Déf : une stratégie σ est dite positionnelle si $\sigma(\pi)$ ne dépend que du dernier sommet apparaissant dans π.

On définit les stratégies positionnelles par des fonctions

$$\sigma : V_{Eve} \longrightarrow E$$

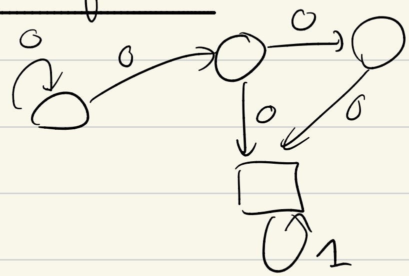
telles que pour tout $v \in V_{Eve}$,

$$\sigma(v) = v \xrightarrow{c} v'$$

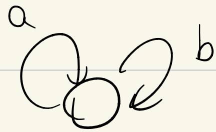
même sommet v.

Exemple 1 :

objectif : "voir un 1"



ici, Eve gagne avec une strat. positionnelle



Exemple 2 :

Objectif : "alterner a et b".

Ici, Eve gagne, mais les strat. positionnelles sont perdantes.

Def : un objectif est **positionnel** (pour Eve) si pour tout jeu avec cet objectif, si Eve gagne alors elle gagne avec une stratégie positionnelle.

Exemples : • "alterner a et b" n'est pas positionnel.

(C'est mémoire 2. Pour aller + loin, trouver objectif qui n'a pas mémoire finie.)

- accessibilité : "voir un 1"
- sécurité : "ne pas voir de 1"
- Büchi : "voir une infinité de 1"
- Cobüchi : "voir un nb fini de 1"
- Parité : "le plus grand nb apparaîssant ∞ est pair"

→ positionnels (Cf suite du cours)

Les objectifs positionnels sont intéressants car on peut facilement représenter les stratégies.

II. Jeux d'accessibilité et de sécurité.

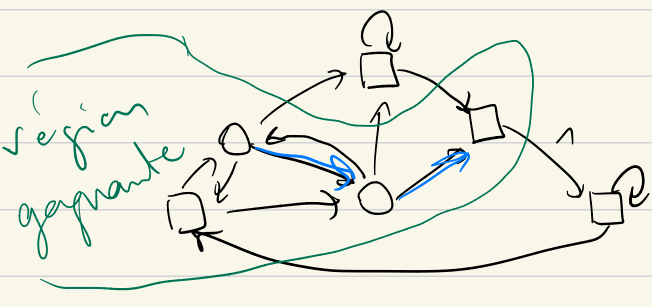
1) Définitions.

Def: un jeu d'accessibilité est un jeu avec objectif "voir un 1".

Def: un jeu de sécurité est un jeu avec objectif "ne pas voir un 1".

Remarque: si Eve joue un jeu d'accessibilité, alors Adam joue un jeu de sécurité et vice-versa.

Exemples : • cf plus tôt.



convention : $\xrightarrow{\circ} = \longrightarrow$.

on peut dessiner les strat. positionnelles :)

2) Résolution des jeux d'accessibilité

Idée : partir des 1 et propager la région gagnante vers l'arrière.

On définit L_0 par

$$L_0 = \left\{ v \in V_{Eve} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il existe une} \\ \text{arête sortante} \\ \text{avec un } 1 \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ v \in V_{Adam} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{toutes les arêtes} \\ \text{sortantes ont un } 1 \end{array} \right\}.$$

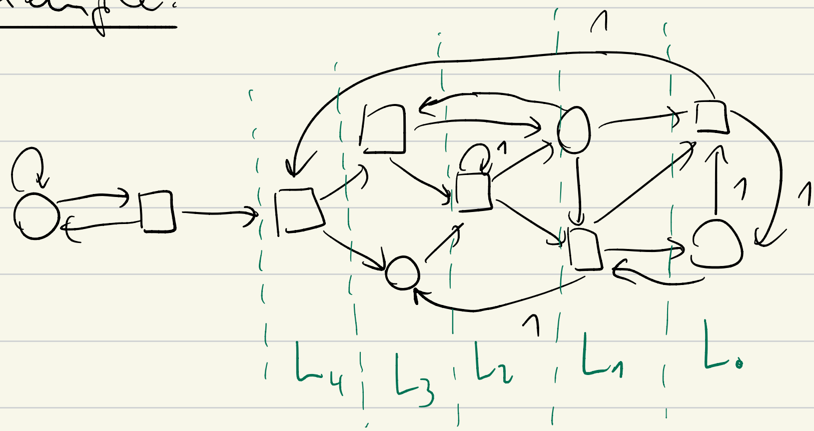
Ce sont les sommets où Eve peut gagner immédiatement.

