PhDays' 2023 - LIS

22 mars 2023

Minimisation de ressources pour les Automates quantitatifs

Yahia Idriss BENALIOUA

Nathan LHOTE et Pierre-Alain REYNIER

Equipe MoVe

Minimisation des registres

Problème :

E : f fonction rationnelle , $k \in \mathbb{N}$

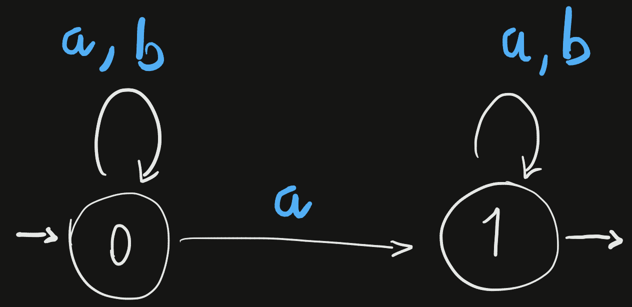
Q : f réalisable par un SST/CRA à k registres ?

???

???

???

Automates

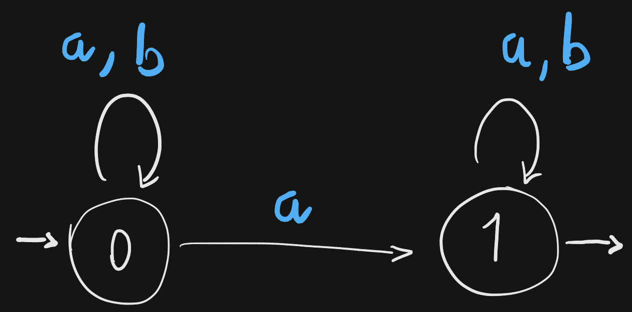


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

a b a : $\to 0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{a} 1 \to$: accepté

b b b : $\to 0 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{b} 0$: rejeté

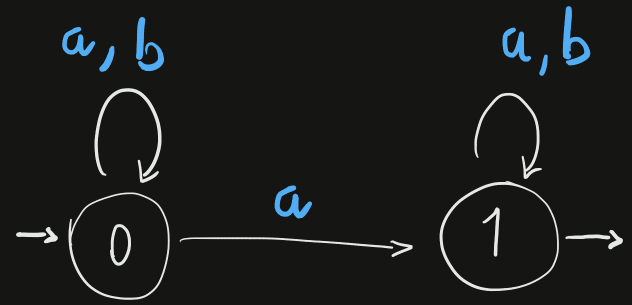
Automates



reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates

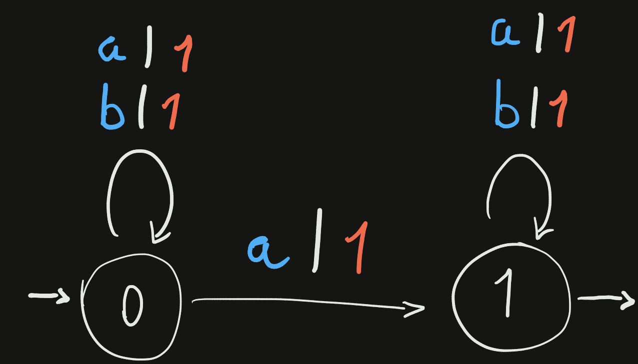


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

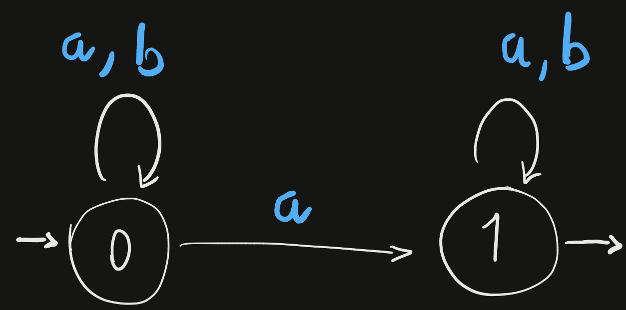
Automates pondérés

sur $(\mathbb{N}, +, \times)$:



réalise la fonction : $u \mapsto |u|_a$

Automates

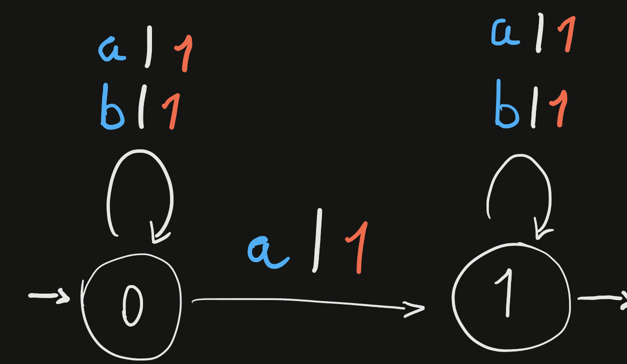


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates pondérés

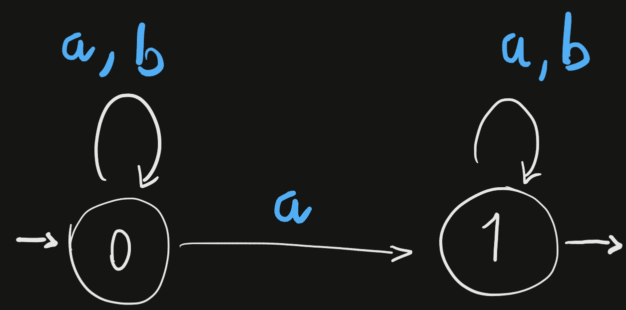
sur $(\mathbb{N}, +, \times)$:



réalise la fonction : $u \mapsto |u|_a$

$a\ b\ a : \omega\left(0 \xrightarrow{a|1} 0 \xrightarrow{b|1} 0 \xrightarrow{a|1} 1\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$

Automates

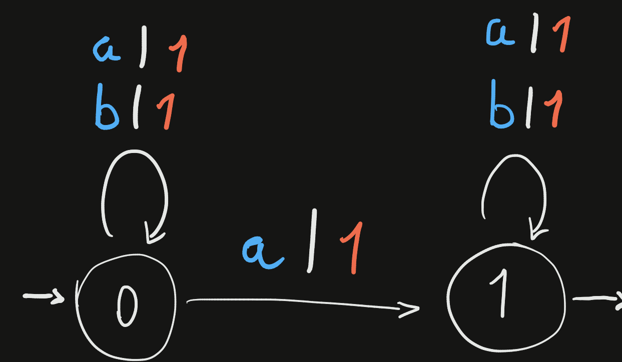


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates pondérés

sur $(\mathbb{N}, +, \times)$:

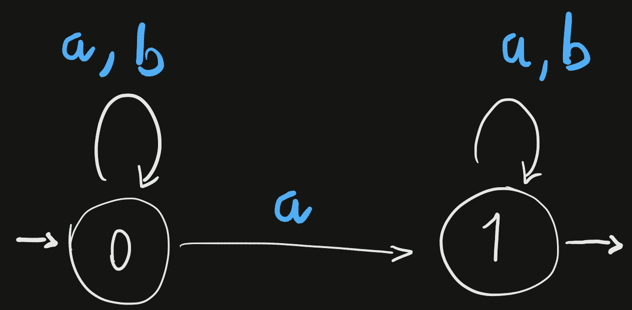


réalise la fonction : $u \mapsto |u|_a$

$$a\,b\,a : \omega\left(0 \xrightarrow{a|1} 0 \xrightarrow{b|1} 0 \xrightarrow{a|1} 1\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\omega\left(0 \xrightarrow{a|1} 1 \xrightarrow{b|1} 1 \xrightarrow{a|1} 1\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Automates

