Fonctions et équations différentielles

Vous avez vu en cours ce qu'étaient des fonctions continues, dérivées et des équations différentielles. L'objectif de ce TD est de vous permettre de résoudre des problèmes simples concernant ces notions. Votre objectif aujourd'hui est d'obtenir des résultats le plus efficacement possible, mais n'oubliez pas le jour d'un examen de démontrer ce que vous affirmez.

Rappels

Vous souvenez vous comment :

- tracer la fonction $e^{\tan x}$ pour x compris entre $[-\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}]$,
- trouver les solutions complexes de l équation $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$?

Petit exercice pour ceux qui ont répondu sans hésiter aux deux questions ci-dessus :

Soit P le polynôme $X^9 - 9X^8 + 36X^7 - 90X^6 + 162X^5 - 216X^4 + 215X^3 - 159X^2 + 78X - 24$.
Trouver un nombre naturel n tel que $n + 1$ soit une racine de P, et vérifier le résultat. Vous pouvez utiliser la fonction factor.

1 Étude de fonctions : quelques outils

1.1 continuité

Taper la ligne suivante, et la comprendre !

```
[ > f := x->piecewise(x<1,-1,x<2,x,2) : f(t); plot(f,0..3);
```

Exercice 1 *Définir la fonction valeur absolue, et la tracer.*
Définir le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

1.2 dérivabilité

Consulter l'aide à propos des opérateurs D et diff. Quelle est la différence ?

Exercice 2 *Calculer la dérivée q de la fonction $r : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$. Tracer q et étudier $\lim\limits_{+\infty} q$.*

Exercice 3 *Cacluler la dérivée de la fonction $a :\mapsto$ Arctan$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.*

Exercice 4 *Calculer la dérivée 5-ème de la fonction $\sin^5$. On peut linéariser une formule trigonométrique en utilisant*

```
[ > combine(sin(x)^5,trig);
```

Exercice 5 *Étudier la dérivabilité en 0 de $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$*

Exercice 6 *(facultatif) Calculer à la main la dérivée n-ième de $p : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$. Vérifier le résultat à l'aide de Maple pour n variant de 1 à 12.*

1.3 extrema et changements de signe

Exercice 7 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. Calculer la dérivée de f en utilisant l'opérateur de dérivation D. Résoudre $f'(x) > 0$, en déduire le tableau de variation de f. Donner le maximum de f sur $\mathbb{R}_*^+$.*

1.4 étude des branches infinies

Vous souvenez-vous de ce qui s'affiche pour l'instruction suivante ?

```
[> limit(arctan(x),x=infinity);
```

`limit` permet de faire l'étude des branches infinies en déterminant les éventuelles asymptotes et branches paraboliques. Pour trouver l'asymptote d'une fonction f, on commence par tracer son graphe pour avoir une idée du comportement à l'infini. Dans le cas particulier des droites asymptotiques, on mène l'étude suivante : considérons $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- si cette limite n'existe pas, on ne peut rien dire...
- si cette limite existe, on la note a. Si $a = \pm\infty$, la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy). Sinon, on étudie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax$:
  - si cette limite existe, et est finie, on la note b. Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$
  - si cette limite n'existe pas, on est dans le cas où on a une direction asymptotique : on dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique d'équation $y = ax$ en $+\infty$

Exercice 8 *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez leurs branches infinies et affichez sur un même graphe la fonction et ses branches infinies :*

- $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 4}$
- $x \mapsto \ln(\cosh(x))$
- $x \mapsto (x + \sqrt{x})e^{\sqrt{x^2+x}-x}$
- $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$
- $x \mapsto \frac{x}{2} + \ln(x)$

1.5 fonctions à plusieurs variables

```
[> f :=(x,y)->arctan(y/x); f(1,sqrt(3)); tan(Pi/3);
[> plot3d(f,-5..5,-5..5);
[> plot3d(sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);
```

2 Équations différentielles

Pour résoudre les équations différentielles, Maple possède la fonction `dsolve`. Consultez attentivement l'aide à son propos. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' + 2y = t \cos t$
- $t^3 y' = 2y$
- $y' - e^t y = 2te^{e^t}$, avec $y(0) = 2004$

Attention aux problèmes de recollement . . .

3 Et ce n'est pas fini !

3.1 étude de fonctions : applications

Étudier les fonctions suivantes (étudier = trouver l(es) intervalle(s) de définition, les limites aux bornes, étudier continuité et dérivabilité, tracer la fonction et ses éventuelles asymptotes ou tangentes) :

- $t \mapsto t^{\frac{t}{1-t}}$
- $t \mapsto \frac{t \ln(t)}{t^2-1}$
- $t \mapsto 2^{t-\frac{1}{t}}$

3.2 plus d'équations différentielles . . .

- $y' + y = e^t \cos t$
- $y' + 2ty = t^2 e^t$
- $3ty' - 4y = t$
- $t^2 y' - (2t-1)y = t^2$

3.3 autres fonctions intéressantes

Que dire sur les fonctions suivantes ?
Comment les afficher au mieux

- $x \mapsto \sin x + \cos x$
- $x \mapsto e^{-x^2} \cos x$