Partiel

Poly, notes de cours et transparents du cours autorisés

Durée : 2h

20 octobre 2009

1 Manipulation d'automates

Q.1.1. Construire un automate reconnaissant le langage des mots sur $\{a, b, c\}$ de longueur paire comportant un nombre pair de a.

Q.1.2. Eliminez les transitions ε de l'automate suivant :

		a	b	ε
$\rightarrow$	0	1	2	3
	1	3	2	0
	2	3	0	1
$\leftarrow$	3	0	1	2

Correction :

On élimine les transitions ε allant vers l'état 0. On obtient

		a	b	ε
$\rightarrow$	0	1	2	3
	1	$\{1, 3\}$	2	3
	2	3	0	1
$\leftarrow$	3	0	1	2

On élimine les transitions ε allant vers l'état 1. On obtient

		a	b	ε
$\rightarrow$	0	1	2	3
	1	$\{1, 3\}$	2	3
	2	$\{1, 3\}$	$\{0, 2\}$	3
$\leftarrow$	3	0	1	2

On élimine les transitions ε allant vers l'état 2. On obtient

		a	b	ε
$\rightarrow$	0	1	2	3
	1	$\{1, 3\}$	2	3
	2	$\{1, 3\}$	$\{0, 2\}$	3
$\leftarrow$	3	$\{0, 1, 3\}$	$\{0, 1, 2\}$	3

On élimine les transitions ε allant vers l'état 3. On obtient

		a	b	ε
$\leftrightarrow$	0	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	
$\leftarrow$	1	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	
$\leftarrow$	2	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	
$\leftarrow$	3	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2\}$	

Q.1.3. Déterminisez l'automate suivant :

		a	b	c	d
$\rightarrow$	0	$\{1,2\}$	3	1	2
	1	0	$\{1,3\}$	1	2
	2	1	3	$\{0,3\}$	0
$\leftarrow$	3	2	1	0	$\{2,0\}$

Correction :

		a	b	c	d
$\rightarrow$	0	12	3	1	2
	12	01	13	013	02
$\leftarrow$	3	2	1	0	02
	1	0	13	1	2
	2	1	3	03	0
	01	012	13	1	2
$\leftarrow$	13	02	13	01	02
$\leftarrow$	013	012	13	01	02
	02	12	3	013	02
	012	012	13	013	02

Q.1.4. Minimisez l'automate suivant :

		a	b	c	d
$\rightarrow$	0	1	9	5	9
	1	2	7	9	3
	2	2	7	9	3
$\leftarrow$	3	9	9	9	4
$\leftarrow$	4	9	7	6	3
	5	9	7	6	3
	6	9	7	6	3
$\leftarrow$	7	9	8	9	9
$\leftarrow$	8	9	8	9	9
	9	9	9	9	9

Correction :

π_0	**3**	**4**	**7**	**8**	**0**	**1**	**2**	**5**	**6**	**9**	**b sépare 3 de 4,7,8**
π_1	**3**	**4**	**7**	**8**	**0**	**1**	**2**	**5**	**6**	**9**	**b sépare 0,9 de 1,2,5,6**
π_2	**3**	**4**	**7**	**8**	**0**	**9**	**1**	**2**	**5**	**6**	**b sépare 1,2 de 5,6**
π_3	**3**	**4**	**7**	**8**	**0**	**9**	**1**	**2**	**5**	**6**	**b sépare 4 de 7,8**
π_4	**3**	**4**	**7**	**8**	**0**	**9**	**1**	**2**	**5**	**6**	**b sépare 0 et 9**
π_5	**3**	**4**	**7**	**8**	**0**	**9**	**1**	**2**	**5**	**6**	**c'est fini !**

2 Compilateur d'automates

On désire construire un compilateur d'automates à partir d'expressions régulières. Ce compilateur prend en entrée une expression régulière sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ et produit un automate reconnaissant le langage décrit par l'expression.

Q.2.1. Ecrire une grammaire G non ambiguë des expressions régulières sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ qui respecte les priorités suivantes : l'étoile est prioritaire sur la concaténation qui est prioritaire sur la disjonction.

Correction

Première version de la grammaire, non ambiguë, avec respect des priorités

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & T'|'E|T \\ T & \rightarrow & FT|F \\ F & \rightarrow & G*|G \\ G & \rightarrow & (E)|a|b|c \end{array}$$

Deuxième version de la grammaire, non récursive à gauche, factorisée à gauche et dont les règles sont numérotées.

$$\begin{array}{llcl} 1 & E & \rightarrow & TE' \\ 2 & E' & \rightarrow & '|'E \\ 3 & E' & \rightarrow & \varepsilon \\ 4 & T & \rightarrow & FT' \\ 5 & T' & \rightarrow & T \\ 6 & T' & \rightarrow & \varepsilon \\ 7 & F & \rightarrow & GF' \\ 8 & F' & \rightarrow & * \\ 9 & F' & \rightarrow & \varepsilon \\ 10 & G & \rightarrow & (E) \\ 11 & G & \rightarrow & a \\ 12 & G & \rightarrow & b \\ 13 & G & \rightarrow & c \end{array}$$

Q.2.2. Dessiner l'arbre de dérivation que G associe à l'expression $((a|b)^*(c|d)^*)^*$.