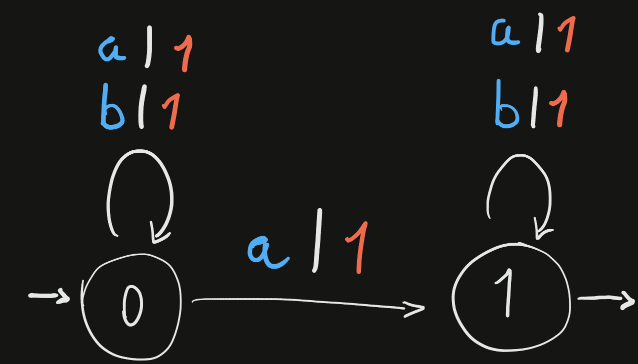


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates pondérés

sur $(\mathbb{N}, +, \times)$:



réalise la fonction : $u \mapsto |u|_a$

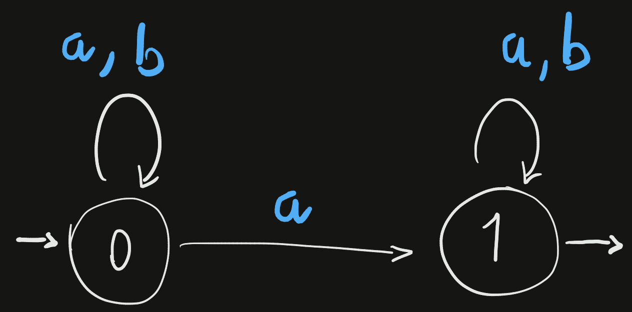
$$a\,b\,a : \; w\left(0 \xrightarrow{a|1} 0 \xrightarrow{b|1} 0 \xrightarrow{a|1} 1\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$+$$

$$w\left(0 \xrightarrow{a|1} 1 \xrightarrow{b|1} 1 \xrightarrow{a|1} 1\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$w(aba) = 2$$

Automates

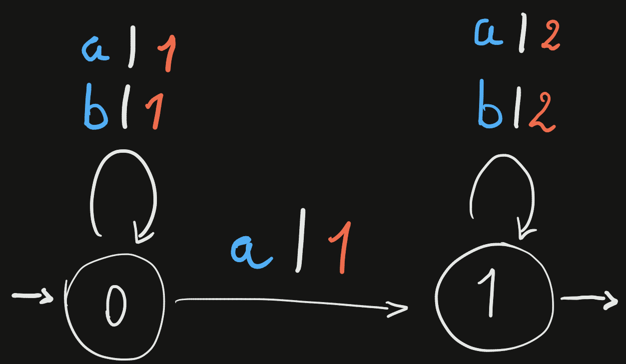


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates pondérés

sur $(\mathbb{N}, +, \times)$:



réalise la fonction : $x_2 \mapsto x_{10}$

$$aba : w\left(0 \xrightarrow{a|1} 0 \xrightarrow{b|1} 0 \xrightarrow{a|1} 1\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

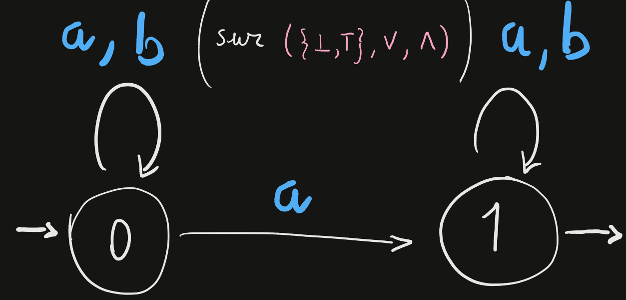
$$+$$

$$w\left(0 \xrightarrow{a|1} 1 \xrightarrow{b|2} 1 \xrightarrow{a|2} 1\right) = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

$$w(aba) = 5$$

Automates booléens

(sur $(\{\bot, \top\}, \vee, \wedge)$)

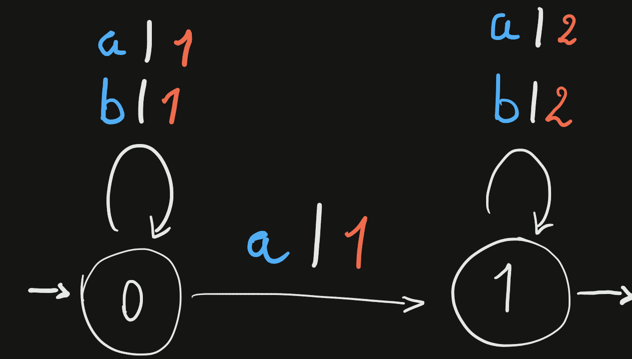


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates pondérés

sur $(\mathbb{N}, +, \times)$:



réalise la fonction : $x_2 \mapsto x_{10}$

$$a\,b\,a : \quad w\left(0 \xrightarrow{a|1} 0 \xrightarrow{b|1} 0 \xrightarrow{a|1} 1\right) = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

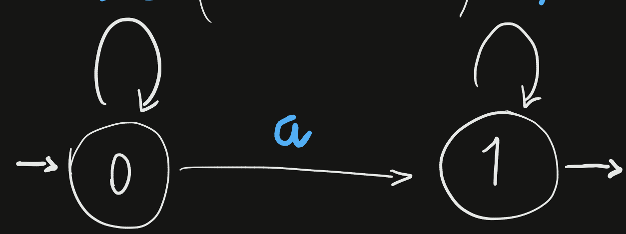
$$+$$

$$w\left(0 \xrightarrow{a|1} 1 \xrightarrow{b|2} 1 \xrightarrow{a|2} 1\right) = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

$$w(aba) = 5$$

Automates booléens

(sur $(\{\bot, \top\}, \vee, \wedge)$)

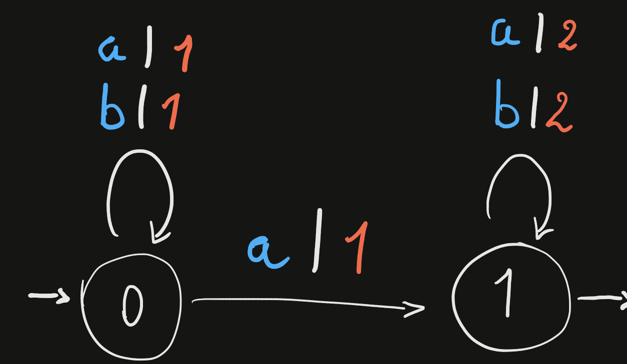


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates pondérés

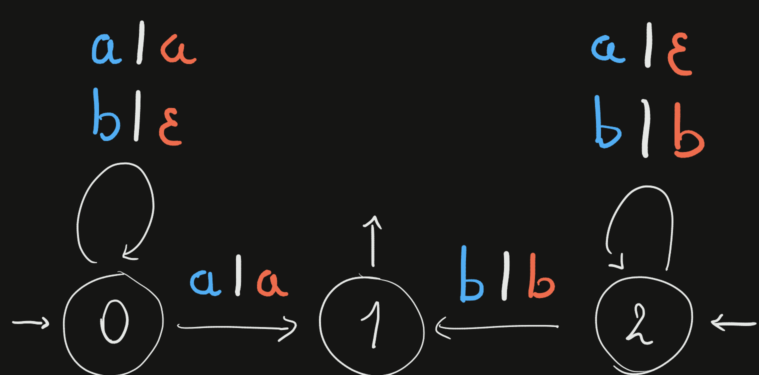
sur $(\mathbb{N}, +, \times)$:



réalise la fonction : $x_2 \mapsto x_{10}$

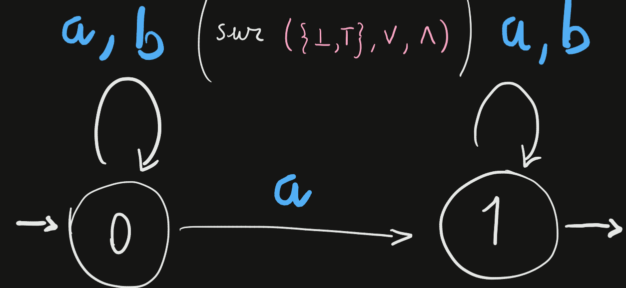
Transducteurs

(sur $(\Sigma^*, \cdot)$)



Automates booléens

(sur $(\{\perp,\top\},\vee,\wedge)$)

