Les polynômes sont des fonctions qui vous sont familières. En effet, ce sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, pour lesquelles les formules de dérivation s'écrivent facilement. Ce sont des objets simples qui se prêtent bien au calcul numérique - approximation des racines, etc ...
Remplacer une fonction par un polynôme qui s'en approchent est souvent très utile et fécond - rappelez-vous par exemple les techniques de développement limités.
De manière générale, on appelle ***interpolation*** le fait de remplacer une fonction par une autre qui coïncide avec la première en plusieurs points.

1 Introduction à l'interpolation

1.1 Développements limités

Le ***développement limité*** d'une fonction fournit un premier exemple d'interpolation. Néanmoins, il est très important de garder en tête que le développement limité ne peut approcher la courbe que localement. De plus il ne coïncide *a priori* avec f qu'au voisinage du point où l'on effectue le développement limité.

Exercice 1 *Donnez le DL de la fonction tangente en zéro à l'ordre 12 (`taylor`).*
Définissez le polynôme associé (`convert`). Comment feriez-vous pour obtenir le DL de tangente ?

Exercice 2 *Donnez le développement limité de $f : x \rightarrow \frac{1}{1-x^2}$ à l'ordre n pour les ordres suivant :* $1, 5, 50, 100, 500, 2005$. *Tracez les fonctions polynômiales associées aux différents DL aux différents ordres. Comparez ces graphes avec le graphe de f. Interprétez qualitativement ces courbes. Que pensez-vous de l'interpolation d'une fonction par son DL ?*

1.2 Polynômes de Lagrange

1.2.1 Principe

Déterminez le polynôme du second degré passant par les points $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$ (utilisez les fonctions `solve`, `assign`)
Tracez sur un même graphe la parabole et les trois points (utilisez `plot` et `line`).

1.2.2 Polynôme de Lagrange

La partie qui suit nécessite une démonstration, ainsi, levez vos doigts du clavier et prenez de quoi écrire.

Théorème 1 *Soient $a_0, \ldots, a_n$ distinct, f une fonction telle qu'il soit possible de l'évaluer en ces points.*
Il existe un ***unique*** *polynôme de degré inférieur ou égal à n interpolant f en ces $n + 1$ points.*

Vous procéderez en deux temps :

1. Pour $i \leq n$, posons $L_i(X) = \displaystyle\prod_{j \neq i, j=0}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ Montrez que L_i est un polynôme, déterminez son degré.
   Calculez sa valeur au point a_i et aussi aux points a_j pour $j \neq i$.
   A partir les L_i, construiza un polynôme de degré inférieur ou égal à n interpolant f en les $n + 1$ points $a_0, \ldots, a_n$.
   On appelle L_i le $i^{\text{ème}}$ ***polynôme de Lagrange*** de f aux points $a_0, \ldots, a_n$.
2. Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q de degré inférieur ou égal à n interpolant f en les $n + 1$ points $a_0, \ldots, a_n$. Que pouvez vous dire sur les racines de $P - Q$?

1.2.3 Programmation de l'interpolation

Exercice 3 *Ecrivez une procédure qui, étant donnés une fonction et une liste de points, donne le polynôme de Lagrange associé.*

Afin de vérifier que votre procédure fonctionne correctement, vous pouvez la tester sur une certaine famille de fonctions pour lesquelles vous connaissez déjà le résultat. Laquelle ?

Exercice 4 *Ecrivez une procédure qui, étant donnés une fonction et une liste de points, affiche la fonction et le polynôme de Lagrange associé entre les points extrêmaux de la liste.*

1.2.4 Application

Exercice 5 *Appliquer cette dernière procédure à la fonction cosinus et aux points $0, \frac{\pi}{2}, \pi$. En quel point l'écart semble-t-il le plus grand - une réponse qualitative est attendue ? Affinez l'interpolation en ajoutant ce point. Que pensez-vous du résultat ?*

1.2.5 Limites de la méthode

Dans cette partie nous allons illustrer un des problèmes de l'interpolation de Lagrange avec le ***phénomène de Runge***.
Nous considérons à présent la fonction : $f : x \mapsto \frac{1}{1+8x^2}$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 6 *Définissez une procédure `x_unif` qui étant donnés deux réels $a < b$ et un entier N, renvoie la liste des $N + 1$ points uniformément répartis entre a et b.*
Appliquez la procédure de l'exercice 6 à la fonction f et à `x_unif`$(-1, 1, N)$ pour $N = 2, 10, 20$. Que constatez-vous ?

Le choix des points donne un résultat insatisfaisant. Nous allons voir qu'il est possible de corriger cela en n'utilisant pas des points uniformément répartis mais les ***points de Tchebychev***.

Exercice 7 *Définissez une procédure `x_Tch` prenant en entrée deux réels $a < b$ et un entier N, renvoie la liste des $N + 1$ points $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} \cos(\frac{i}{N})$.*
Appliquez à nouveau la procédure de l'exercice 6 à la fonction f et à `x_Tch`$(-1, 1, N)$ pour $N = 2, 10, 20$.

2 Ouverture : splines cubiques

Cette partie ne concerne que ceux qui ont réussi à programmer tous les algorithmes de la première partie.

2.1 Mise en situation

A la différence de l'interpolation de Lagrange ou l'on utilisait un polynôme défini globalement, dans le cas des splines cubiques, on utilise plusieurs polynômes que l'on recolle, *i.e.* étant donné une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ et des points $a_0, \ldots, a_n$ distincts deux à deux de cet intervalle, tels que $a_0 = a$ et $a_n = b$. notre but est de construire une fonction g qui interpole f aux points a_i telle que :

(i) Pour tout i compris entre 0 et n, $g(a_i) = f(a_i)$.

(ii) Pour tout i compris entre 0 et $n-1$, $g_{|[a_i,a_{i+1}]}$, la restriction de g à $[a_i, a_{i+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Notons $P_i = g_{|[a_i,a_{i+1}]}$.

(iii) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.

Ce procédé utilisé en CAO, permet de créer des courbes passant par des points donnés et qui soient relativement lisses à l'oeil nu.

2.2 Implémentation de la procédure

Pour i compris entre 0 et $n-1$, on écrit $P_i = a_iX^3 + b_iX^2 + c_iX + d_i$. Les inconnues du problèmes sont donc les a_i, b_i, c_i et d_i, soit au total $4n$ inconnues.
En utilisant les conditions (i),(ii),et (iii) les équations que doivent vérifier les P_i, et donc nos inconnues.
Combien d'équations obtient-on ?
Pour pallier ce problème on rajoute deux conditions : $P_0^{(2)}(0) = P_{n-1}^{(2)}(0) = 0$.

2.3 Illustration

Soit f une fonction passant par les points $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$ et $(3, 0)$.
Pour cette fonction f, tracez sur un même graphe les points où l'on interpole f, le polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre 3 de f et la spline cubique de f définie au paragraphe précédent.

2.4 Cas général

Définissez une procédure `spline` qui prend en argument une liste de couples d'éléments, par exemple :

```
[> A:=spline([[0,0],[1,4],[2,-2],[3,0]]);
```

Cette procédure renverra les différents polynômes mis en jeu dans le calcul de la spline cubique et tracera la spline.
Testez votre procédure sur des exemples.