réguliers

- L'ensemble de tous les mots, Σ^*, est régulier.
  - $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_p\}$
  - le langage $\{a_1, \ldots, a_p\}$ est régulier.
  - Σ^* n'est autre que la fermeture de Kleene de ce langage
  - Σ^* est un langage régulier car ces derniers sont clos pour cette opération.
- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, l'ensemble $\{a^n b^p | n, p \in \mathcal{N}\}$ est régulier.
  - Le langage $\{a^n | n \in \mathcal{N}\} = \{a\}*$ est régulier, comme fermeture de Kleene du langage régulier $\{a\}$
  - pour la même raison, $\{b^p | p \in \mathcal{N}\} = \{b\}*$ est régulier.
  - Le langage $\{a^n b^p | n, p \in \mathcal{N}\}$, concaténation des deux précédents, est donc régulier.

Expressions régulières

On introduit une notation pratique pour dénoter des langages réguliers sur Σ, que l'on appelle expression régulière sur Σ :

1. $\emptyset$ est une expression régulière dénotant le langage régulier $\emptyset$.
2. ε est une expression régulière dénotant le langage régulier $\{\varepsilon\}$.
3. a (tel que $a \in \Sigma$) est une expression régulière dénotant le langage régulier $\{a\}$.
4. Si p et q sont des expressions régulières dénotant respectivement les ensembles réguliers P et Q alors :
    1. $(p+q)$ est une expression régulière dénotant le langage régulier $P \cup Q$
    2. (pq) est une expression régulière dénotant le langage régulier PQ
    3. $(p)^*$ est une expression régulière dénotant le langage régulier P^*
5. rien d'autre n'est une expression régulière.

Expressions régulières

- E étant une expression régulière, on notera $L(E)$ le langage dénoté par E : $L(0 + (1(0)^*)) = \{0, 1, 10, 100, \ldots\}$.
- les deux expressions régulières E et E' sont équivalentes ($\equiv$) si $L(E) = L(E')$

Exemple

- L'expression régulière $(0 + (1(0)^*))$ définie sur l'alphabet $\{0, 1\}$ dénote le langage $\{0\} \cup (\{1\}(\{0\})^*)$
- C'est le langage formé du mot 0 et des mots composés d'un 1 suivi d'un nombre quelconque de 0 : $\{0, 1, 10, 100, \ldots\}$.

Priorités

- Afin d'alléger les expressions régulières, on introduit les priorités suivantes :

$$\text{priorité}(*) \; > \; \text{priorité}(\cdot) \; > \; \text{priorité}(+)$$

- L'expression $0 + 10^*$ est donc équivalente à $(0 + (1(0)^*))$.

Autres exemples

$$0^*10^* \quad =$$

Autres exemples

$$0^*10^* \quad = \quad \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a exactement un } 1\}$$

Autres exemples

$$\begin{aligned} 0^*10^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a exactement un } 1\} \\ (0+1)^*1(0+1)^* &= \end{aligned}$$

Autres exemples

$$\begin{aligned} 0^*10^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a exactement un } 1\} \\ (0+1)^*1(0+1)^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a au moins un } 1\} \end{aligned}$$

Autres exemples

$$
\begin{array}{rcl}
0^*10^* & = & \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a exactement un } 1\} \\
(0+1)^*1(0+1)^* & = & \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a au moins un } 1\} \\
(0+1)^*001(0+1)^* & = &
\end{array}
$$

Autres exemples

$$\begin{aligned}
0^*10^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a exactement un } 1\} \\
(0+1)^*1(0+1)^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a au moins un } 1\} \\
(0+1)^*001(0+1)^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ contient la sous-chaîne } 001\}
\end{aligned}$$

Autres exemples

$$\begin{array}{rcl}
0^*10^* & = & \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a exactement un } 1\} \\
(0+1)^*1(0+1)^* & = & \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a au moins un } 1\} \\
(0+1)^*001(0+1)^* & = & \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ contient la sous-chaîne } 001\} \\
((0+1)(0+1))^* & = &
\end{array}$$

Autres exemples

$$
\begin{aligned}
0^*10^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a exactemement un } 1\} \\
(0+1)^*1(0+1)^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ a au moins un } 1\} \\
(0+1)^*001(0+1)^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid m \text{ contient la sous-chaîne } 001\} \\
((0+1)(0+1))^* &= \{m \in \{0,1\}^* \mid |m| \text{ est pair}\}
\end{aligned}
$$

Equivalence

- On peut construire une expression régulière dénotant un langage régulier quelconque.
- De même, on peut construire le langage régulier dénoté par toute expression régulière.
- Mais pour tout langage régulier, il existe une infinité d'expression régulières le dénotant.