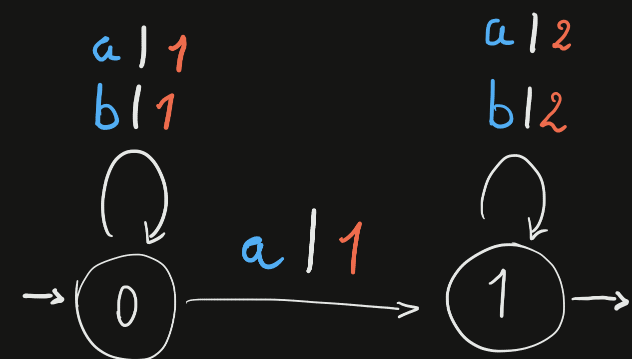


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates pondérés

sur $(\mathbb{N},+,\times)$:

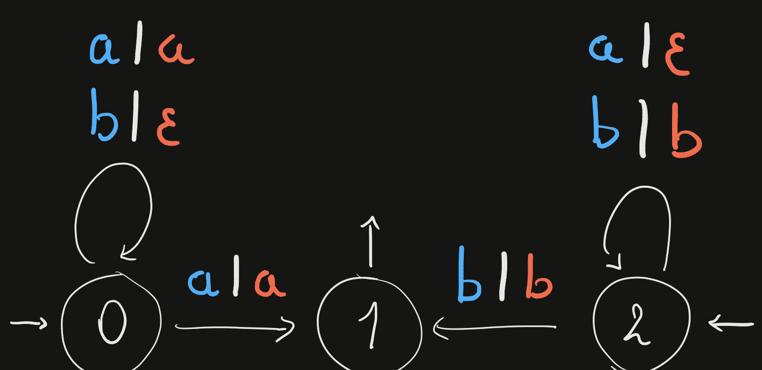


réalise la fonction : $x_2 \mapsto x_{10}$

Fonctions rationnelles

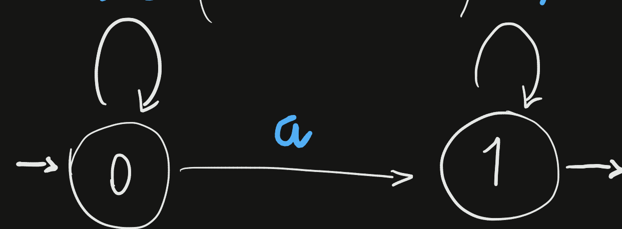
Transducteurs

(sur $(\Sigma^*,\cdot)$)



Automates booléens

(sur $(\{\bot, \top\}, \vee, \wedge)$)

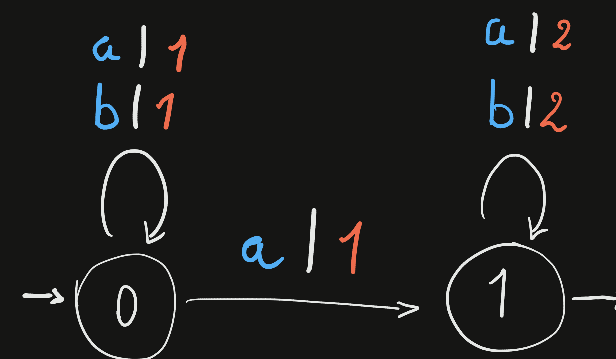


reconnais le langage : $\Sigma^* a \Sigma^*$

Langages réguliers

Automates pondérés

sur $(\mathbb{N}, +, \times)$:

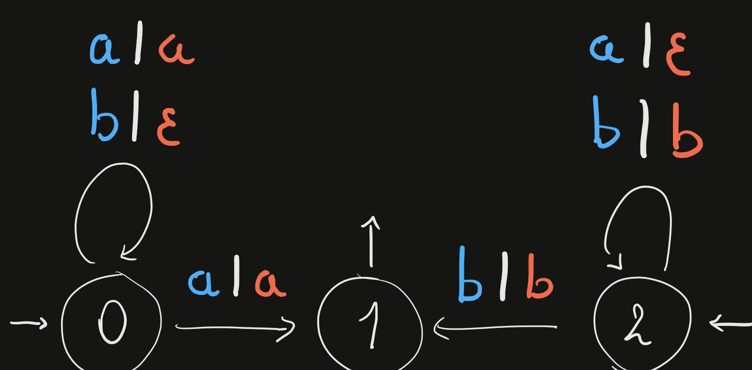


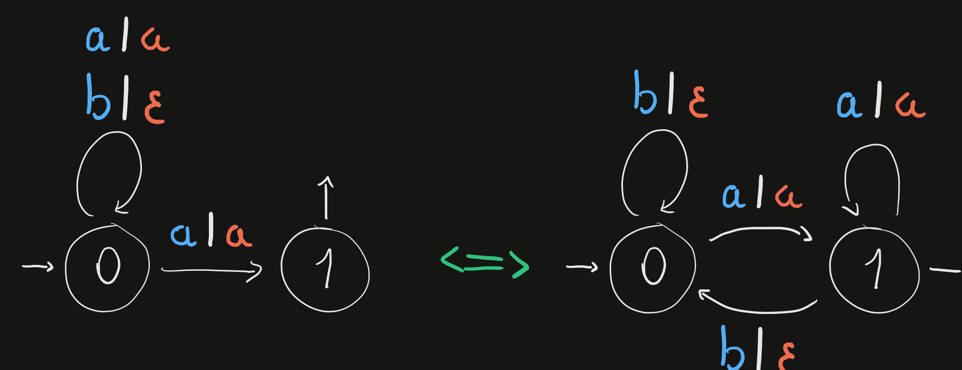
réalise la fonction : $x_2 \mapsto x_{10}$

Fonctions rationnelles

Transducteurs

(sur $(\Sigma^*, \cdot)$)



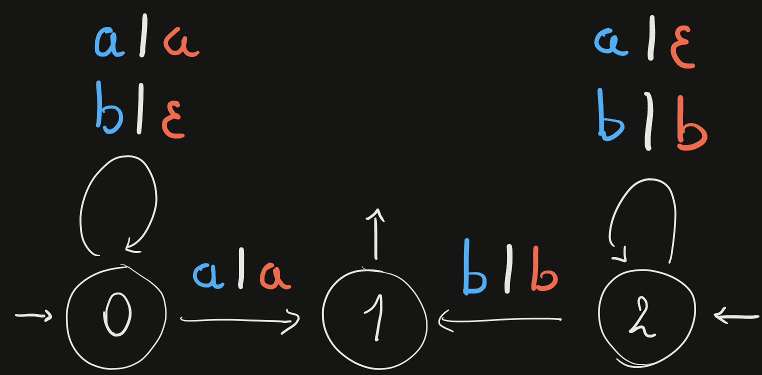


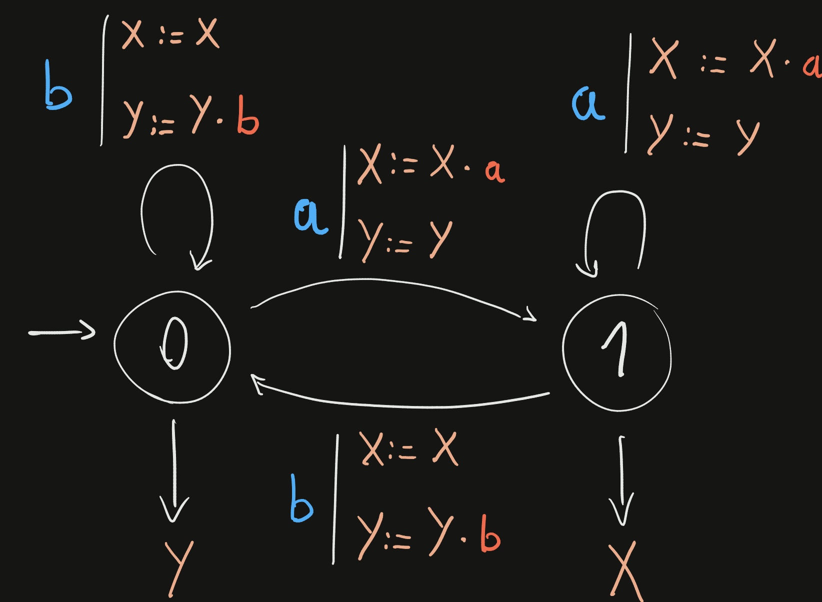
Fonctions séquentielles

Transducteurs à registres

(Streaming String Transducers)