Puis par induction :

$$L_{i+1} = \left\{ v \in V_{Eve} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il existe arête sortante} \\ \text{vers } L_j,\ j \leq i \text{ ou avec } 1 \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ v \in V_{Adam} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{toute arête sortante va vers} \\ L_j \text{ pour } j \leq i, \text{ ou a un } 1 \end{array} \right\}.$$

Exemple:



Théorème: La région gagnante pour Ève est

$$L = \bigcup_i L_i .$$

De plus, on a des strat. positionnelles pour Ève et pour Adam.

Preuve: deux étapes. D'abord, montrer par induction sur i que les sommets de L sont gagnants. Au passage, positionalité pour Ève.

Ensuite, montrer que les sommets

pas dans L sont gagnants pour Adam, avec strat. positionnelle.

Étape 1 : Par induction sur i.

- $i = 0$. Pour $v \in V_{Eve}$, il suffit de prendre $\sigma(v) = v \xrightarrow{1} v'$ (qui existe par définition). Pour $v \in V_{Adam}$, toutes les arêtes sortantes sont des 1, donc Eve gagne immédiatement.

hypothèse d'induction

- Supposons que pour tout $j \leq i$, Eve gagne positionnellement sur L_j. On montre que c'est aussi le cas pour L_i.

Pour $v \in V_{Eve}$, on prend $\sigma(v) = v \longrightarrow L_j$, ($j \leq i$) qui existe par définition. Cela assure de gagner par hypothèse d'induction.

Pour $v \in V_{Adam}$, toutes les arêtes vont vers

$\bigcup_{j<i} L_j$, donc on conclut grâce à l'hypothèse d'induction.

La stratégie construite σ assure que sur tout chemin consistent, i décroît à chaque étape jusqu'à atteindre L_0 et gagner.

<u>Étape 2</u> : Soit $v \notin L$, càd $v \in {}^cL$.
On cherche à construire une strat. positionnelle τ pour Adam.

- si $v \in V_{Adam}$. Alors par définition, il existe une arête avec un $\bigcirc$ qui va vers ${}^cL$, car sinon on aurait $v \in L$. On pose $\tau(v) =$ une telle arête.

- Si $v \in V_{Eve}$. Alors toute arête sortante va vers ${}^cL$.

La stratégie construite τ assure que pour tout chemin consistant, on reste dans ${}^cL$ et on ne voit jamais de 1. $\square$.

Remarque : Pour Adam (jeu de sécurité), la stratégie gagnante est très simple : il suffit de rester dans sa région gagnante en prenant des arêtes 0.

2) Algorithme de résolution

On implémente les idées d'au dessus.

Remarque : on utilise pas les "Layers L_i", mais les idées sont similaires.

n = nb de sommets $\qquad$ m = nb d'arêtes $= \mathcal{O}(n^2)$

Algorithme 1 (naïf) :

- $L \leftarrow \emptyset$
- Tant qu'il existe
  $v \in V_{Eve}$ avec une arête vers L ou avec 1
  ou bien
  $v \in V_{Adam}$ dont toutes les arêtes vont vers L ou ont un 1 :
  - prendre un tel v
  - $L = L \cup \{v\}$.
- retourner L. (région gagnante pour Eve).

Complexité : $O(nm)$.

Idées : 1) backtrack via prédecesseurs
2) pour les sommets d'Adam, compter les arêtes qui vont vers $^c L$

Algorithme 2 (optimal)

Complexité $O(m)$

- $L \leftarrow \emptyset$.
- $Q \leftarrow \emptyset$.
- Pour tout $v \in V_{Eve}$:
  - Si il existe arête $v \xrightarrow{1} v'$:
    - $Q \leftarrow Q \cup \{v\}$.
- Pour tout $v \in V_{Adam}$:
  - $NbLibertés[v] = \#$ arêtes sortantes 0.
  - Si $NbLibertés[v] = 0$:
    - $Q \leftarrow Q \cup \{v\}$.
- Tant que $Q \neq \emptyset$:
  - $v = Q.pop$.
  - $L = L \cup \{v\}$
  - Pour tout 0-prédecesseur u de v :
    - Si $u \in V_{Eve}$:
      - $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$
    - Si $u \in V_{Adam}$:
      - $NbLibertés[u] = NbLibertés[u] - 1$
      - Si $NbLibertés[u] = 0$
        - $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$.

3) Attracteurs et pièges.

