Magistère d'Informatique et de Mathématiques
ENS de Cachan *Jeudi 30 Mars 2006*
TD de Théorie des Langages

Grammaires

Exercice 1 (Exemples de grammaires)
Pour chacun des langages suivants, montrer qu'il est (ou qu'il n'est pas) contextuel, algébrique. On pourra utiliser le lemme d'itération.

- $L_1 = \{a^n b^p \mid n \neq p\}$
- $L_2 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^+\}$
- $L_3 = \{a^{n^2} \mid n > 0\}$
- $L_4 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
- $L_5 = \{w\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Exercice 2 (Forme normale des grammaires contextuelles)
Rappelons qu'une grammaire $G = (\Sigma, V, P, S)$ est dite *contextuelle* si toute règle $(\alpha, \beta) \in P$ vérifie $|\alpha| \leq |\beta|$.
Une grammaire contextuelle $G = (\Sigma, V, P, S)$ est dite en *forme normale* si toute règle est de la forme $(\alpha_1 X \alpha_2, \alpha_1 \beta \alpha_2)$, avec $X \in V$ et $\beta \neq \varepsilon$.
Démontrer que tout langage engendré par une grammaire contextuelle est également engendré par une grammaire contextuelle en forme normale.

Exercice 3 (Dick à n paires de parenthèses)
Soit $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ l'alphabet formé de n paires de parenthèses. Un mot $w \in \Sigma^*$ est *bien parenthésé* s'il est équivalent au mot vide dans la congruence engendrée par $a_i \bar{a}_i \equiv \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq n$.
Montrer que le langage de Dick $D_n^* = \{w \in \Sigma^* \mid w \equiv \varepsilon\}$ est engendré par la grammaire $S \to a_1 S \bar{a}_1 S + \ldots + a_n S \bar{a}_n S + \varepsilon$.

Exercice 4 (Ambiguïté)
Montrer que la grammaire suivante est ambiguë :

$$S \to \texttt{ if } c \texttt{ then } S \texttt{ else } S \mid \texttt{ if } c \texttt{ then } S \mid a$$

Montrer que le langage engendré n'est pas ambigu.

Exercice 5 (Langage de Lukasiewicz)
Soit $\Sigma = \{a, b\}$, $P = \{S \longrightarrow aSS + b\}$ soit $G = \langle \Sigma, \{S\}, P \rangle$. On note L le langage engendré par G. Ce langage est appelé *langage de Lukasiewicz*.

- Montrer que tout mot $u \in L$ vérifie la propriété (1) : $|u|_b = |u|_a + 1$.
- Montrer que tout mot $u \in L$ vérifie aussi la propriété (2) : $\forall v$ facteur gauche de u, $v \neq u$: $|v|_a \geq |v|_b$.
- En déduire que $L = \{u \in \Sigma^* \mid u$ vérifie (1) et $(2)\}$.
- On considère le langage de Dick D_1^* à une paire de parenthèses. Montrer que $L = D_1^* b$.