Quelques règles d'équivalence

$$\alpha + (\beta + \gamma) \quad \equiv \quad (\alpha + \beta) + \gamma \quad \text{associativité de l'union}$$

Quelques règles d'équivalence

$$\begin{array}{rcll}
\alpha + (\beta + \gamma) & \equiv & (\alpha + \beta) + \gamma & \text{associativité de l'union} \\
\alpha + \beta & \equiv & \beta + \alpha & \text{commutativité de l'union}
\end{array}$$

Quelques règles d'équivalence

$$\begin{array}{rcll}
\alpha + (\beta + \gamma) & \equiv & (\alpha + \beta) + \gamma & \text{associativité de l'union} \\
\alpha + \beta & \equiv & \beta + \alpha & \text{commutativité de l'union} \\
\alpha + \emptyset & \equiv & \alpha & \emptyset \text{ élément neutre pour l'union}
\end{array}$$

Quelques règles d'équivalence

$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
$\alpha + \beta$	$\equiv$	$\beta + \alpha$	commutativité de l'union
$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	$\emptyset$ élément neutre pour l'union
$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotence de l'union

Quelques règles d'équivalence

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha + (\beta + \gamma) & \equiv & (\alpha + \beta) + \gamma & \text{associativité de l'union} \\
\alpha + \beta & \equiv & \beta + \alpha & \text{commutativité de l'union} \\
\alpha + \emptyset & \equiv & \alpha & \emptyset \text{ élément neutre pour l'union} \\
\alpha + \alpha & \equiv & \alpha & \text{idempotence de l'union} \\
\alpha(\beta\gamma) & \equiv & (\alpha\beta)\gamma & \text{associativité de la concaténation}
\end{array}
$$

Quelques règles d'équivalence

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha + (\beta + \gamma) & \equiv & (\alpha + \beta) + \gamma & \text{associativité de l'union} \\
\alpha + \beta & \equiv & \beta + \alpha & \text{commutativité de l'union} \\
\alpha + \emptyset & \equiv & \alpha & \emptyset \text{ élément neutre pour l'union} \\
\alpha + \alpha & \equiv & \alpha & \text{idempotence de l'union} \\
\alpha(\beta\gamma) & \equiv & (\alpha\beta)\gamma & \text{associativité de la concaténation} \\
\varepsilon\alpha & \equiv & \alpha\varepsilon \equiv \alpha & \varepsilon \text{ élément neutre de la concaténation}
\end{array}
$$

Quelques règles d'équivalence

$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
$\alpha + \beta$	$\equiv$	$\beta + \alpha$	commutativité de l'union
$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	$\emptyset$ élément neutre pour l'union
$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotence de l'union
$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
$\varepsilon\alpha$	$\equiv$	$\alpha\varepsilon \equiv \alpha$	ε élément neutre de la concaténation
$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union

Quelques règles d'équivalence

$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
$\alpha + \beta$	$\equiv$	$\beta + \alpha$	commutativité de l'union
$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	$\emptyset$ élément neutre pour l'union
$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotence de l'union
$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
$\varepsilon\alpha$	$\equiv$	$\alpha\varepsilon \equiv \alpha$	ε élément neutre de la concaténation
$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union

Quelques règles d'équivalence

$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
$\alpha + \beta$	$\equiv$	$\beta + \alpha$	commutativité de l'union
$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	$\emptyset$ élément neutre pour l'union
$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotence de l'union
$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
$\varepsilon\alpha$	$\equiv$	$\alpha\varepsilon \equiv \alpha$	ε élément neutre de la concaténation
$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\alpha\emptyset \equiv \emptyset$	$\emptyset$ élément absorbant pour la concat.

Quelques règles d'équivalence

$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
$\alpha + \beta$	$\equiv$	$\beta + \alpha$	commutativité de l'union
$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	$\emptyset$ élément neutre pour l'union
$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotence de l'union
$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
$\varepsilon\alpha$	$\equiv$	$\alpha\varepsilon \equiv \alpha$	ε élément neutre de la concaténation
$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\alpha\emptyset \equiv \emptyset$	$\emptyset$ élément absorbant pour la concat.
$\varepsilon + \alpha\alpha^*$	$\equiv$	α^*	

Quelques règles d'équivalence

$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
$\alpha + \beta$	$\equiv$	$\beta + \alpha$	commutativité de l'union
$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	$\emptyset$ élément neutre pour l'union
$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotence de l'union
$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
$\varepsilon\alpha$	$\equiv$	$\alpha\varepsilon \equiv \alpha$	ε élément neutre de la concaténation
$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\alpha\emptyset \equiv \emptyset$	$\emptyset$ élément absorbant pour la concat.
$\varepsilon + \alpha\alpha^*$	$\equiv$	α^*	
$\varepsilon + \alpha^*\alpha$	$\equiv$	α^*	