Def: Soit G un jeu et S un ensemble de sommets ou d'arêtes. L'**attracteur par Eve vers S** est la région gagnante pour l'objectif "voir un sommet ou une arête de S". La **stratégie d'attracteur** vers S est la stratégie positionnelle associée. Idem pour Adam.

Notation: $Attr_{\bigcirc}(S)$ ou même $Attr^G_{\bigcirc}(S)$

idem: $Attr_{\Box}(S)$ ou $Attr^G_{\Box}(S)$.

Théorème: il existe un algorithme en temps $O(m)$ pour calculer les attracteurs et les stratégies associées.

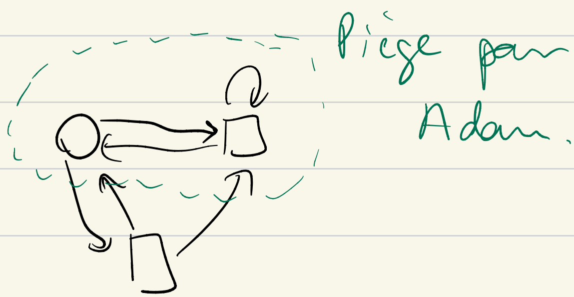
Preuve: cf section précédente.

Déf : un <u>piège pour Adam</u> est un ensemble de sommets $P \subseteq V$ tel que

- $\forall v \in P \cap V_{Eve}$, $\exists v \longrightarrow P$.
- $\forall v \in P \cap V_{Adam}$, $\forall v \longrightarrow v'$, $v' \in P$.

Idem piège pour Eve.

Exemple :



Lemme : Soit G un jeu et P un piège pour Adam. Supposons qu'Eve gagne dans le jeu restreint à P depuis tous les sommets de P. Alors elle gagne aussi dans G depuis tous les sommets de P, autrement dit

$$P \subseteq \text{région gagnante}.$$

<u>Preuve:</u> Soit σ_P une stratégie gagnante pour Eve dans le jeu restreint à P. On étend σ_P de manière arbitraire au reste du jeu, cela donne une stratégie σ. On montre par induction facile que les chemins commençant dans P et consistents avec σ restent dans P et sont consistents avec σ_P (car P est un piège pour Adam). Ces chemins satisfont donc l'objectif, d'où le résultat. $\square$

Ainsi, quand on a un piège P pour Adam, il suffit de résoudre le jeu restreint à P. Idem avec un piège pour Eve. On va souvent se servir de cette technique, notamment en combinaison avec le lemme suivant.

Lemme: le complémentaire d'un attracteur pour Eve est un piège pour Eve. De même, le complémentaire d'un attracteur pour Adam est un piège pour Adam.

Preuve: Soit A un attracteur pour Eve, on cherche à montrer que ${}^cA$ est un piège pour Eve.

- Soit $v \in V_{Adam} \cap {}^cA$. Si toutes les arêtes sortantes de v allaient vers A, v serait dans l'attracteur. Donc v a une arête vers ${}^cA$.

- Soit $v \in V_{Eve} \cap {}^cA$. Si v avait une arête vers A alors v serait dans l'attracteur. Donc toutes les arêtes de v vont vers ${}^cA$.

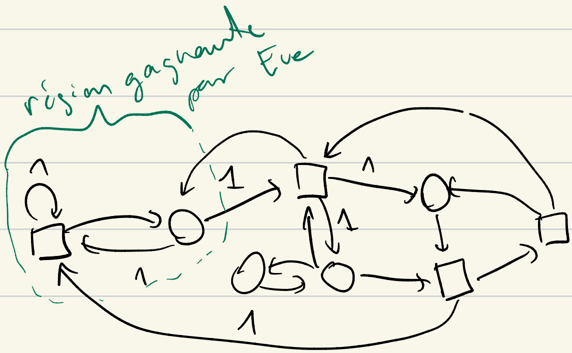
Remarque: c'est la deuxième étape de la preuve du Thm sur les jeux d'accessibilité.

III. Jeux de Büchi.

1) Définition.

Def: un jeu de Büchi est un jeu dont l'objectif est "voir un 1 infiniment souvent".

Exemple:



2) Résolution des jeux de Büchi.

Soit S_0 le complémentaire de l'attracteur de Eve vers les 1. Autrement dit, S_0 est la région gagnante pour Adam pour l'objectif "ne pas voir de 1".

*: positionnellement.

Lemme : si S_0 est vide, alors Eve gagne * le jeu de Büchi depuis tous les sommets.

