Automates et jeux

Pierre Ohlmann
pierre.ohlmann@lis-lab.fr.

1ère partie : JEUX à durée infinie.

2ème partie : AUTOMATES et synthèse (avec Karoliina Lehtinen).

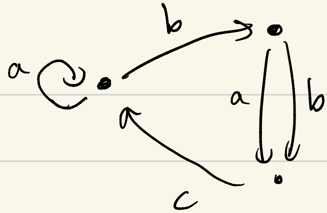
Introduction : QUIZZ.

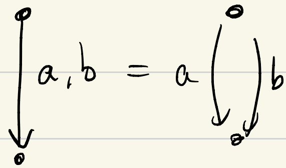
I. Généralités sur les jeux.

1) Définitions.

- Graphe
  - → ensemble de sommets V
  - → ensemble d'arêtes $E \subseteq V \times C \times V$
    - ↳ notation $e = (v, c, v') = v \xrightarrow{c} v'$.

Exemple:





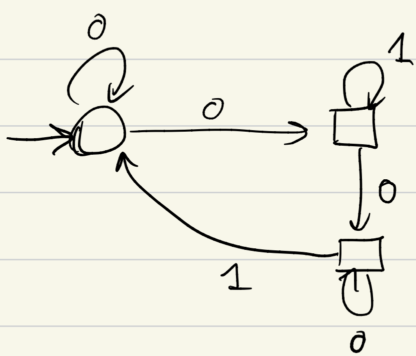
- **Jeu**
  - → graphe G
  - → partition $V_{Eve} \cup V_{Adam}$ des sommets
  - → Objectif $W \subseteq C^{\omega}$.
    (ensemble de suites d'évenements).
  - → sommet initial v_0

Notation:

○ = Eve $\longrightarrow v_0$.

□ = Adam

Exemple 1:



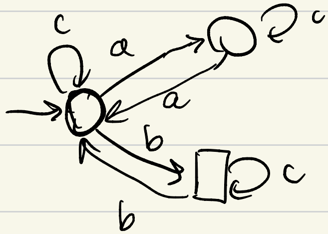
ici, Eve perd le jeu.

⚠ On prend par défaut le pt de vue d'Eve.

Objectif: "voir un 1"

formellement, $W = \{ w \in \{0,1\}^{\omega} \mid |w|_1 > 0 \}$

Exemple 2 :



Objectif : "voir un a puis un b".

Ici, Eve gagne.

(formellement, on pourrait écrire ça

$$W = \{ w = w_0 w_1 \dots \in \{a,b,c\}^\omega \mid \exists i,j,\ i<j \text{ et } w_i = a \text{ et } w_j = b \}$$)

• **Stratégie (pour Eve)**

↳ c'est une fonction

σ : chemin de v_0 à un sommet de V_{Eve} $\longrightarrow$ E

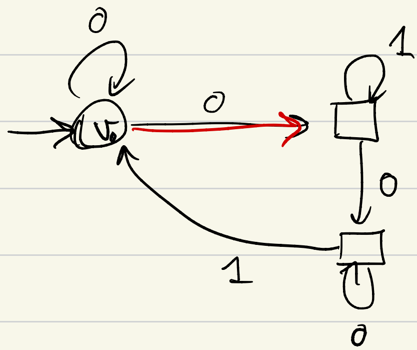
telle que $\sigma(v_0 \overset{\pi}{\rightsquigarrow} v) = v \xrightarrow{c} v'$

le même v.

notation pour un chemin π de v_0 à v

Exemples :

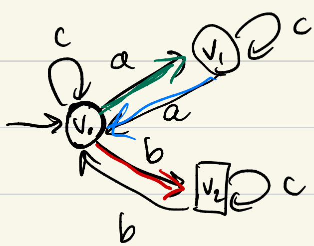
•



σ (n'importe quel chemin terminant en v_0) $= \rightarrow$

cette stratégie est bien définie, mais elle est perdante.

•



$\sigma(\varepsilon) = \nearrow$

le chemin vide, qui finit en v_0 par convention.

$\sigma(v_0 \xrightarrow{a} v_1) = \swarrow$

$\sigma(v_0 \xrightarrow{a} v_1 \xrightarrow{a} v_0) = \searrow$

σ(autres chemins) = pas important.

Cette stratégie est bien gagnante.

