Magistère d'Informatique et de Mathématiques
ENS de Cachan *Jeudi 9 Mars 2006*
TD de Théorie des Langages

Fonctions séquentielles (3) et Automates d'arbres

Fonctions séquentielles.

Exercice 1 (Séquentielle, ou non séquentielle ?)
Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est ou non séquentielle. On pourra, au choix, exhiber un transducteur, utiliser le critère de préservation des reconnaissables par image inverse ou encore utiliser le critère des résiduels.
– $f_a : u \in A^* \mapsto c^{|u|_a} \in C^*$ pour $a \in A$,
– $f_{a,b} : u \in A^* \mapsto c^{min(|u|_a,|u|_b)} \in C^*$ pour $a \neq b \in A$

Exercice 2 (Minimisation par les résiduels)
On cherche le transducteur minimal qui réalise la fonction séquentielle $x \mapsto 5x$ pour la représentation binaire.

1. Construire par la méthode des résiduels ce transducteur minimal (on redémontrera au passage que cette fonction est séquentielle).
2. Retrouver ce transducteur en minimisant l'automate vu en cours qui réalise cette fonction.

Exercice 3 (Caractérisation topologique de la séquentialité)
Nous présentons dans cet exercice une caractérisation topologique de la séquentialité. Pour cela, nous définissons la *distance préfixe* de deux mots u et v de Σ^* par $d(u, v) = |u|+|v|-2|u\wedge v|$. Il est facile de vérifier que l'on définit ainsi une distance sur Σ^*. Nous pouvons à présent énoncer le :

Théorème 1
Soit $f : A^* \to B^*$ une fonction dont le domaine est préfixiel. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est séquentielle,
(ii) f est lipschitzienne pour la distance d, et f^{-1} préserve les langages reconnaissables.

1. Démontrer l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$.
2. Application : montrer que dans une lecture "humaine" d'un nombre en base 2 (on lit le chiffre de poids le plus fort en premier), la multiplication par 3 n'est pas séquentielle.

Automates d'arbres.

Exercice 4 (Exemples de langages d'arbres)
Donnez pour les langages d'arbres réguliers suivants les automates qui les reconnaissent.

- L'ensemble des arbres d'arités $\leq p$ qui ont un nombre pair de noeuds internes.
- L'ensemble des arbres binaires stricts (pas nécessairement équilibrés) qui ont pour frontière un mot dans $(ab)^*$.
- L'ensemble $T_{L,p}$ des arbres d'arités $\leq p$ qui dont la frontière est dans le langage rationnel L.
- Un ensemble T d'arbres d'arités ≤ 3 tel que $Fr(T) = \{a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$.
- L'ensemble des formules du calcul propositionnel sur un ensemble de variables propositionnelles vide et qui s'évaluent à vrai.
- L'ensemble des formules du calcul propositionnel sur un ensemble fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles fixé et qui sont satisfaisables.

Autour des transducteurs.

Exercice 5 (Recherche et remplacement de motifs)
On fixe un alphabet fini Σ, et un ensemble fini $\mathcal{R}$ de règles de réécriture de la forme $u \to v$ avec $u, v \in \Sigma^+$.
Proposer une méthode permettant d'obtenir un transducteur séquentiel minimal réalisant l'opération de recherche/remplacement de motifs selon l'ensemble de règles $\mathcal{R}$. Discuter des problèmes de chevauchement de motifs.
Que se passe-t-il si l'on souhaite étendre la méthode à des règles définies à l'aide d'expressions régulières ?