Preuve : Supposons $S_0 = \emptyset$. Cela veut dire que depuis n'importe quel sommet, Eve peut assurer de voir un 1 avec la stratégie positionnelle d'attracteur vers les 1. Donc cette même stratégie gagne aussi pour l'objectif de Büchi. $\square$

Supposons maintenant que S_0 est non vide. Notons que Adam gagne le jeu de Büchi restreint à S_0 avec une stratégie positionnelle. Comme S_0 est un piège pour Eve, Adam gagne le jeu de Büchi depuis tous les sommets de S_0.

On pose donc

$$A_0 = Attr_{\square}^{G}(S_0)$$

et $$G_1 = G \setminus A_0,$$

"privé de".

c'est-à-dire que G_1 est le jeu de Büchi obtenu après avoir retiré A_0.

Ensuite, on pose

$$S_1 = G_1 \setminus Attr_{\bigcirc}^{G_1}(\overset{\frown}{\longrightarrow}),$$

c'est-à-dire que S_1 est la zone dans G_1 où Adam peut éviter de voir un 1,

puis

$$A_1 = Attr_{\square}^{G_1}(S_1)$$

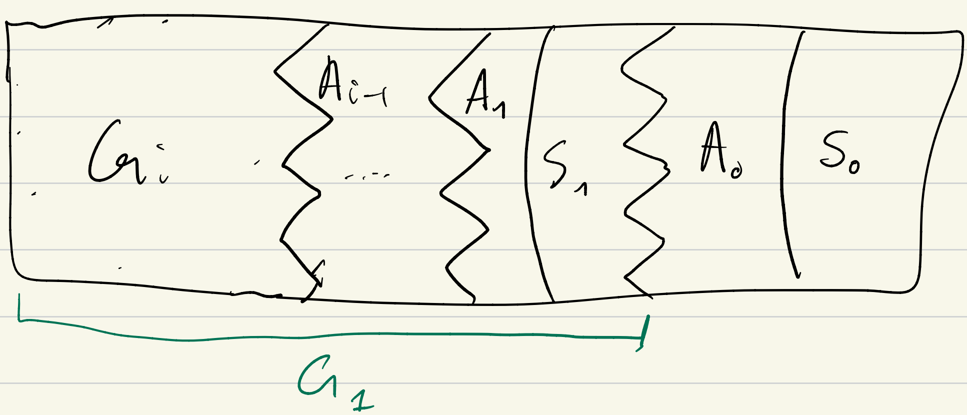
et $$G_2 = G_1 \setminus A_1.$$

Et ainsi de suite : pour tout i,

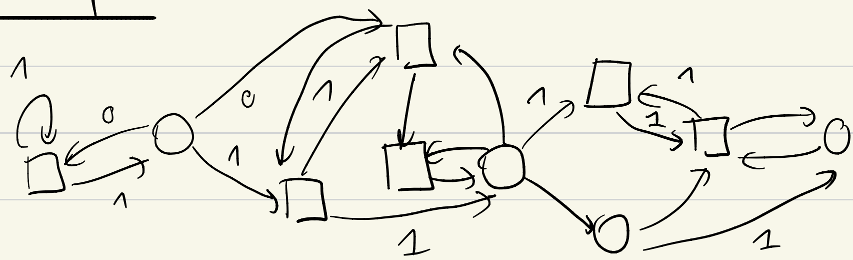
- $S_i = G_i \setminus \mathrm{Attr}_{\bigcirc}^{G_i}(\xrightarrow{1})$
- $A_i = \mathrm{Attr}_{\Box}^{G_i}(S_i)$
- $G_{i+1} = G_i \setminus A_i$.

<u>Remarque</u> : Cela définit un algorithme, qui s'arête à l'étape i telle que $S_i = \emptyset$.

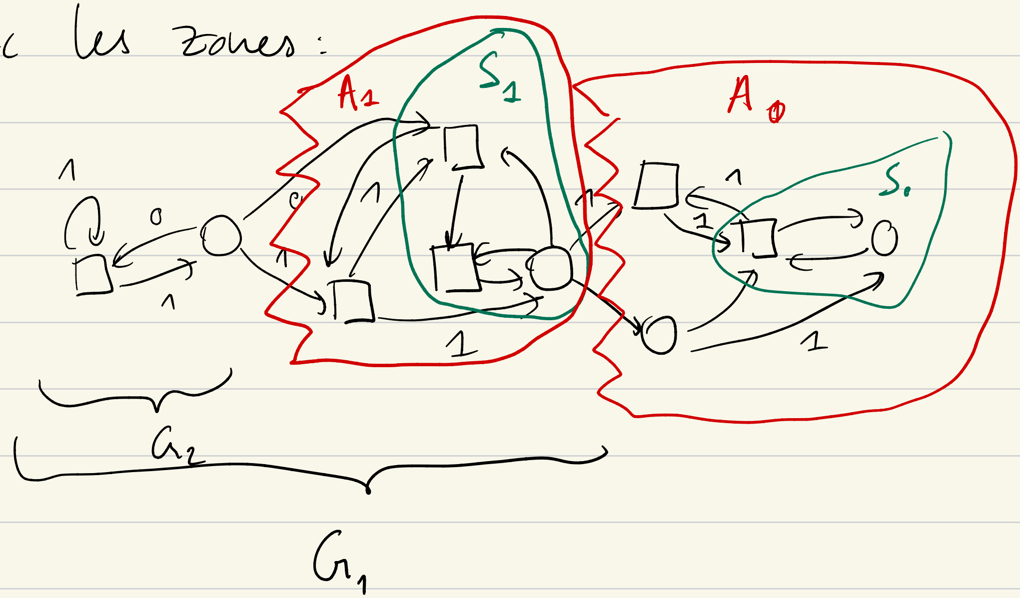
<u>Schématiquement</u> :