(SST)

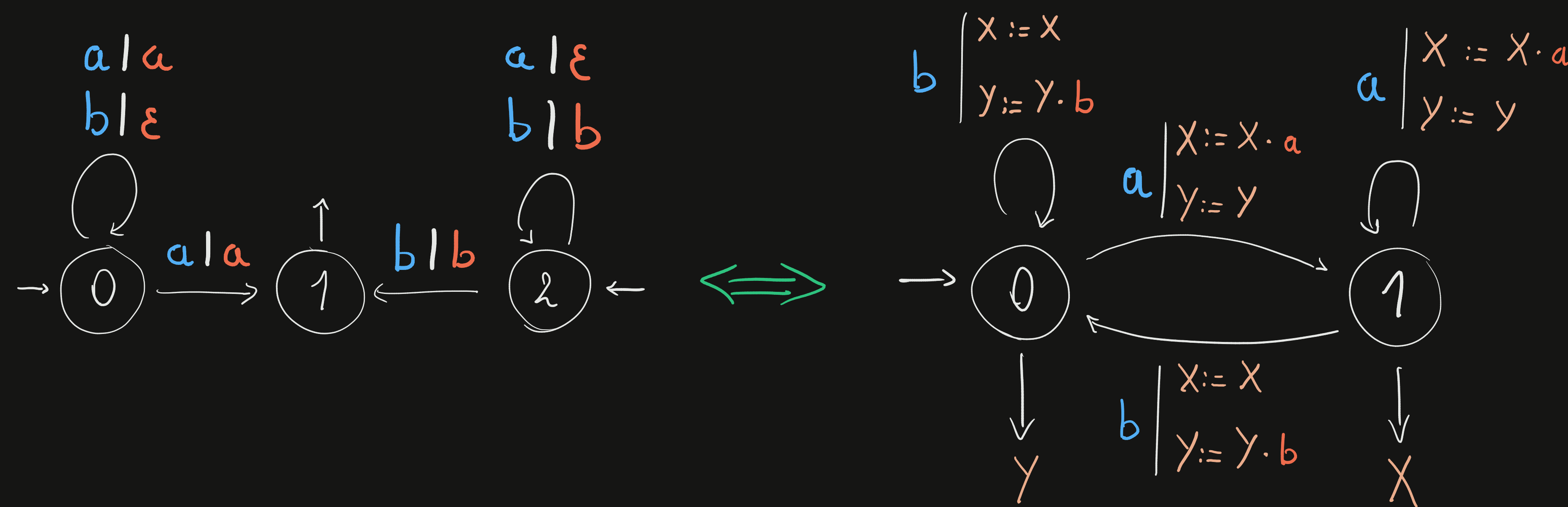




Transducteurs à registres

(Streaming String Transducers)

(SST)



$aba : \;\to 0$

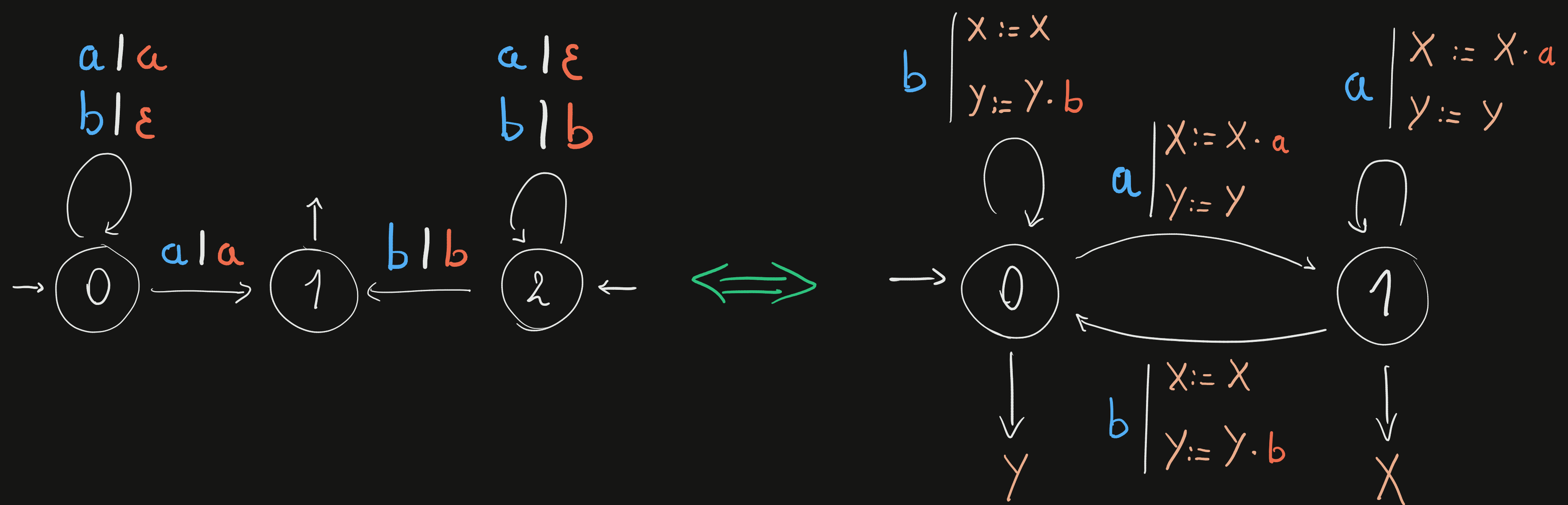
$X = \varepsilon$

$Y = \varepsilon$

Transducteurs à registres

(Streaming String Transducers)

(SST)



$a\,b\,a$: $\rightarrow 0 \xrightarrow{a} 1$

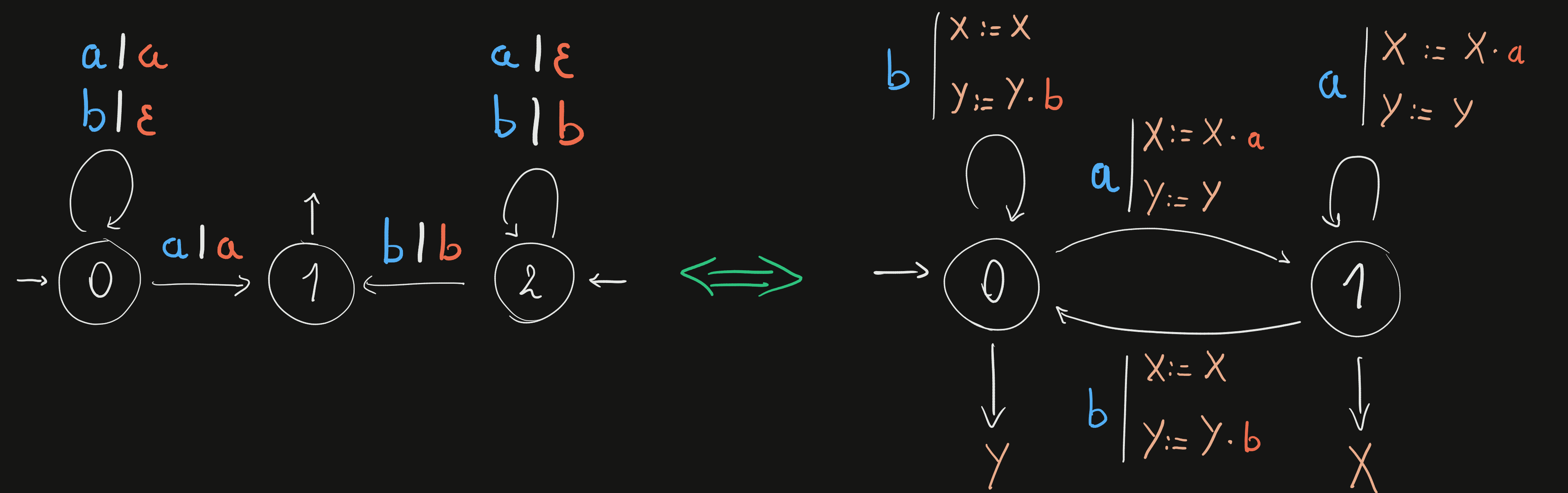
$X = \varepsilon \longrightarrow a$

$Y = \varepsilon \longrightarrow \varepsilon$

Transducteurs à registres

(Streaming String Transducers)