Quelques règles d'équivalence

$\alpha + (\beta + \gamma)$	$\equiv$	$(\alpha + \beta) + \gamma$	associativité de l'union
$\alpha + \beta$	$\equiv$	$\beta + \alpha$	commutativité de l'union
$\alpha + \emptyset$	$\equiv$	α	$\emptyset$ élément neutre pour l'union
$\alpha + \alpha$	$\equiv$	α	idempotence de l'union
$\alpha(\beta\gamma)$	$\equiv$	$(\alpha\beta)\gamma$	associativité de la concaténation
$\varepsilon\alpha$	$\equiv$	$\alpha\varepsilon \equiv \alpha$	ε élément neutre de la concaténation
$\alpha(\beta + \gamma)$	$\equiv$	$\alpha\beta + \alpha\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$(\alpha + \beta)\gamma$	$\equiv$	$\alpha\gamma + \beta\gamma$	distributivité de la concat. sur l'union
$\emptyset\alpha$	$\equiv$	$\alpha\emptyset \equiv \emptyset$	$\emptyset$ élément absorbant pour la concat.
$\varepsilon + \alpha\alpha^*$	$\equiv$	α^*	
$\varepsilon + \alpha^*\alpha$	$\equiv$	α^*	
$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	

Simplifications

- Les axiomes précédents peuvent être utilisés pour prouver que deux expressions régulières sont équivalentes.
- Exemple : $\varepsilon + 0 + 00 \equiv (\varepsilon + 0)(\varepsilon + 0)$
- Preuve :

$$\varepsilon + 0 + 00 \quad \equiv$$

Simplifications

- Les axiomes précédents peuvent être utilisés pour prouver que deux expressions réguières sont équivalentes.
- Exemple : $\varepsilon + 0 + 00 \equiv (\varepsilon + 0)(\varepsilon + 0)$
- Preuve :

$$\varepsilon + 0 + 00 \quad \equiv \quad \varepsilon + 0 + 0 + 00 \qquad\qquad \alpha + \alpha \equiv \alpha$$

Simplifications

- Les axiomes précédents peuvent être utilisés pour prouver que deux expressions régulières sont équivalentes.
- Exemple : $\varepsilon + 0 + 00 \equiv (\varepsilon + 0)(\varepsilon + 0)$
- Preuve :

$$\begin{array}{rcll}
\varepsilon + 0 + 00 & \equiv & \varepsilon + 0 + 0 + 00 & \alpha + \alpha \equiv \alpha \\
 & \equiv & \varepsilon\varepsilon + \varepsilon 0 + 0 + 00 & \varepsilon\alpha \equiv \alpha
\end{array}$$

Simplifications

- Les axiomes précédents peuvent être utilisés pour prouver que deux expressions réguières sont équivalentes.
- Exemple : $\varepsilon + 0 + 00 \equiv (\varepsilon + 0)(\varepsilon + 0)$
- Preuve :

$$\begin{array}{rcll}
\varepsilon + 0 + 00 & \equiv & \varepsilon + 0 + 0 + 00 & \alpha + \alpha \equiv \alpha \\
 & \equiv & \varepsilon\varepsilon + \varepsilon 0 + 0 + 00 & \varepsilon\alpha \equiv \alpha \\
 & \equiv & \varepsilon(\varepsilon + 0) + 0(\varepsilon + 0) & \alpha(\beta + \gamma) \equiv \alpha\beta + \alpha\gamma
\end{array}$$

Simplifications

- Les axiomes précédents peuvent être utilisés pour prouver que deux expressions réguières sont équivalentes.
- Exemple : $\varepsilon + 0 + 00 \equiv (\varepsilon + 0)(\varepsilon + 0)$
- Preuve :

$$
\begin{array}{rcll}
\varepsilon + 0 + 00 & \equiv & \varepsilon + 0 + 0 + 00 & \alpha + \alpha \equiv \alpha \\
 & \equiv & \varepsilon\varepsilon + \varepsilon 0 + 0 + 00 & \varepsilon\alpha \equiv \alpha \\
 & \equiv & \varepsilon(\varepsilon + 0) + 0(\varepsilon + 0) & \alpha(\beta + \gamma) \equiv \alpha\beta + \alpha\gamma \\
 & \equiv & (\varepsilon + 0)(\varepsilon + 0) & (\alpha + \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma + \beta\gamma
\end{array}
$$

Quelques équivalences utiles

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)^*\alpha &\equiv \alpha(\beta\alpha)^* \\
(\alpha^*\beta)^*\alpha^* &\equiv (\alpha+\beta)^* \\
\alpha^*(\beta\alpha^*)^* &\equiv (\alpha+\beta)^* \\
(\varepsilon+\alpha)^* &\equiv \alpha^* \\
\alpha\alpha^* &\equiv \alpha^*\alpha
\end{aligned}
$$