Exemple :



Avec les zones :



On pose i_0 la dernière étape de l'algorithme, c'est-à-dire tel que $S_{i_0} = \emptyset$. (Au-dessus, $i_0 = 2$).

Théorème : La région gagnante pour Eve est G_{i_0}. De plus, les deux joueurs ont des stratégies positionnelles optimales.

Preuve : deux choses à montrer :

(1) Adam gagne positionnellement sur

$$\bigcup_i A_i$$

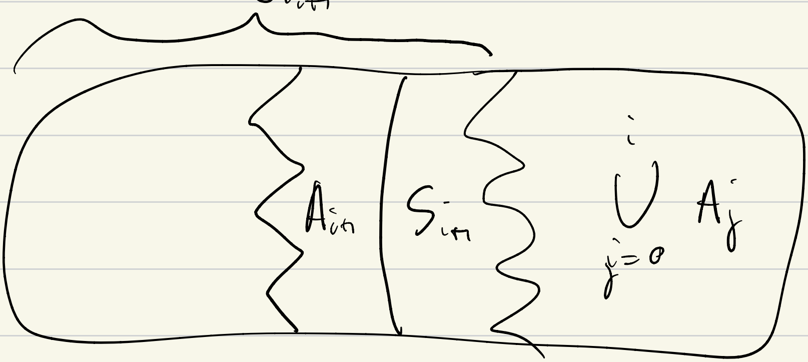
(2) Eve gagne positionnellement sur G_{i_0}.

Commençons par (1). On a déjà vu que Adam gagnait positionnellement sur S_0. Pour étendre à $A_0 = Attr_{\square}^{G}(S_0)$, il suffit d'appliquer la stratégie d'attracteur.

Pour $i \geq 0$, on raisonne par induction. Le cas de base est discuté ci-dessus. Soit $i \geq 0$ et supposons qu'Adam gagne positionnellement sur

$$\bigcup_{j=0}^{i} A_j,$$

on cherche à montrer que c'est aussi le cas sur A_{i+1}.



On commence par montrer qu'Adam gagne positionnellement depuis A_{i+1} dans le jeu G_{i+1}. C'est vrai car

- dans S_{i+1} on évite (positionnellement) de voir un 1, et
- dans A_{i+1} on attire (positionnellement

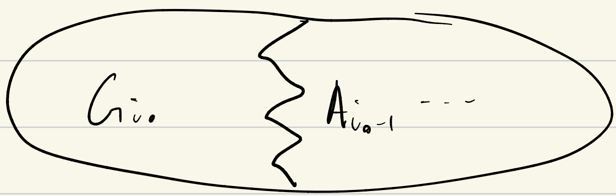
vers S_{i+1}.

On étend le résultat à G grâce à l'hypothèse d'induction : si Eve choisit de quitter G_{i+1}, on arrive dans

$$\bigcup_{j=0}^{i} A_i ,$$

où l'on sait déjà que Adam gagne.

<u>2e étape :</u> Eve gagne depuis G_{i_0}.



Comme S_{i_0} est vide, cela implique qu'Eve gagne depuis n'importe quel sommet dans le jeu restreint à G_{i_0} (cf lemme page 18).

Pour étendre à G, il suffit de remarquer que G_{i_0} est le complémentaire d'un attracteur pour Adam A_{i_0}, et donc c'est un piège pour Adam.

Conclusions:

- jeux de Büchi positionnels.
- jeux de co-Büchi (objectif "voir 1 un nombre fini de fois") aussi positionnels.
- algorithme en temps $O(mn)$.
- vive les attracteurs !