Q.2.3. Calculer les premiers et les suivants des symboles de G.

Correction

Les premiers

$$\begin{array}{lcl} P(G) & = & \{(, a, b, c\} \\ P(F') & = & \{*, \varepsilon\} \\ P(F) & = & \{(, a, b, c\} \\ P(T') & = & \{(, a, b, c, \varepsilon\} \\ P(T) & = & \{(, a, b, c\} \\ P(E') & = & \{\varepsilon, |\} \\ P(E) & = & \{(, a, b, c\} \end{array}$$

Les suivants

$$
\begin{array}{lcl}
S(E) & = & \{\$,)\} \\
S(E') & = & \{\$,)\} \\
S(F) & = & \{(, a, b, c, |, \$,)\} \\
S(T) & = & \{|, \$,)\} \\
S(T') & = & \{|, \$,)\} \\
S(F') & = & \{(, a, b, c, |, \$,)\} \\
S(G) & = & \{*, (, a, b, c, |, \$,)\}
\end{array}
$$

Q.2.4. Construire la table $LL(1)$ correspondant à G. G est elle $LL(1)$? Si ce n'est pas le cas, modifiez la de manière à ce qu'elle le soit.

	a	b	c	(	)	$*$	$\|$	\$
E	1	1	1	1				
E'					3		2	3
T	4	4	4	4				
T'	5	5	5	5	6		6	6
F	7	7	7	7				
F'	9	9	9	9	9	8	9	9
G	11	12	13	10				

Q.2.5. Simuler l'analyseur sur l'entrée $((a|b)^*(c|d)^*)^*$.

$((a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$E\$$	1
$((a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$TE'\$$	4
$((a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$FT'E'\$$	7
$((a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$GF'T'E'\$$	10
$((a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$(E)F'T'E'\$$	
$(a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$E)F'T'E'\$$	$1,4,7,10$
$(a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$(E)F'T'E')F'T'E'\$$	
$a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$E)F'T'E')F'T'E'\$$	$1,4,7,11$
$a\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$aF'T'E')F'T'E')F'T'E'\$$	
$\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$F'T'E')F'T'E')F'T'E'\$$	$9,6,2$
$\mid b)*(c\mid b)*)*\$$	$\mid E)F'T'E')F'T'E'\$$	
$b)*(c\mid b)*)*\$$	$E)F'T'E')F'T'E'\$$	$1,4,7,12$
$b)*(c\mid b)*)*\$$	$bF'T'E')F'T'E')F'T'E'\$$	
$)*(c\mid b)*)*\$$	$F'T'E')F'T'E')F'T'E'\$$	$9,6,3$
$)*(c\mid b)*)*\$$	$)F'T'E')F'T'E'\$$	
$*(c\mid b)*)*\$$	$F'T'E')F'T'E'\$$	8
$*(c\mid b)*)*\$$	$*T'E')F'T'E'\$$	
$(c\mid b)*)*\$$	$T'E')F'T'E'\$$	5
$(c\mid b)*)*\$$	$TE')F'T'E'\$$	4
$(c\mid b)*)*\$$	$FT'E')F'T'E'\$$	7
$(c\mid b)*)*\$$	$GF'T'E')F'T'E'\$$	10
$(c\mid b)*)*\$$	$(E)F'T'E')F'T'E'\$$	
$c\mid b)*)*\$$	$E)F'T'E')F'T'E'\$$	$1,4,7,13$
$c\mid b)*)*\$$	$cF'T'E')F'T'E')F'T'E'\$$	
$\mid b)*)*\$$	$F'T'E')F'T'E')F'T'E'\$$	$9,6,2$
$\mid b)*)*\$$	$\mid E)F'T'E')F'T'E'\$$	
$b)*)*\$$	$E)F'T'E')F'T'E'\$$	$1,4,7,12$
$b)*)*\$$	$bF'T'E')F'T'E')F'T'E'\$$	
$)*)*\$$	$F'T'E')F'T'E')F'T'E'\$$	$9,6,3$
$)*)*\$$	$)F'T'E')F'T'E'\$$	
$*)*\$$	$F'T'E')F'T'E'\$$	8
$*)*\$$	$*T'E')F'T'E'\$$	
$)*\$$	$T'E')F'T'E'\$$	6
$)*\$$	$E')F'T'E'\$$	3
$)*\$$	$)F'T'E'\$$	
$*\$$	$F'T'E'\$$	8
$*\$$	$*T'E'\$$	
$\$$	$T'E'\$$	6
$\$$	$E'\$$	3
$\$$	$\$$	

Q.2.6. On désire maintenant associer des actions sémantiques aux règles de G. Ces actions sémantiques ont pour but de créer les automates correspondant aux expressions régulières que l'on analyse. On suppose que l'on dispose du type `automate` (pour automate) et on définit l'attribut `a` que l'on associe aux différents symboles de la grammaire.

