Magistère d'Informatique et de Mathématiques
ENS de Cachan
TD de Théorie des Langages

Jeudi 16 Février 2006

Compléments sur les langages réguliers (2)

Automates finis et expressions rationnelles

Exercice 1 (De l'automate à l'expression rationnelle)

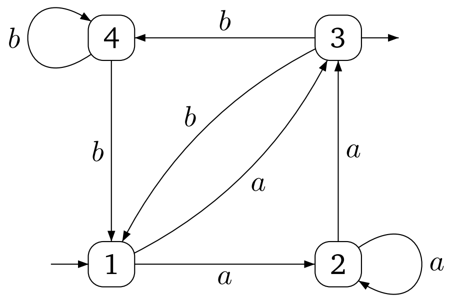
1. Montrer le lemme d'Arden :
   Soit $P, R \subseteq A^*$, $\varepsilon \notin P$, alors l'équation $X = PX + R$ admet comme unique solution P^*R.
2. Montrer que si $\forall i, j\ \varepsilon \notin P_{i,j}$ alors le système suivant admet une unique solution pour laquelle chaque X_i appartient à $Rat\{P_{i,j}, R_i\}$:

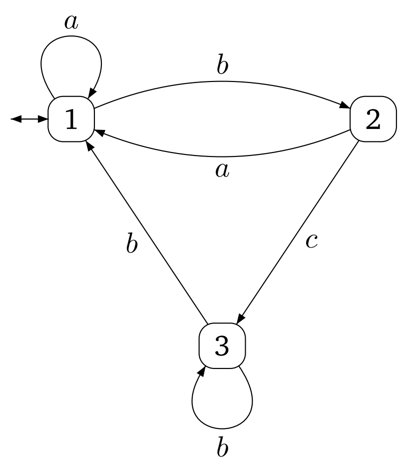
$$X_1 = P_{1,1}X_1 + \cdots + P_{1,n}X_n + R_1$$
$$\vdots$$
$$X_n = P_{n,1}X_1 + \cdots + P_{n,n}X_n + R_n$$

3. A partir d'un automate fini, expliquer comment construire un système d'équations dont les solutions sont les langages reconnus à partir de chacun des états.

Exercice 2 (Calcul d'expressions rationnelles)

1. Trouver “à l'oeil” une expression rationnelle pour l'automate ci-dessous à gauche :





2. Appliquer la méthode de l'exercice 1 à l'automate ci-dessus à droite :

Exercice 3 (De l'expression rationnelle à l'automate)

1. Donner un algorithme permettant de construire un automate associé à une expression rationnelle. Donner sa complexité.

2. Appliquer cet algorithme pour l'expression $(a(ab)^*)^*$.

Exercice 4 (Théorème de Brzozowski)
E, F, G désignent des expressions rationnelles.

1. Si $a \in A$ exprimer en fonction de $a^{-1}E$ et $a^{-1}F$ les expressions suivantes : $a^{-1}(E+F)$, $a^{-1}(E.F)$, $a^{-1}E^*$.
2. En déduire une méthode (éventuellement ne terminant pas toujours) pour construire un automate déterministe à partir d'une expression rationnelle.
3. Appliquer cette méthode à l'expression $(a+b)^*ab(a+b)^*$.
4. Obtient-on toujours l'automate minimal associé à l'expression rationnelle ?
5. Montrer que modulo les identités $E+E = E$, $E+F = F+E$ et $(E+F)+G = E+(F+G)$ la méthode termine.

Exercice 5 (Automates universels)
Un automate fini $\mathcal{A}$ peut-être interprété comme étant universel : un mot est accepté si tous les calculs sur ce mot sont accepteurs. On note $L_\forall(\mathcal{A})$ son langage.

(i) Montrer que si $\mathcal{A}$ est un automate fini, $L_\forall(\mathcal{A})$ est rationnel.