Un chemin

$$v_0 \xrightarrow{c_0} v_1 \xrightarrow{c_1} v_2 \xrightarrow{c_2} \cdots$$

est consistent avec une stratégie σ si pour tout préfixe

$$v_0 \xrightarrow{c_0} \cdots \xrightarrow{c_{n-1}} v_n$$

tel que $v_n \in V_{Eve}$, on a bien

$$\sigma(v_0 \xrightarrow{c_0} \cdots \xrightarrow{c_{n-1}} v_n) = v_n \xrightarrow{c_n} v_{n+1}.$$

Exemple : dans l'exemple précédent,

$$v_0 \xrightarrow{a} v_1 \xrightarrow{a} v_0 \xrightarrow{b} v_2 \xrightarrow{c} v_2 \xrightarrow{c} v_2 \xrightarrow{c} \cdots$$

est consistent avec la stratégie σ, mais

$v_0 \xrightarrow{a} v_1 \xrightarrow{c} v_1$ ne l'est pas.

Made with Goodnotes

Un chemin satisfait un objectif si la suite d'évènements associée appartient à l'objectif.

Une stratégie est gagnante si tous les chemins consistents avec elle satisfont l'objectif.

On dit que Eve gagne si il existe une stratégie gagnante

Les notions

- stratégie pour Adam (notée τ)
- strat. gagnante pour Adam
- Adam gagne

sont définies de manière symétriques.

Lemme : ce n'est pas possible que Eve et Adam gagnent.

Preuve par l'absurde : soient σ et τ strat. gagnantes pour Eve et Adam. Par induction montrons qu'il existe un chemin infini π consistant avec les deux stratégies. Pour chaque entier n, on construit le préfixe π_n de π de taille n. Pour $n=0$, c'est le chemin vide. Supposons construit π_n, on va définir π_{n+1}. Soit v_n le dernier sommet de π_n.

- si $v_n \in V_{Ève}$, on étend π_n avec l'arête $\sigma(\pi_n)$.
- si $v_n \in V_{Adam}$, on étend π_n avec l'arête $\tau(\pi_n)$.

Par construction, π est consistent à la fois avec σ et τ.

- σ gagnante pour Ève $\Rightarrow$ π satisfait W
- τ ——— Adam $\Rightarrow$ π — ${}^cW$

Absurde.

En théorie, on peut avoir des jeux où aucun des deux joueurs gagne. Mais c'est dur à construire.

Théorème [Martin 1985]: tout objectif Borélien est déterminé.

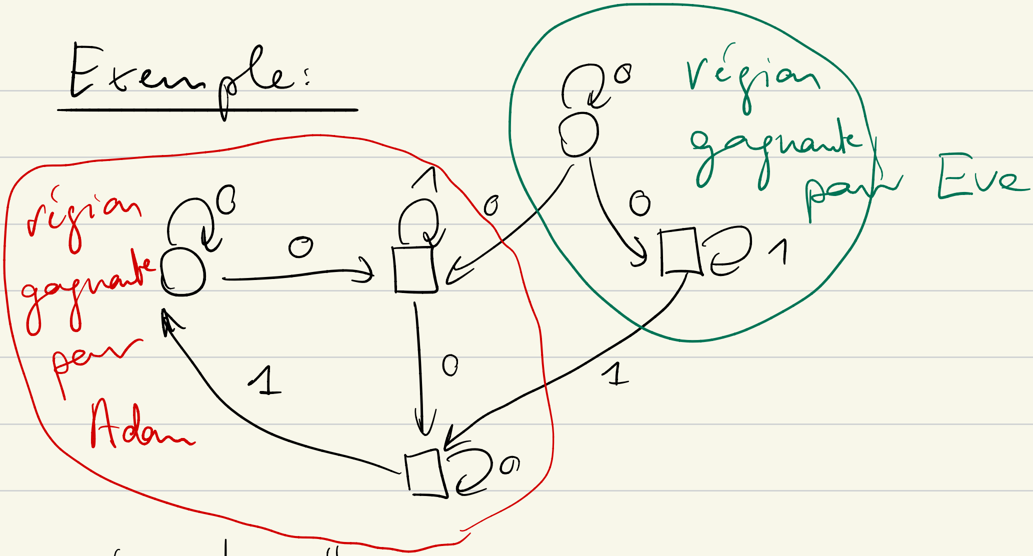
notion très générale qui sort du cadre du cours.

un des deux joueurs gagne.

⚠ Tous les objectifs considérés dans ce cours sont Boréliens et donc déterminés.

- un sommet v dans un jeu appartient à la région gagnante si Eve gagne quand on considère que v est le sommet initial.

Exemple:



Objectif: " voir un 1 ".