(SST)



aba : $\rightarrow 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 0$

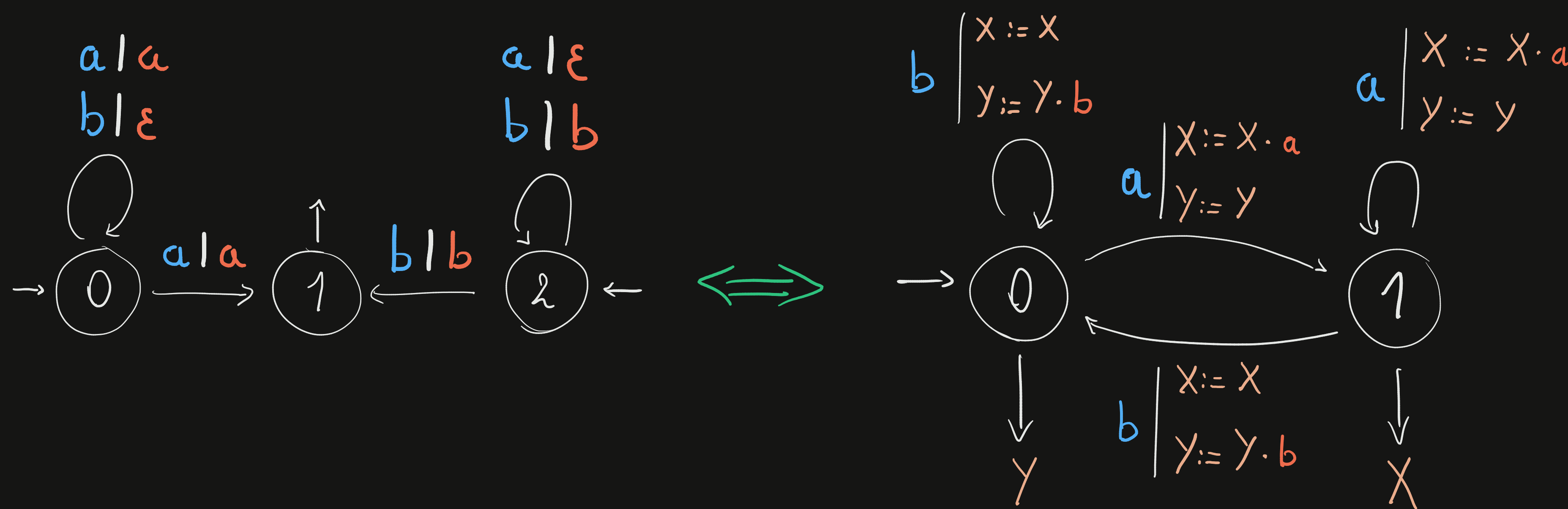
$X = \varepsilon \longrightarrow a \longrightarrow a$

$Y = \varepsilon \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow b$

Transducteurs à registres

(Streaming String Transducers)

(SST)



aba : $\rightarrow 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{a} 1$

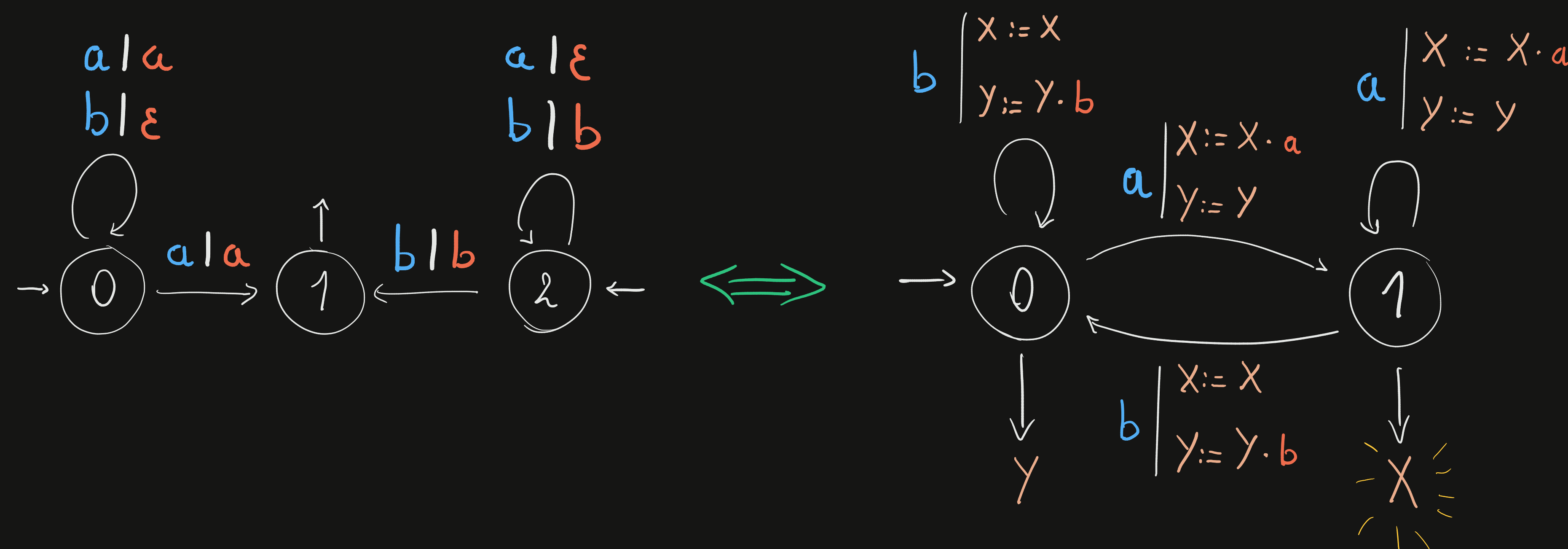
$X = \varepsilon \longrightarrow a \longrightarrow a \longrightarrow aa$

$Y = \varepsilon \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow b \longrightarrow b$

Transducteurs à registres

(Streaming String Transducers)

(SST)



$$aba : \to 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{a} 1 \to$$

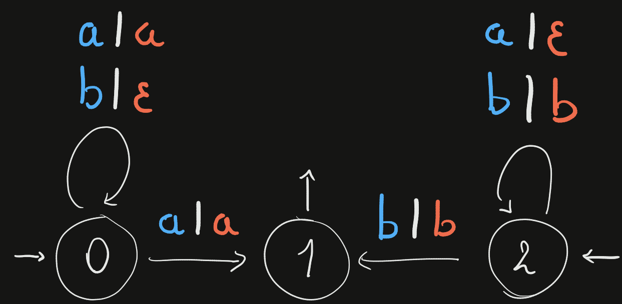
$$X = \varepsilon \longrightarrow a \longrightarrow a \longrightarrow aa \qquad aba \longmapsto aa$$

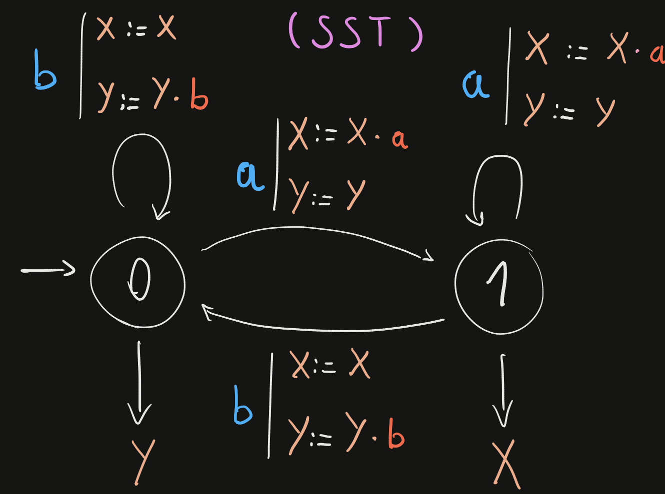
$$Y = \varepsilon \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow b \longrightarrow b$$