Ecrire les prototypes des fonctions de manipulation d'automates nécessaires pour les actions sémantiques et associer les actions sémantiques aux règles de la grammaire, comme vu en cours.

Correction

– `automate union(automate a1, automate a2)`

retourne l'union de a1 et de a2

- `automate concat(automate a1, automate a2)`
  retourne la concaténation de a1 et de a2

- `automate etoile(automate a)`
  retourne l'étoile de a

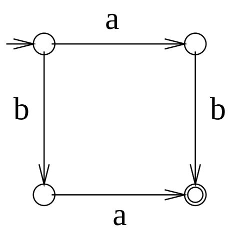
- `automate automate_elem(symbole s)`
  retourne un automate reconnaissant le mot s

regle			***action semantique***		
E	$\rightarrow$	$T'\vert'E$	$E.a$	$=$	$\texttt{union}(T.a, E_1.a)$
E	$\rightarrow$	T	$E.a$	$=$	$T.a$
T	$\rightarrow$	FT	$E.a$	$=$	$\texttt{concat}(F.a, T_1.a)$
T	$\rightarrow$	F	$T.a$	$=$	$F.a$
F	$\rightarrow$	$G*$	$F.a$	$=$	$\texttt{etoile}(G.a)$
F	$\rightarrow$	G	$F.a$	$=$	$G.a$
G	$\rightarrow$	(E)	$G.a$	$=$	$E.a$
G	$\rightarrow$	a	$G.a$	$=$	$\texttt{automate\_elem}('a')$
G	$\rightarrow$	b	$G.a$	$=$	$\texttt{automate\_elem}('b')$
G	$\rightarrow$	c	$G.a$	$=$	$\texttt{automate\_elem}('c')$

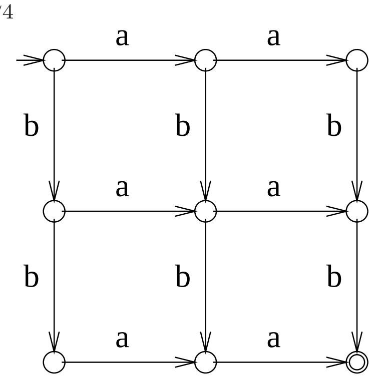
3 Le langage des mots contenant autant de a que de b

Q.3.1. On appelle L_i le langage des mots de longueur i sur l'alphabet $\{a, b\}$ possédant autant de a que de b.

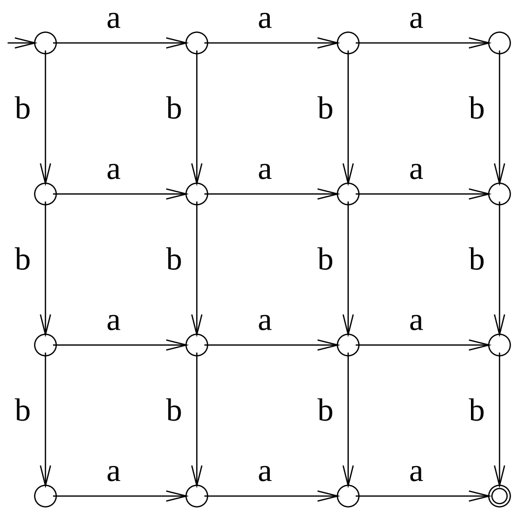
- Dessiner l'automate minimal reconnaissant le langage L_2



- Même question pour L_4



- Même question pour L_6



Q.3.2. Combien d'états comporte l'automate minimal reconnaissant le langage L_{10} ? Même question pour le langage L_{100}

Correction :

L'automate minimal reconnaissant L_i possède $(\frac{i}{2}+1)^2$ états.

Donc l'automate reconnaissant L_{10} possède 36 états et celui qui reconnaît L_{100} en possède 2601.

Q.3.3. Quelle conclusion en tirez vous sur la nature du langage $L = \cup_{i=0}^{\infty} L_i$?

Correction :

L'automate reconnaissant L possédera un nombre infini d'états, L n'est donc pas un langage régulier. On peut montrer que c'est un langage hors-contexte.