(ii) On suppose L rationnel, montrer que les langages suivants sont rationnels :
$\{w \mid \exists(u,v)\ w = uv$ et $v \in L\}$ et $\{w \mid \forall(u,v)\ w = uv \Rightarrow v \in L\}$

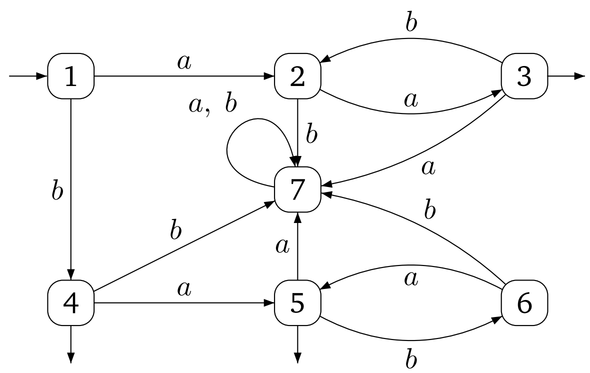
Exercice 6 (Langages locaux, algorithme de Glushkov)
Un langage L sur A est dit *local* s'il existe des parties P et S de A et une partie N de A^2 telles que $L\backslash\{1\} = PA^* \cap A^*S \setminus A^*NA^*$.

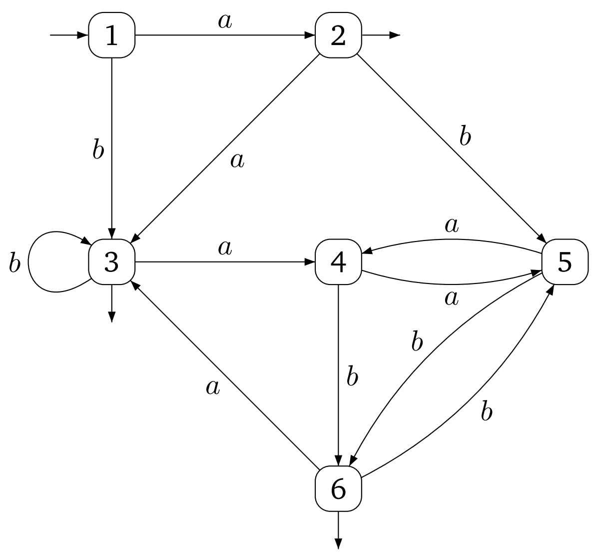
1. Montrer que tout langage local est reconnu par un automate fini ayant $n+1$ états où n est le cardinal de A.
2. Montrer qu'il existe des langages reconnaissables qui ne sont pas locaux.
3. Montrer que tout langage reconnaissable est l'image par un morphisme strictement alphabétique (c'est-à-dire que l'image d'une lettre est de longueur 1) d'un langage local.
4. Soit L un langage, on définit $P(L) = \{a \in A \mid aA^* \cap L \neq \emptyset\}$, $S(L) = \{a \in A \mid A^*a \cap L \neq \emptyset\}$, $F(L) = \{x \in A^2 \mid A^*xA^* \cap L \neq \emptyset\}$.
   Soit L un langage local, montrer que $L = P(L)A^* \cap A^*S(L) \setminus A^*F(L)^cA^*$. Donner un algorithme pour calculer $P(L), S(L)$ et $F(L)$ à partir d'une expression rationnelle représentant L. (ici $F(L)^c$ désigne le complémentaire de $F(L)$ dans A^2)
5. Une expression rationnelle est dite *linéaire* si chaque lettre a au plus une occurence dans l'expression. Montrer qu'une expression linéaire représente un language local.
6. En déduire un algorithme pour construire un automate à partir d'une expression rationnelle (linéaire ou non). Comparer sa complexité avec celle de l'algorithme naïf.
7. Appliquer cet algorithme à l'expression rationnelle $(a(ab)^*)^*$.

Minimisation

Exercice 7 (Automate des résiduels)
Calculer l'automate des résiduels du langage $L = (a(ab)^*)^* \cup (ba)^*$.

Exercice 8 (Minimisations)
Minimiser les automates suivants :





Exercice 9 (Double renversement)

1. Soit L un langage rationnel. Montrer que le déterminisé d'un automate co-déterministe co-accessible qui reconnaît L est l'automate minimal de L.
2. On note $\mathcal{A}^t$ l'automate $\mathcal{A}$ dans lequel on a inversé le sens des flèches et échangé états initiaux et finaux. Montrer que $(((\mathcal{A}^t)_{det})^t)_{det}$ est l'automate minimal de $L(\mathcal{A})$.

Reconnaissabilité par morphismes

Exercice 10 (Morphisme effectif)
Donner un monoïde permettant de reconnaître le langage accepté par l'automate suivant.