Transducteurs à registres

(Streaming String Transducers)

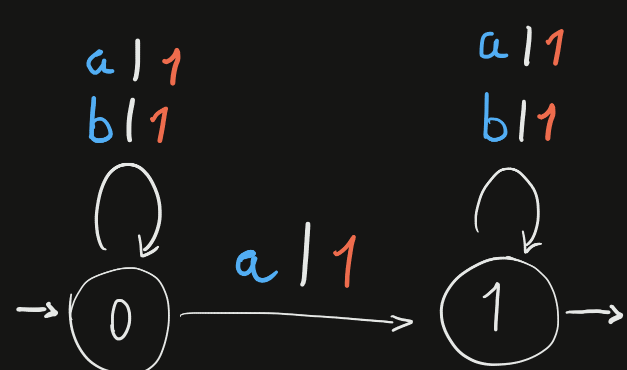
(SST)

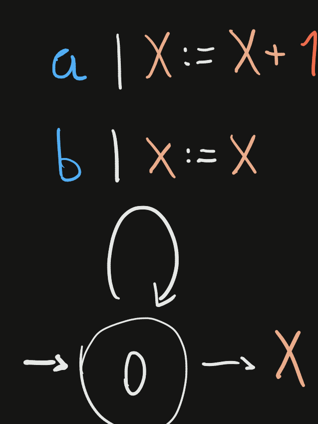


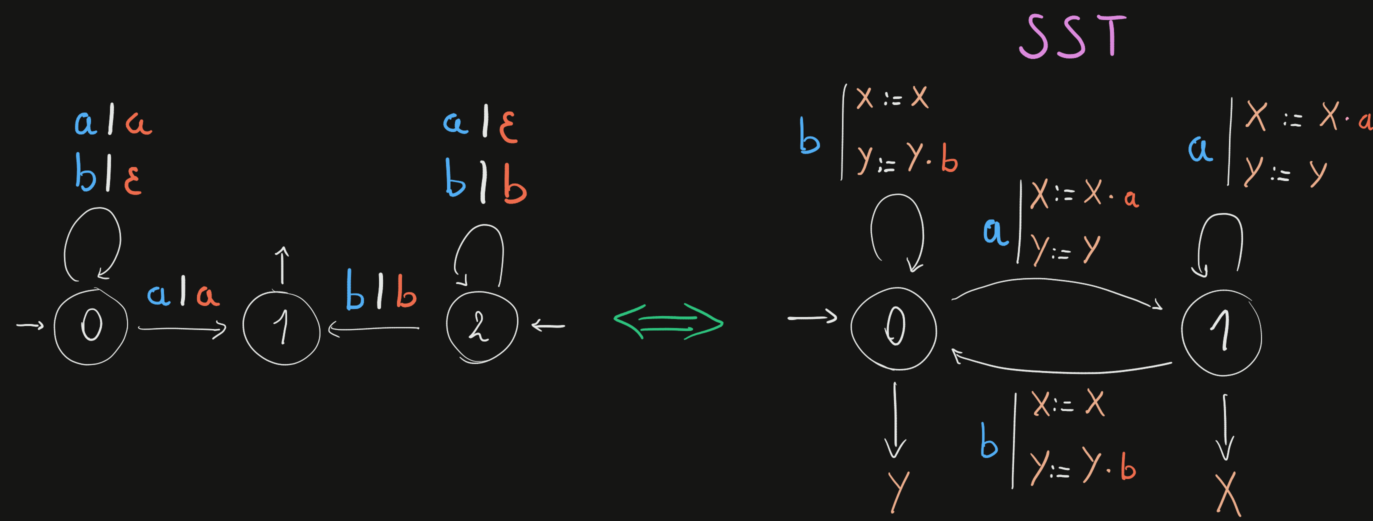


Cost Register Automata

(CRA)





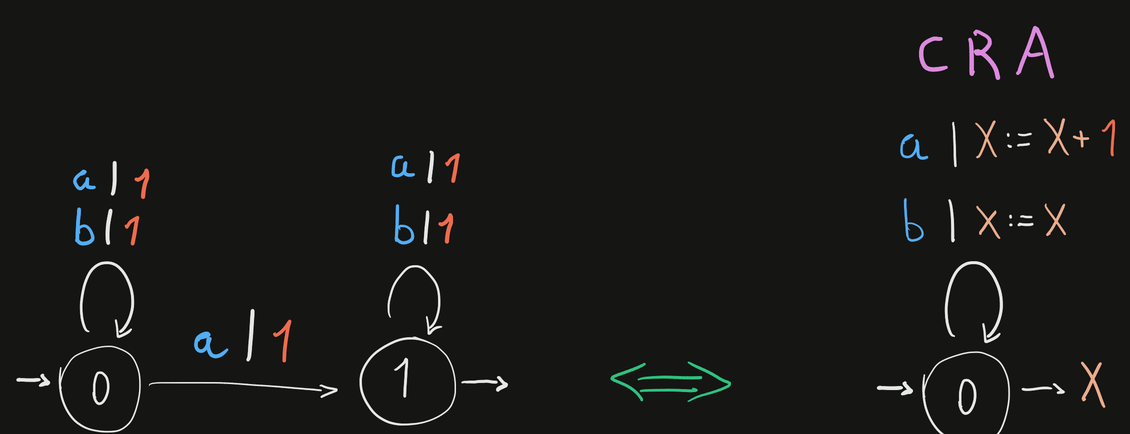


Minimisation des registres

Problème :

E : f fonction rationnelle , $K \in \mathbb{N}$

Q : f réalisable par un SST/CRA à K registres ?



Machine

Automate fini

Logique

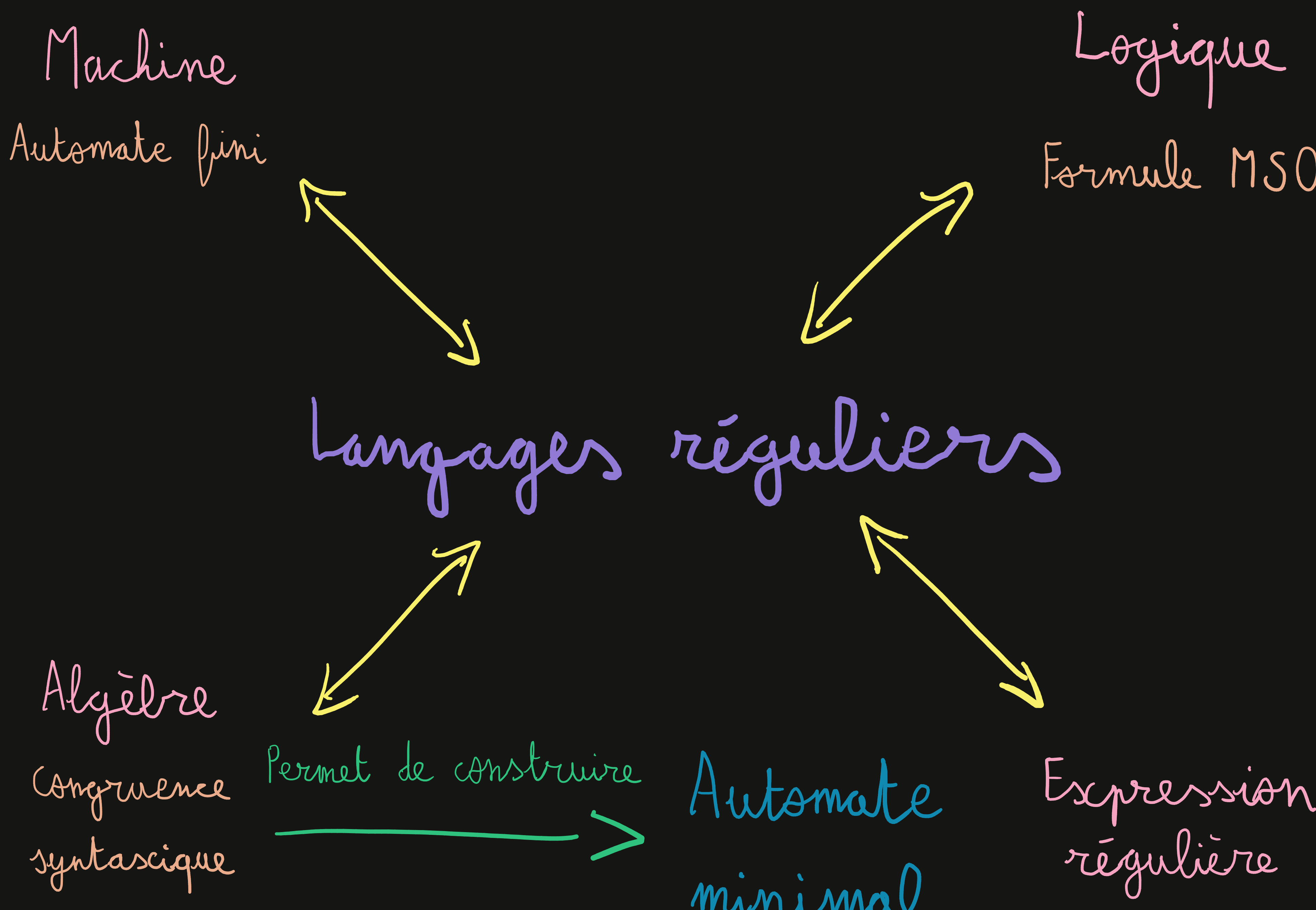
Formule MSO

Langages réguliers

Algèbre

Congruence syntaxique

Expression régulière



Machine
Automate fini
Logique
Formule MSO
Langages réguliers
Algèbre
Congruence
syntascique
Permet de construire
Automate
minimal
Expression
régulière

Machine

Transducteur

$\updownarrow$

Fonctions rationnelles

(sur les mots)

$\updownarrow$

Algèbre

Congruence

syntascique

droite / gauche

Machine

Transducteur

Fonctions rationnelles

(sur les mots)

Algèbre

Congruence

syntascique

droite / gauche

Permet de construire

Bimachine

minimale

Machine

Transducteur

$\Updownarrow$

Fonctions rationnelles

(sur les mots)

$\Updownarrow$

Algèbre

Congruence

syntaxique

droite / gauche

Permet de construire $\longrightarrow$ Bimachine minimale

Bimachine $\simeq$ SST

(d'une certaine classe ...)

$\Downarrow$

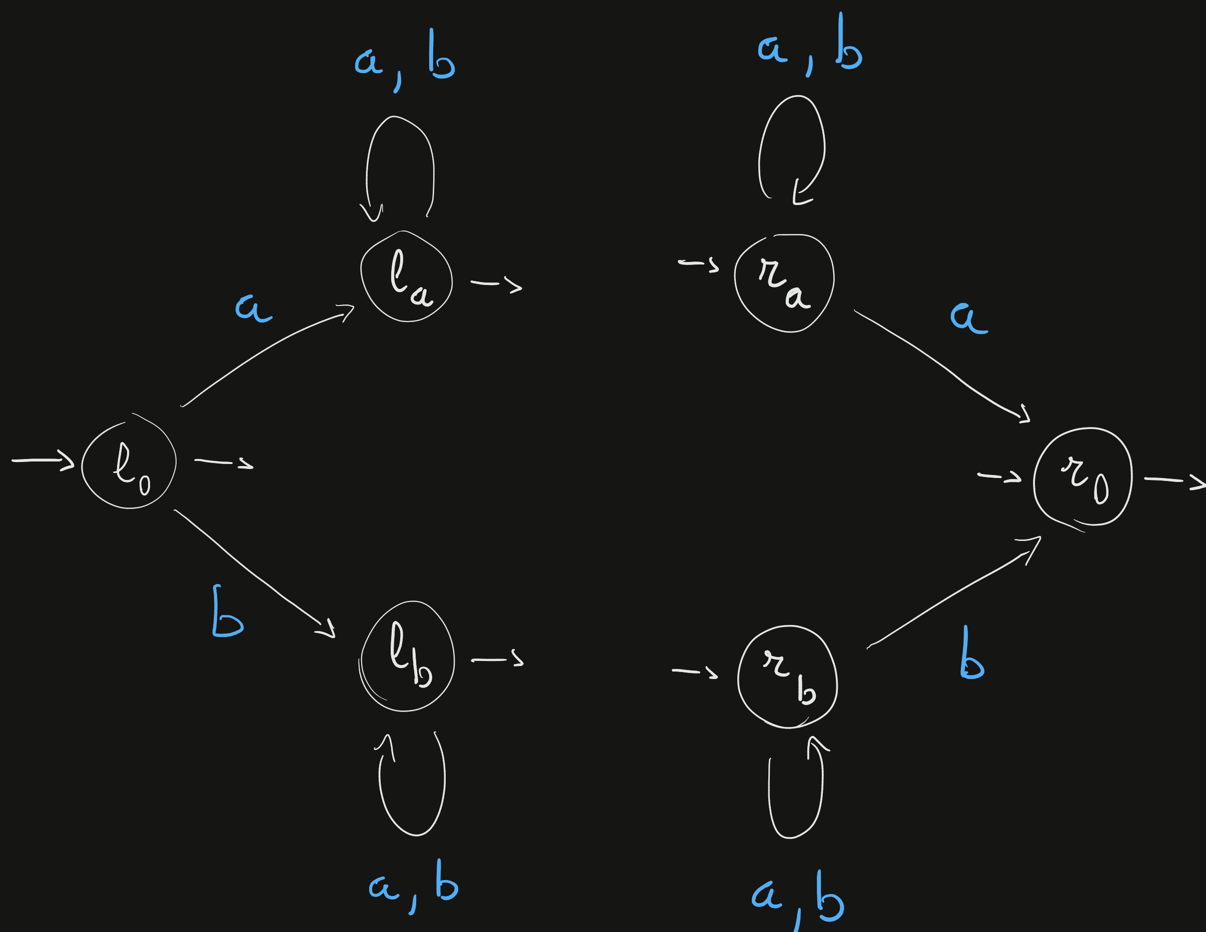
Résolution du problème

de la

minimisation des registres

Merci pour votre attention

Bimachine



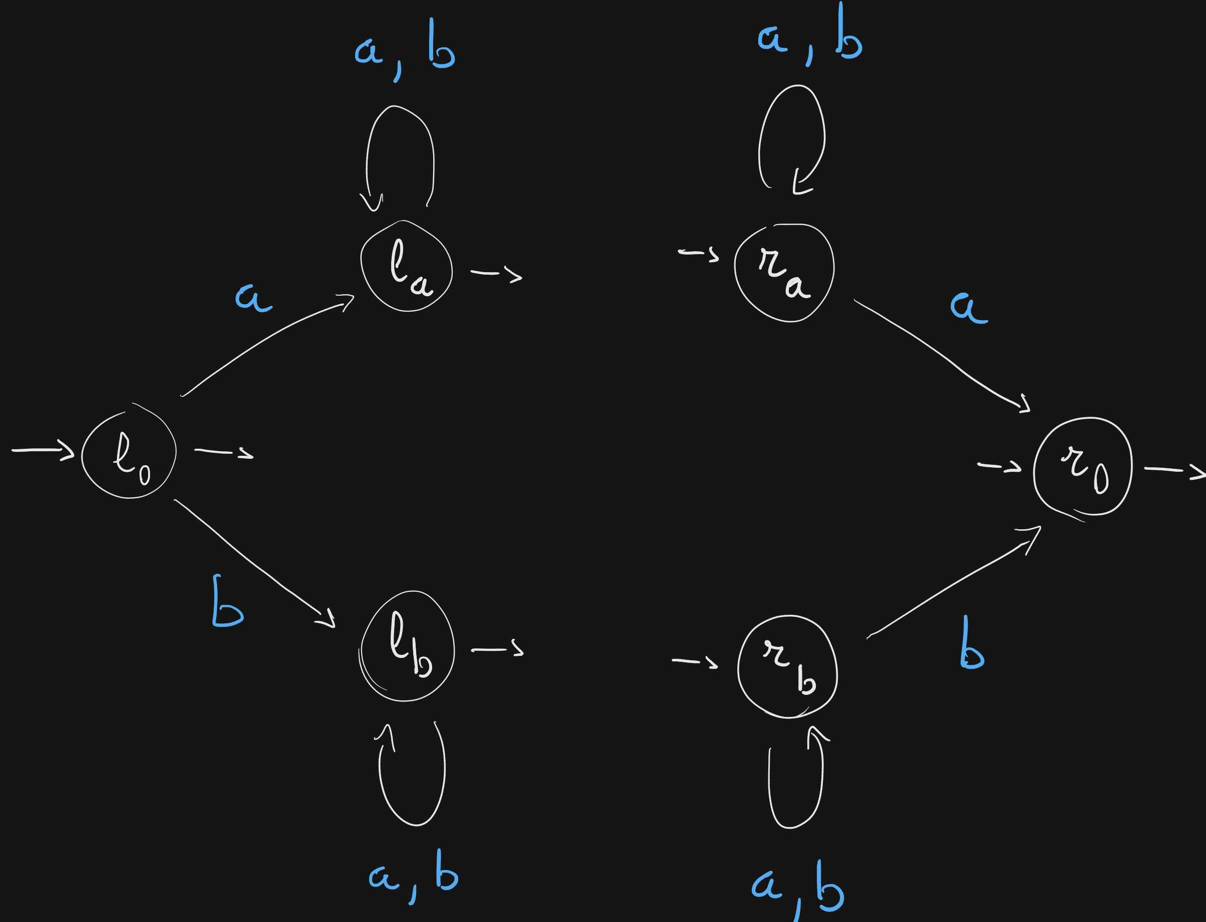
$w(\ell, \sigma, r) = \sigma$ si $\ell \neq \ell_0$ et $r \neq r_0$

$w(\ell_0, \sigma, r_\tau) = \tau$

$w(\ell_\tau, \sigma, r_0) = \tau$

réalise la fonction : $\sigma u \tau \mapsto \tau u \sigma$

Bimachine



$w(\ell, \sigma, r) = \sigma$ si $\ell \neq \ell_0$ et $r \neq r_0$

$w(\ell_0, \sigma, r_\tau) = \tau$

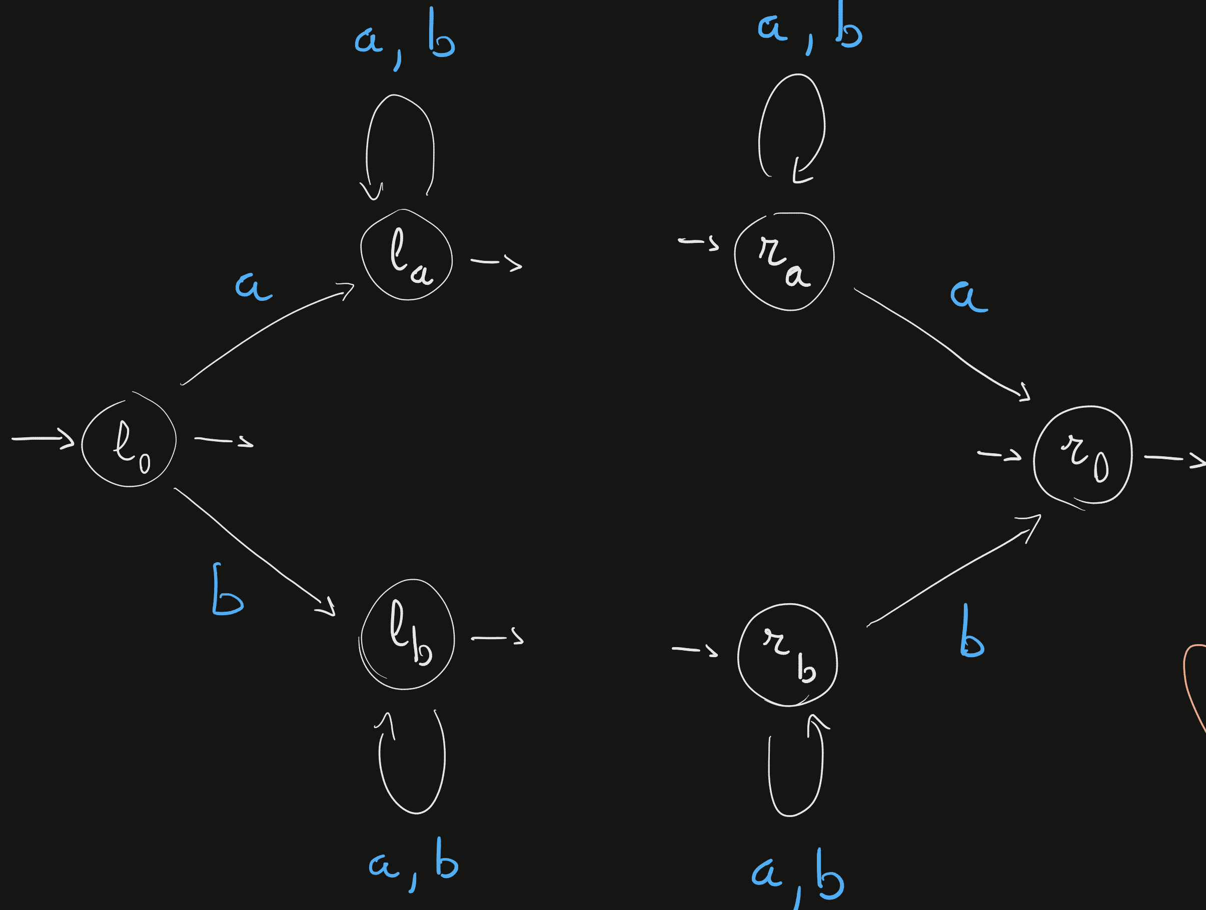
$w(\ell_\tau, \sigma, r_0) = \tau$

$\ell_0 \xrightarrow[a]{} \ell_a \xrightarrow[a]{} \ell_a \xrightarrow[b]{} \ell_a \xrightarrow[b]{} \ell_a$

$r_b \to r_b \to r_b \to r_b \to r_0$

réalise la fonction : $\sigma u \tau \mapsto \tau u \sigma$

Bimachine

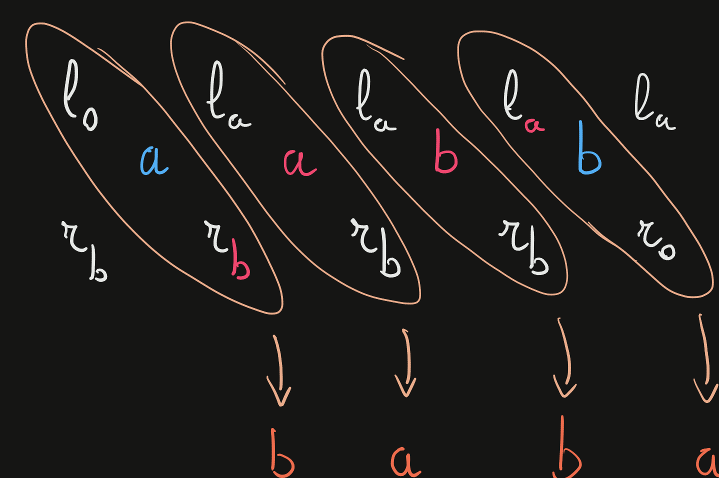


$$w(\ell, \sigma, r) = \sigma \quad \text{si } \begin{matrix} \ell \neq \ell_0 \\ \text{et} \\ r \neq r_0 \end{matrix}$$

$$w(\ell_0, \sigma, r_\tau) = \tau$$

$$w(\ell_\tau, \sigma, r_0) = \tau$$

réalise la fonction : $\sigma u \tau \mapsto \tau u \sigma$



$a\,a\,b\,a \mapsto b\,a\,b\,a$